

AYUDANTÍA 9: VECTORES LI Y GENERADORES.

ÁLVARO TELLO CRINO.

P1) SEA $P_3(\mathbb{R})$ EL CONJUNTO DE LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL 3 CON COEFICIENTES REALES. SEAN $p_1, p_2, p_3 \in P_3(\mathbb{R})$ TALES QUE:

$$p_1(x) = 1 + 6x^2; \quad p_2(x) = 4x; \quad p_3(x) = 4 + 5x^2$$

DEMOSTRE QUE $P_2(\mathbb{R}) = \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$

Sol.

COMO p_1, p_2 Y $p_3 \in P_2(\mathbb{R})$ FALTA PROBAR QUE $P_2(\mathbb{R}) \subseteq \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$

SEA $p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \Rightarrow p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
 QUEREMOS ENCONTRAR $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ TAQ $p(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i(x)$
 ES DECIR

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \lambda_1(1 + 6x^2) + \lambda_2 4x + \lambda_3(4 + 5x^2)$$

POR LO TANTO

$$x^0 \Rightarrow \alpha = \lambda_1 + 4\lambda_3$$

$$x^1 \Rightarrow \beta = 4\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \beta/4$$

$$x^2 \Rightarrow \gamma = 6\lambda_1 + 5\lambda_3$$

OBTENIENDO EL SISTEMA:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 0 & 5 & \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 0 & -19 & \gamma - 6\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{6\alpha - \gamma}{19}$$

$$1 \quad \lambda_1 + 4\lambda_3 = \alpha$$

$$\lambda_1 + \frac{24\alpha - 4\gamma}{19} = \alpha$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{4\gamma}{19} - \frac{5\alpha}{19}$$

POR LO TANTO EXISTEN

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$$

$$\text{ASI } P_2(\mathbb{R}) \subseteq \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$$

$$\text{WEGO } P_2(\mathbb{R}) = \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$$

$\{p_i\}_{i=1}^3$ SON VECTORES GENERADORES DE $P_2(\mathbb{R})$.

P2) EN EL SIGUIENTE PROBLEMA $P_3(\mathbb{R})$ DENOTA EL ESPACIO VECTORIAL DE LOS POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A 3. CONSIDERAR

$$U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) / p(1) = p'(1) = 0\}$$

- ENCUENTRE UNA BASE DE U Y SU DIMENSION.
- EXTIENDA LA BASE DE LA PARTE ANTERIOR A UNA BASE DE $P_3(\mathbb{R})$.
- CONSIDERE AHORA EL ESPACIO VECTORIAL $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) / p(0) = 0\}$ Y ENCUENTRE UNA BASE DE W .
- ENCUENTRE UNA BASE DE $U \cap W$ Y SU DIMENSION.
- SEAN $p(x) \in U$ CON $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. CON ESTO SE TIENE QUE $p(x) = b + 2cx + 3dx^2$ IMPOSICION LAS RESTRICCIONES QUE DEFINEN A U , OBTENEMOS

$$p(1) = a + b + c + d = 0$$

$$p'(1) = b + 2c + 3d = 0$$

$$\Rightarrow a = -b - c - d = -(-2c - 3d) - c - d = c + 2d$$

CON ESTO EN MENTE, OBTENEMOS QUE $p(x)$ SE PUEDE ESCRIBIR DE LA FORMA

$$p(x) = c + 2d + (-2c - 3d)x + c^2 + dx^3 = c(1 - 2x + x^2) + d(2 - 3x + x^3)$$

OBTENIENDO QUE EL CONJUNTO $\{1 - 2x, 2 - 3x + x^3\}$ GENERA A U .

- PARA EXTENDER LA BASE DE U A UNA BASE DE $P_3(\mathbb{R})$ DEBEREMOS ENCONTRAR DOS VECTORES L.I. A LA BASE ORIGINAL

TOEMOS COMO CANDIDATOS A $\{1\}$ Y A $\{x\}$. PROBLEMOS QUE ESTOS DOS VECTORES SON L.I. AL RESTO:

SEAN $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ TALES QUE:

$$\alpha + \beta x + \gamma(1 - 2x + x^2) + \delta(2 - 3x + x^3) = 0$$

Y PROBLEMOS QUE $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

EN EFECTO, ORDENANDO LEGAMOS A

$$(\alpha + \gamma + 2\delta) + (\beta - 2\gamma - 3\delta)x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0$$

$$\text{Y SI } x \neq 0 \Rightarrow \delta = 0 \wedge \gamma = 0 \wedge \beta = 2\gamma + 3\delta = 0 \wedge \alpha = -\gamma - 2\delta = 0$$

CONCLUYENDO LO PEDIDO FINALMENTE SE TIENE QUE $\{1, x, 1 - 2x + x^2, 2 - 3x + x^3\}$ ES BASE DE $P_3(\mathbb{R})$

c) Sea $p(x) \in W$ con $p(x) = a + bx + cx^2$, de donde $p''(x) = 2c + 6dx$, como $p''(0) = 0$. se tiene que

$$p''(0) = 2c = 0 \Rightarrow c = 0.$$

por lo tanto, los polinomios que pertenecen al subespacio son de la forma $p(x) = a + bx + dx^3$, por lo que el conjunto $\{1, x, x^3\}$ generan a W . Como claramente son l.i. (pueden probarlo ustedes) se concluye que son base de W .

d) Sea $p(x) \in (U \cap W)$ en particular el polinomio está en U , por lo que se puede escribir como

$$p(x) = c(1 - 3x + x^2) + d(2 - 3x + x^3)$$

Además, $p(x) \in W$, por lo tanto se tiene que $c = 0$, quedando $p(x) = d(2 - 3x + x^3)$. luego $\{2 - 3x + x^3\}$ es base de $(U \cap W)$, por lo que $\dim(U \cap W) = 1$.

P3) Considere el siguiente s.e.v. de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Encuentre una base para S e indique $\dim S$

b) Extienda la base en CONMAT en la parte anterior a una base de $\mathbb{R}^4$.

Sol:

Para verificar cuales vectores son l.i., usaremos el algoritmo que consiste en construir la matriz con los vectores transpuestos y pivotar, si al pivotar alguno queda con ceros en la fila, corresponderá al vector l.d.

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc|l} 1 & 2 & 1 & 3 & E_{12}(1/2) \\ 3 & 6 & 3 & 9 & \sim \\ 1 & 3 & 5 & 4 & E_{13}(1) \\ 2 & 3 & -2 & 5 & E_{14}(-2) \end{array} \begin{array}{c|ccc|l} 1 & 2 & 1 & 3 & E_{24}(1/2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sim \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \\ 0 & -1 & -4 & -1 & \end{array} \begin{array}{c|ccc|l} 1 & 2 & 1 & 3 & E_{24}(1/2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sim \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Como podemos ver, la fila 2 y 4 se hicieron ceros, por lo tanto los vectores 1 y 3 son los vectores l.i.

por lo tanto, la base de $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\dim S = 2$.

b) como las bases deben ser iguales en dimensión, tenemos que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, nos faltan dos vectores, los que sacaremos de la base canónica de $\mathbb{R}^4$

base canónica de $\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

elegimos $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y probamos que son l.i. con respecto a los generadores de S .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1/4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como no podemos seguir pivotando y no queda ninguna fila en ceros, podemos confirmar que son vectores l.i. y por lo tanto base de $\mathbb{R}^4$.

base de $\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

P41 considere el conjunto de vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Es el conjunto l.i.? Elimine vectores hasta obtener una base de $\mathbb{R}^4$ si es que se pueda, si no, obtenga el subconjunto l.i. más grande posible de ellos.

sol: Claramente no son l.i., ya que el espacio de $\mathbb{R}^4$ tiene dim 4 y el conjunto dim 6, por lo tanto, para que sea generador hay que eliminar al menos 2 vectores y que el resto sea l.i.

Como no sabemos cual borrar, recurrimos al algoritmo anterior y empezaremos a pivotar para ver cuales de los vectores se eliminan, lo cual lo harán ustedes, y les mostrare que queda.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quedando $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ como vectores l.i.

y como su dimensión es 4, son generadores de $\mathbb{R}^4$.