ÁLVARO TELLO CRINO

AYUDANTÍA 7: MÉTRICA EN $\mathbb{R}^n$

CONTROL 1 2013

P1] CONSIDERE EN $\mathbb{R}^3$ LOS PUNTOS $F=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Y EL PLANO $\Pi: x+y=-2$

a) SI EN EL PUNTO F SE UBICA UN FOCO QUE ILUMINA LOS PUNTO A, B Y C, SE PIDE DETERMINAR LAS SOMBRAS A', B' Y C' DE TALES PUNTOS SOBRE EL PLANO Π. ES DECIR, DETERMINAR LA INTERSECCIÓN DE LAS RECTAS QUE PASAN POR LOS PUNTOS F-A, F-B, F-C Y EL PLANO Π.

b) ENCONTRAR LA ECUACIÓN VECTORIAL QUE PASA POR A' Y B'

c) DETERMINAR LA RECTA DE INTERSECCIÓN DEL PLANO Π CON EL PLANO QUE CONTIENE A LOS PUNTOS A, B Y C.

a) NECESITAMOS PARA CADA RECTA UN PUNTO Y UN VECTOR DIRECTOR, PARA CADA UNA DE ELLAS SE USA F DE PUNTO Y F-A, F-B, F-C COMO VECTORES, QUEDANDO

$$L_{FA}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\left[\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

PARA $A'=L_{FA}\cap\Pi$ REEMPLAZAMOS EN $x+y=-2 \Leftrightarrow 2+\lambda+2+2\lambda=-2$

OBTENIENDO $3\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{A'=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix}}$

ANÁLOGO PARA B. $L_{FB}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\left[\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B'=L_{FB}\cap\Pi \Rightarrow 2+2\lambda+2+\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow \boxed{B'=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}}$

PARA C OBTENEMOS $L_{FC}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\left[\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

$C'=L_{FC}\cap\Pi \Rightarrow 2+2\lambda+2+2\lambda=-2 \Rightarrow 4\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-3/2$

$\Rightarrow C'=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1/2\end{pmatrix}}$

b) PARA LA RECTA QUE PASA POR A' Y B' PODEMOS USAR A' COMO POSICIÓN Y $d = B' - A'$ COMO VECTOR DIRECTOR, OBTENIENDO $L_{A'B'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) PARA EL PLANO NECESITAMOS UN PUNTO Y DOS VECTORES, PUEDE SER EL PUNTO A Y LOS VECTORES $d_1 = B - A$ Y $d_2 = C - A$ COMO VECTORES DIRECTORES, OBTENIENDO

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \mu \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \right\} \Rightarrow x + y + z = 1$$

, POR LO TANTO LA ECUACIÓN DE LA RECTA DE LA INTERSECCIÓN DE AMBOS PLANOS VIENE DADA POR

$$L: \left\{ \begin{array}{l} x + y = -2 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 \end{array} \Rightarrow L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

CONTROL 1 AÑO 2005

P2 Se definen las rectas

$$L_1: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad y \quad L_2: \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que L_1 y L_2 no se intersectan

b) ENCUENTRE LA ECUACIÓN DEL PLANO Π QUE CONTIENE A LA RECTA L_1 Y ES PARALELO A L_2.

c) EL PUNTO $P = (3, 1, -1)^t$ PERTENECE A L_2. ENCUENTRE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE P SOBRE EL PLANO Π

d) ENCUENTRE LA ECUACIÓN DEL PLANO PARALELO A Π QUE ESTÁ A LA MISMA DISTANCIA DE L_1 Y L_2.

a) IGUALANDO LAS ECUACIONES VECTORIALES DE L1 Y L2 BUSCAMOS SI SU ECUACIÓN MATRICIAL TIENE SOLUCIÓN.

$$L_1 = L_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t - s \\ -2t + 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

como no existen s, t tal que resuelvan el sistema se concluye que las RECTAS L1 y L2 NO SE INTERSECTAN.

b) COMO π CONTIENE A L_1, EL VECTOR $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ SIRVE DE VECTOR DIRECTOR DE π, DEL HECHO QUE π DEBE SER PARALELO A L_2 DEBE CUMPLIRSE QUE PARA UNO DE LOS VECTORES DIRECTORES EXISTA $\lambda \in \mathbb{R}$ TAL QUE $d_2 = \lambda\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ POR LO TANTO BASTA CONSIDERAR AL SEGUNDO VECTOR DIRECTOR COMO $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

FALTA UN PUNTO, COMO $L_1 \in \pi$, SE PUEDE USAR $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ QUEDANDO

$$\pi = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ con } s, t \in \mathbb{R}.$$

ENCONTRAREMOS LA FORMA NORMAL, PARA ESO NECESITAMOS A N NORMAL A $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ Y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, RECORDANDO QUE $N = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ PARA $\pi = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D$

DEBE CUMPLIR $N = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ QUE

$$n_1 + 2n_2 - 2n_3 = 0$$
$$n_2 - 2n_3 = 0$$

ENTONCES $\underline{n_2 = 2n_3}$ y $n_1 = -2n_2 + 2n_3 = -2 \cdot 2n_3 + 2n_3 = \underline{-2n_3}$

OBTENIENDO

$$N = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ OTRA FORMA ES $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$

en efecto

$$N = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \hat{\imath}(-4+2) - \hat{\jmath}(-2) + \hat{k}(1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

LUEGO LA ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO ES $\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \pi: -2(x+1) + 2(y-2) + z - 1 = 0$$

c) LLAMAMOS P_0 A LA PROYECCIÓN DE $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ SOBRE π.
ENTONCES BUSCAMOS P_0 DE LA FORMA

$$P_0 = P + \lambda N = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

LUEGO $P_0 \in \pi$ SI CUMPLE QUE $\left\langle P_0 - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle + \lambda \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$= -8 - 2 - 2 + \lambda(4+4+1) = 0$$

$$-12 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{12}{9} = 4/3$$

ASÍ $P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 8/3 \\ 1 - 8/3 \\ -1 + 4/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) EL PLANO π_1 TIENE VECTOR NORMAL $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ Y DEBE PASAR POR EL PUNTO MEDIO ENTRE P y P_0,
POR LO TANTO, ESTE PUNTO VIENE DADO POR

$$\frac{1}{2}(P_0 + P) = \frac{1}{2}\left(P + \frac{4}{3}N + P\right) = P + \frac{2}{3}N$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 4/3 \\ 1 + 4/3 \\ -1 + 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

LUEGO LA ECUACIÓN DEL PLANO BUSCADO ES

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x - 5/3) + 2(y - 7/3) + (z + 1/3) = 0$$

P3/ CONTROL 1-2008

SEA $P=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ Y π_1 EL PLANO QUE PASA POR EL ORIGEN Y TIENE DIRECTORES $d_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ y $d_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

a) CALCULE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL R DE P SOBRE EL PLANO π_1

b) CALCULE LA ECUACIÓN DE LA RECTA L QUE SE OBTIENE DE LA INTERSECCIÓN DE π_1 CON EL PLANO π_2 DE ECUACIÓN $x+2y=2$

c) CALCULE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL DE R SOBRE LA RECTA L

d) CALCULE LA DISTANCIA DE P A L.

a) PRIMERO NECESITAMOS LA ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO.

$$\pi_1: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

CON LOS VECTORES DIRECTORES PODEMOS CALCULAR EL VECTOR NORMAL AL PLANO

$$n=d_1\times d_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-1&2&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1\\-1&0\end{vmatrix}\hat{\imath}-\begin{vmatrix}-1&1\\1&0\end{vmatrix}\hat{\jmath}+\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}\hat{k}$$

$$n=\hat{\imath}+\hat{\jmath}-\hat{k}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

AHORA PARA LA PROYECCIÓN

$$R=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2}$$

CON $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2=\left(\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}\right)^2=3.$

$$\left\langle\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle=3-2+2=3$$

$$\Rightarrow R=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}+\frac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}}$$

b) PARA LA RECTA, NECESITAMOS LA ECUACIÓN CARTESIANA DE Π_1.
DE MODO QUE

$$\Pi_2: \left\langle \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \Rightarrow \Pi_2: x+2+y-3-z+1=0$$

$$\Pi_2 = x+y-z=0$$

POR LO TANTO

$$L: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2y=2. \end{cases}$$

PARA ENCONTRAR LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA DEFINIMOS $y=t$, $t\in\mathbb{R}$ Y DESPEJAMOS x y z en función de y

$$L: \begin{cases} x = 2-2y = 2-2t \\ z = x+y = 2-2t+t = 2-t \\ y = t \end{cases}$$

OBTENIENDO

$$\underline{L = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

c) PARA CALCULAR LA PROYECCIÓN P_0 SOBRE L, TOMAMOS EL VECTOR $\hat{x}$ COMO UN VECTOR DIRECTOR DE L

$$\hat{x} = \frac{(2,-1,1)^t}{\|(2,-1,1)^t\|} = \frac{(2,-1,1)^t}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

AHORA LA PROYECCIÓN DE P_0 SOBRE L.

$$R = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix}-4\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \frac{-12}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

d) PARA CALCULAR LA DISTANCIA DEBEMOS CALCULAR LA PROYECCIÓN DE P SOBRE LA RECTA L.

$$P_L = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\cdot\left\langle \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\left\langle \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$$

FINALMENTE CALCULAMOS LA DISTANCIA ENTRE P y P_L, $d(P,P_L) = \|P-P_L\| = \left\|\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\|$