

# AYUDANTÍA 10: SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES

ÁLVARO TELLO CRINO

P1) CONSIDERE LOS CONJUNTOS  $W$  y  $U$  definidos por:

$$W = \{ M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & c & i \end{pmatrix} \wedge a + c + i = 0; a, b, c, i \in \mathbb{R} \}$$

$$U = \{ M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ r & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R} \}$$

- DEMUESTRE QUE  $W$  y  $U$  SON S.E.V. de  $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .
- ENCUENTRE BASES y DIMENSIONES PARA LOS SUBESPACIOS  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$ , y  $U + W$ , y DECIDA SI LA SUMA  $U + W$  ES DIRECTA.
- ¿CUÁNTOS VECTORES ES PRECISO AGREGAR A UNA BASE DE  $U + W$  PARA OBTENER UNA BASE DE  $S = \{ M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / M \text{ es simétrica} \}$ ? JUSTIFIQUE ENCONTRANDO UNA BASE DE  $S$ .

SOL:

PARA  $W$ : Si  $u_1, u_2 \in W$   $\wedge \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , POR DEMOSTRAR QUE  $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in W$ . Sean

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & c_1 & 0 \\ 0 & c_1 & i_1 \end{pmatrix} \text{ con } a_1 + c_1 + i_1 = 0 \quad \wedge \quad u_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & c_2 & i_2 \end{pmatrix} \text{ con } a_2 + c_2 + i_2 = 0.$$

ENTONCES

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & 0 \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 \\ 0 & \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) + (\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2) = \lambda_1 (a_1 + c_1 + i_1) + \lambda_2 (a_2 + c_2 + i_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0. \text{ ENTONCES } (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \in W$$

PARA  $U$ : sean

$$v_1, v_2 \in U, \text{ tal que } v_1 = \begin{pmatrix} 0 & r_1 & s_1 \\ r_1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & r_2 & s_2 \\ r_2 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



45c

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 & \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = p$  y  $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 = q$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ p & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \in U.$$

b) Base para  $W$

Cualquier vector de  $W$  puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & e & c \\ 0 & c & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & e & c \\ 0 & c & -a-e \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

los cuatro matrices generan  $W$  y a la vez son L.I., pues

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

Entonces

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } \dim W = 4.$$

Base para  $U$

$$\begin{pmatrix} 0 & r & s \\ r & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ es inmediato que}$$

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } \dim U = 2.$$

Base para  $U \cap W$

Es inmediato que  $U \cap W = \left\{ M \in M_{3 \times 3} / M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  pues

$M$  contiene los ceros comunes a las matrices de ambos subespacios,  
 simétrica y de traza nula ( $0 + e + i = 0 + 0 + 0 = 0$ )



ENTONCES

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ y } \dim(U \cap W) = 1$$

y por lo tanto  $U \cap W \neq \{0\}$ .

CONCLUSIÓN INMEDIATA ES QUE  $U+W$  NO ES SUMA DIRECTA.  
Ya que  $V = U \oplus W \Leftrightarrow (V = U+W) \wedge (U \cap W = \{0\})$

Base para  $U+W = \{M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / M = \begin{pmatrix} a & b+c & s \\ b+c & e & c \\ s & c & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \lambda & s \\ \lambda & e & c \\ s & c & i \end{pmatrix} \text{ A } a+e+i=0\}$

$$U+W = \begin{pmatrix} a & \lambda & s \\ \lambda & e & c \\ s & c & -a-e \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donde las matrices de la derecha son l.i. y constituyen la base de  $U+W$ . Además  $\dim(U+W) = 5$ , que puede verificarse con  $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2+4+1=5$ .

6) Finalmente,  $S = \{M \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) / M \text{ es simétrica}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{de donde } \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en que las matrices de la derecha son l.i. Así  $\dim S = 6$ , de modo que a la base  $U+W$  ( $\dim(U+W) = 5$ ) bastará agregarle 1 vector para obtener una base de  $S$ .

P2] Sean  $U, V$  subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^n$ . Demuestra que:

a)  $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$

b)  $(U^\perp)^\perp = U$

c)  $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$

d)  $U \oplus V = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow U^\perp \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$



sol: a) tenemos que probar que  $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$   
 sea  $x \in U^\perp \cap V^\perp$ . por definicion.

$$\begin{aligned}\langle x, u \rangle &= 0 \quad \forall u \in U \\ \langle x, v \rangle &= 0 \quad \forall v \in V\end{aligned}$$

Sea  $w = u+v$ . Entonces  $w = u+v$  para algún  $u \in U, v \in V$  luego

$$\langle x, w \rangle = \langle x, u+v \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, v \rangle = 0$$

por lo tanto  $x \in (U+V)^\perp$

Sea ahora  $x \in (U+V)^\perp$ . entonces  $\langle x, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U+V$   
 si  $u \in U$ , entonces  $u \in U+V$  y por lo tanto  
 $\langle x, u \rangle = \langle x, u+0 \rangle = 0$ . luego  $x \in U^\perp$ . Similarmente,  
 todo  $v \in V$  cumple  $v \in U+V$  y entonces  $\langle x, v \rangle = 0$ , por lo  
 tanto  $x \in V^\perp$ , y por lo tanto  $x \in U^\perp \cap V^\perp$

b) sea  $x \in (U^\perp)^\perp$ . como  $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ ,  $x = x_u + x_{u^\perp}$  con  $x_u \in U$   
 y  $x_{u^\perp} \in U^\perp$ . se tiene que

$$\begin{aligned}\langle x, x_{u^\perp} \rangle &= 0, \text{ luego} \\ \langle x_u, x_{u^\perp} \rangle + \langle x_{u^\perp}, x_{u^\perp} \rangle &= 0, \text{ como } \langle x_u, x_{u^\perp} \rangle = 0 \\ \langle x_{u^\perp}, x_{u^\perp} \rangle &\text{ debe ser cero, ocurriendo solo si } x_{u^\perp} = 0 \\ \text{por lo tanto } x &= x_u + 0, \text{ luego } x = x_u \in U.\end{aligned}$$

• Sea  $x \in U$ , para todo  $z \in U^\perp$   $\langle x, z \rangle = 0$ , luego  $x \in (U^\perp)^\perp$ .

c) por (a),  $(U^\perp + V^\perp)^\perp = ((U^\perp)^\perp \cap (V^\perp)^\perp)$ , luego con (b), se tiene  
 $(U^\perp + V^\perp)^\perp = (U \cap V)^\perp$ .

d) Supongamos que  $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ , como  $(U+V)^\perp = \emptyset$ , se tiene  
 que  $U^\perp \cap V^\perp = \emptyset$ . como  $(U \cap V)^\perp = \mathbb{R}^n$ , se tiene que  $U^\perp + V^\perp = \mathbb{R}^n$   
 se concluye que  $\mathbb{R}^n = U^\perp \oplus V^\perp$



P3] Usamos la notación  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  para el conjunto de matrices de  $n \times n$  con coeficientes en los Reales. Si  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $V$  es un s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$  se define

$$A(V) = \{Ax / x \in V\}.$$

i) Pruebe que si  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  y  $V$  es s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $A(V)$  también es s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$ .

ii) Sean  $V, W$  s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $V \oplus W = \mathbb{R}^n$ . Pruebe que si  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  es invertible, entonces  $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$ .

iii) Sean  $V, W$  s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$  tales que  $V \oplus W = \mathbb{R}^n$ . Muestre que si  $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$  entonces  $A$  es invertible.

Indicación: Pruebe que para todo  $z \in \mathbb{R}^n$  el sistema  $Ax = z$  tiene solución.

sol:

i) Sean  $y_1, y_2 \in A(V)$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . ENTONCES existen  $v, w \in V$  tales que  $y_1 = Av$  y  $y_2 = Aw$ . Como  $V$  es un s.e.v. de  $\mathbb{R}^n$  tenemos que  $v + \lambda w \in V$  por lo tanto

$$y_1 + \lambda y_2 = Av + \lambda Aw = A(v + \lambda w) \in A(V)$$

por lo tanto  $A(V)$  es s.e.v.

ii) Debemos probar que  $A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$  y  $A(V) \cap A(W) = \{0\}$

$A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$ : Sea  $z \in \mathbb{R}^n$ . Como  $A$  es invertible el sistema  $Ax = z$  tiene solución para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , luego si  $\mathbb{R}^n = V \oplus W$  con  $v \in V$  y  $w \in W$  tenemos que  $x = v + w$ . Entonces  $z = Ax = A(v + w) = Av + Aw \in A(V) + A(W)$ . Por lo tanto  $A(V) + A(W)$  generan  $\mathbb{R}^n$ .

$A(V) \cap A(W) = \{0\}$ : Sea  $z$  un elemento cualquiera de  $A(V) \cap A(W)$  como  $z \in A(V)$  existe  $v \in V$  tal que  $z = Av$ , de  $z \in A(W)$  concluimos que existe  $w \in W$  tal que  $z = Aw$ . Entonces  $A(v - w) = Av - Aw = z - z = 0$ . Como  $A$  es invertible esto implica que  $v = w$ . Así  $v \in V \cap W$ , y por hipótesis este espacio es trivial, que corresponde a  $v = w = 0$  y por lo tanto  $z = Av = 0$ . Concluyendo que  $A(V) \cap A(W) = \{0\}$ .



y por lo tanto, como  $A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$  y  $A(V) \cap A(W) = \{0\}$  se concluye que  $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$ .

(iii) siguiendo la indicación, vemos que para todo  $z \in \mathbb{R}^n$  el sistema  $Ax = z$  tiene solución. En efecto, si  $z \in \mathbb{R}^n$ , gracias a la hipótesis  $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$  podemos escribir  $z = y_1 + y_2$  con  $y_1 \in A(V)$  e  $y_2 \in A(W)$ . Por consiguiente existen  $v \in V$  y  $w \in W$  tales que  $y_1 = Av$  e  $y_2 = Aw$ . Entonces

$$z = Av + Aw = A(v+w) \Rightarrow I = A \begin{pmatrix} v+w \\ z \end{pmatrix}$$

ya que  $v, w$  y  $z \in \mathbb{R}^n$ . por lo tanto  $A$  es invertible.

Observemos que solo era necesario suponer que  $A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$ .