ÁLVARO TELLO CRINO.

# AYUDANTÍA 8: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES.

P1 DEMUESTRE QUE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS SON S.E.V. DE LOS ESPACIOS VECTORIALES RESPECTIVOS.

a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b=0 \in \mathbb{R} \right\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

b) $U = \{ p \in P_2(\mathbb{R}) : p'(0) = 0 \wedge p(1) = 0 \}$ de $P_2(\mathbb{R})$

sol.

a) sea $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in U$

Pd: $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in U \iff \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ tal que $a' + b' = 0$

como $M_1 \in U \wedge M_2 \in U \Rightarrow$
$a+b=0 \wedge x+y=0$

Luego $\underbrace{(\lambda_1 a + \lambda_2 x)}_{a'} + \underbrace{(\lambda_1 b + \lambda_2 y)}_{b'} = \lambda_1(a+b) + \lambda_2(x+y)$
$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

POR LO TANTO como $a' + b' = 0$, $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in U$
ASÍ $U$ ES s.e.v. DE $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) sea $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $p_1, p_2 \in P_2(\mathbb{R})$ (Polinomio de grado 2 o menor)

Pd: $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in U \iff (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(x) = P(x)$
$P'(x) = 0 \quad \wedge P(1) = 0.$

1ª condición la derivada
$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)'(x) = \lambda_1 p_1'(x) + \lambda_2 p_2'(x) =$
evaluando en cero
$\lambda_1 p_1'(0) + \lambda_2 p_2'(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) = 0$

2ª condición: evaluar en 1
$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(1) = \lambda_1 p_1(1) + \lambda_2 p_2(1) = \lambda_1 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

Luego, como cumple ambas condiciones $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in U$ y $U$ es s.e.v.

ÁLVARO TELLO CRINO.

# AYUDANTÍA 8: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES.

P1 DEMUESTRE QUE LOS SIGUIENTES CONJUNTOS SON S.E.V. DE LOS ESPACIOS VECTORIALES RESPECTIVOS.

a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a+b=0 \in \mathbb{R} \right\}$ de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

b) $U = \{ p \in P_2(\mathbb{R}) : p'(0) = 0 \wedge p(1) = 0 \}$ de $P_2(\mathbb{R})$

Sol.

a) Sea $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $M_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in U$

Pd: $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in U \iff \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ tal que $a' + b' = 0$

Como $M_1 \in U \wedge M_2 \in U \Rightarrow$

$a+b=0 \wedge x+y=0$

Luego $\underbrace{(\lambda_1 a + \lambda_2 x)}_{a'} + \underbrace{(\lambda_1 b + \lambda_2 y)}_{b'} = \lambda_1(a+b) + \lambda_2(x+y)$

$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

Por lo tanto como $a' + b' = 0$, $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in U$

Así $U$ es s.e.v. de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

b) Sea $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $p_1, p_2 \in P_2(\mathbb{R})$ (Polinomio de grado 2 o menor)

Pd: $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in U \iff (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(x) = P(x)$

$P'(x) = 0 \wedge P(1) = 0.$

1ª condición la derivada

$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)'(x) = \lambda_1 p_1'(x) + \lambda_2 p_2'(x) =$

evaluando en cero

$\lambda_1 p_1'(0) + \lambda_2 p_2'(0) = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) = 0$

2ª condición: evaluar en 1

$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(1) = \lambda_1 p_1(1) + \lambda_2 p_2(1) = \lambda_1 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$

Luego, como cumple ambas condiciones $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in U$ y $U$ es s.e.v.

P2| SEA $E$ UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO $K$. EN $E\times E$ SE DEFINEN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES

$$(u,v)+(u',v')=(u+u',v+v')$$
$$\lambda(u,v)=(\lambda u,\lambda v)$$

a) PRUEBE QUE $E\times E$, CON LAS OPERACIONES ANTERIORES, ES UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $K$.

b) CONSIDERE LOS CONJUNTOS

$$\Delta=\{(u,v)\in E\times E \,/\, u=v\}$$
$$\bar{\Delta}=\{(u,v)\in E\times E \,/\, u=-v\}$$

PRUEBE QUE $\Delta$ y $\bar{\Delta}$ SON SUBESPACIOS VECTORIALES DE $E\times E$

a) PARA PROBAR QUE $E\times E$, CON LAS OPERACIONES ANTERIORES, ES UN e.v. SOBRE $K$ verificamos todas las propiedades que definen a un espacio vectorial.

i) asociatividad

$$\begin{aligned}(u,v)+\{(u',v')+(u'',v'')\} &= (u,v)+\{u'+u'',v'+v''\}\\ &=(u+(u'+u''),v+(v'+v'')\}\\ &=((u+u')+u'',(v+v')+v''\}\\ &=\{(u+u',v+v')\}+(u'',v'')\\ &=\{(u,v)+(u',v')\}+(u'',v'')\end{aligned}$$

ii) conmutatividad

$$\begin{aligned}(u,v)+(u',v') &= (u+u',v+v')\\ &=(u'+u,v'+v)\\ &=(u',v')+(u,v).\end{aligned}$$

iii) Existencia del elemento neutro

Es claro que $(u,v)+(0,0)=(u+0,v+0)=(u,v)$

Luego $(0,0)$ es el elemento neutro.

iv) existencia inverso de cada vector

Es claro que $(u,v)+(-u,-v)=(u+-u,v+-v)=(0,0)$

Luego $(-u,-v)$ es el elemento inverso del vector $(u,v)$

HEMOS DEMOSTRADO QUE $E\times E$ es grupo abeliano bajo la primera propiedad, ahora probamos que es espacio vectorial bajo la segunda propiedad

EV1) DISTRIBUTIVIDAD DE $\cdot$ c/R a la suma

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot(u,v) &= \big((\alpha+\beta)u, (\alpha+\beta)v\big)\\ &= (\alpha u+\beta u, \alpha v+\beta v)\\ &= (\alpha u, \alpha v)+(\beta u, \beta v)\\ &= \alpha\cdot(u,v)+\beta(u,v)\end{aligned}$$

EV2) DISTRIBUTIVIDAD DE $\cdot$ c/r a la suma.

$$\begin{aligned}\alpha[(u,v)+(u',v')] &= \alpha\cdot(u+u', v+v')\\ &= (\alpha[u+u'], \alpha[v+v'])\\ &= (\alpha u+\alpha u', \alpha v+\alpha v')\\ &= (\alpha u, \alpha v)+(\alpha u', \alpha v')\\ &= \alpha\cdot(u,v)+\alpha\cdot(u',v')\end{aligned}$$

EV3) $\alpha\cdot[\beta\cdot(u,v)] = \alpha\cdot(\beta u, \beta v) = (\alpha\beta u, \alpha\beta v) = (\alpha\beta)\cdot(u,v)$

EV4) $1\cdot(u,v) = (1\cdot u, 1\cdot v) = (u,v)$

COMO CUMPLE CON TODAS LAS PROPIEDADES, $E\times E$ ES UN ESPACIO VECTORIAL DE K CON LAS OPERACIONES definidas anteriormente.

b) PARA PROBAR QUE $\Delta$ y $\bar{\Delta}$ SON SUBESPACIOS DE $E\times E$ PROBAMOS QUE SON NO VACÍOS Y CERRADOS BAJO LA SUMA Y PRODUCTO POR ESCALAR.

SON NO VACÍOS YA QUE $(0,0)\in\Delta$ y $(0,0)\in\bar{\Delta}$, POR EJEMPLO.
LUEGO, si $(u,v), (u',v')\in\Delta$, entonces $u=v$ y $u'=v'$ luego $\alpha,\beta\in K$, se tendrá que $\alpha u+\beta u' = \alpha v+\beta v'$, es decir $(\alpha u+\beta u', \alpha v+\beta v')\in\Delta$, deduciendo que $\alpha\cdot(u,v)+\beta(u',v')\in\Delta$.

De forma análoga, si $(u,v),(u',v') \in \bar{\Delta}$ entonces $u=-v$ y $u'=-v'$
luego, $\forall \alpha,\beta \in K$ se tendrá que $\alpha u+\beta u' = -(\alpha v+\beta v') \in \bar{\Delta}$
es decir $(\alpha u+\beta u', \alpha v+\beta v') \in \bar{\Delta}$, de donde se deduce que
$\alpha\cdot(u,v)+\beta(u',v') \in \bar{\Delta}$.
Por lo tanto $\Delta$ y $\bar{\Delta}$ son s.e.v. de $E\times E$.

**P3** Sean $E, F$ e.v. sobre un cuerpo $K$. Sea $T$ una función $E \to F$ que satisface:
(1) $T(0_E)=0_F$, donde $0_E$ y $0_F$ son los neutros aditivos de cada e.v.
(2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in K \quad T(\alpha x)=\alpha T(x)$
(3) $\forall x,y \in E: T(x+y)=T(x)+T(y)$

Considere $T(E)=\{y\in F \mid y=T(x), x\in E\}$

a) Muestre que $T(E)$ es un s.e.v. de $F$.
Primero verificar que $T(E)$ no es vacío
como $0_E \in E \Rightarrow T(0_E)=0_F \in T(E) \Rightarrow T(E)\neq\emptyset$.
Ahora, siendo $\lambda_1,\lambda_2 \in K$, $y_1,y_2 \in T(E)$
PD: $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2 \in T(E) \iff \exists\, \bar{x}\in E$ tq $T(\bar{x})=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$.

como $y_1; y_2 \in T(E)$ $\exists\, x_1, x_2$ tq $T(x_1)=y_1 \wedge T(x_2)=y_2$.

$\Rightarrow \lambda_1 T(x_1)+\lambda_2 T(x_2) \Rightarrow$ por propiedad 2 $\Rightarrow$
$= T(\lambda_1 x_1)+T(\lambda_2 x_2)$ por propiedad 3
$= T(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$ luego $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 \in E$
y corresponden a la preimagen buscada

luego $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2 \in T(E)$, por lo tanto $T(E)$ es sev de $F$.

**P4]** SEAN $E$ UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $K$ y $V_1, V_2$ s.e.v. DE $E$.

a) DEMUESTRE QUE $V_1 \cap V_2$ ES s.e.v. de $E$.

b) MUESTRE CON UN EJEMPLO QUE $V_1 \cup V_2$ NO ES NECESARIAMENTE s.e.v. ~~de~~ $E$.

c) PRUEBE QUE $V_1 \cup V_2$ es s.e.v DE $E$ ssi $V_1 \subseteq V_2 \vee V_2 \subseteq V_1$

a) Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $x, y \in V_1 \cap V_2$

$\Rightarrow x, y \in V_1 \wedge x, y \in V_2.$

$\Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y \in V_1 \wedge \lambda_1 x + \lambda_2 y \in V_2$

$\Rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y \in V_1 \cap V_2.$

b) Sea $E = \mathbb{R}^2$, $V_1 = \langle \{(1,0)\} \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$

$V_2 = \langle \{0,1\} \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}.$

$\Rightarrow V_1 \cup V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \vee y = 0\}$

Luego $(1,0), (0,1) \in V_1 \cup V_2$ pero

$(1,1) = (1,0) + (0,1) \notin V_1 \cup V_2$

POR LO TANTO $V_1 \cup V_2$ NO ES s.e.v. DE $\mathbb{R}^2$.

c) $(\Leftarrow)$ Si $V_1 \subseteq V_2 \vee V_2 \subseteq V_1 \Rightarrow V_1 \cup V_2 = V_2 \vee V_1 \cup V_2 = V_1$

Como $V_1$ y $V_2$ son s.e.v de $E \Rightarrow V_1 \cup V_2$ es s.e.v. de $E$.

$(\Rightarrow)$ Supongamos, por contradicción que $V_1 \cup V_2$ es s.e.v. de $E$ y que $V_1 \not\subseteq V_2 \wedge V_2 \not\subseteq V_1$

$\Rightarrow \exists x \in V_1 \setminus V_2$, $\exists y \in V_2 / V_1$

$\Rightarrow x \in V_1$; $y \in V_2 \Rightarrow x, y \in V_1 \cup V_2 \Rightarrow x + y \in V_1 \cup V_2$

$\Rightarrow x+y \in V_1 \vee x+y \in V_2$

como $x \in V_1$, $y \in V_2$ y son s.e.v $\exists -x \in V_1 \wedge -y \in V_2$

luego $(x+y) - x \in V_1 \vee (x+y) - y \in V_2$

$\Rightarrow y \in V_1 \vee x \in V_2$ . $\divideontimes$

ya que $x \in V_1/V_2 \wedge y \in V_2/V_1$

LUEGO, NECESARIAMENTE $V_1 \subseteq V_2 \vee V_2 \subseteq V_1$ PARA QUE $V_1 \cup V_2$ SEA S.E.V. DE $E$.