Pauta control 4

a) Para que el conjunto $A=\{-x+1, x^2-2x, -1-5x+3x^2\} \subseteq \mathbb{P}^2$ sea l.i. debe cumplir que si

$$\lambda_1(-x+1)+\lambda_2(x^2-2x)+\lambda_3(-1-5x+3x^2)=0 \quad (1)$$

es porque $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

de (1) obtenemos

$$\lambda_1-\lambda_3+(-\lambda_1-2\lambda_2-5\lambda_3)x+(\lambda_2+3\lambda_3)=0$$

$$\lambda_1-\lambda_3=0 \quad (2) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_3$$

$$-\lambda_1-2\lambda_2-5\lambda_3=0 \quad (3)$$

$$\lambda_2+3\lambda_3=0 \quad (4) \Rightarrow \lambda_2=-3\lambda_3$$

Reemplazando en (3)

$$-\lambda_3+6\lambda_3-5\lambda_3=0$$

1,0

$0=0$ se indefine para λ_3

Por lo tanto, para cualquier $\lambda_1=\lambda_3$ y $\lambda_2=-3\lambda_3$ la ecuación (1) es cero, por lo tanto, el conjunto A no es l.i, es linealmente dependiente. 1,0

Otra forma

$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-5\\3\end{pmatrix}\right\}$ con $\begin{pmatrix}1\\x\\x^2\end{pmatrix}$ vector de $\mathbb{P}^2$.

buscamos que A sea l.i. pivoteamos

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-2&1\\-1&-5&3\end{pmatrix}\xrightarrow[E_2]{E_{13}(1)}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&-6&3\end{pmatrix}\xrightarrow{E_{23}(3)}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1,0

se independiza del tercer vector, por lo tanto el vector $\begin{pmatrix}-1\\-5\\3\end{pmatrix}$ puede ser escrito como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, por lo tanto el conjunto A es l.d.

1,0

b) Si $A = \langle \{ (-x+1), (x^2-2x), (-1-5x+3x^2) \} \rangle$ es l.d, basta probar con 2 vectores que sean l.i para probar que $-3x^2+6$ pertenece a A. Como claramente $(-x+1)$ y (x^2-2x) son l.i, ya que $\alpha(-x+1) + \beta(x^2-2x) = 0$ $\Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Estos vectores generan A.

Luego buscamos λ_1 y λ_2 tales que

$$\lambda_1(-x+1) + \lambda_2(x^2-2x) = -3x^2+6$$

$$\lambda_1 + (-2\lambda_2 - \lambda_1)x + \lambda_2 x^2 = -3x^2+6$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 6 \wedge \lambda_2 = -3 \wedge (-2\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

con $\lambda_1 = 6 \wedge \lambda_2 = -3$

$$\Rightarrow (-2)\cdot(-3) - (6) = 0$$

Por lo tanto $-3x^2+6$ se puede escribir como combinación lineal de $(-x+1)$, (x^2-2x), por lo tanto pertenece al espacio generado por A. 2 ptos

c) Nuevamente buscamos λ_1 y λ_2 tal que

$$\lambda_1(-x+1) + \lambda_2(x^2-2x) = x^2+2x-1$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 = -1 \wedge (-\lambda_1 - 2\lambda_2) = 2.$$

$$\text{Pero } (-\lambda_1 - 2\lambda_2) = (1-2) = -1 \neq 2$$

Por lo tanto x^2+2x-1 no se puede escribir como combinación lineal de $(-x+1) \wedge (x^2-2x)$, por lo tanto no pertenece al espacio generado por A. 2 ptos.