AYUDANTÍA 6: RECTAS Y PLANOS EN $\mathbb{R}^n$

ALVARO TELLO CRINO.

P1 a) EN $\mathbb{R}^3$ CONSIDERE LAS RECTAS.

$$L_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \; t \in \mathbb{R} \;\wedge\; L_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \; s \in \mathbb{R}.$$

DEMUESTRE QUE L_1 Y L_2 SE INTERSECTAN Y ENCUENTRE LA INTERSECCIÓN

b) SEAN $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ ENCUENTRE LA RECTA QUE PASA POR P y Q y EXPRESELA DE FORMA CARTESIANA.

c) CONSIDERE LA RECTA $L: \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y=2 \end{array}$ EXPRESELA DE FORMA PARAMÉTRICA.

SOL:

a) QUEREMOS ENCONTRAR t y s TAL QUE:

$$\begin{bmatrix} t \\ 5-3t \\ 1+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2s \\ 2+4s \\ 3+s \end{bmatrix}$$

EN TERMINOS MATRICIALES QUEDA.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{13}(-2)]{E_{12}(3)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

OBTENIENDO $s=0$ y $t=1$

POR LO TANTO EL PUNTO DE INTERSECCIÓN ES

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $L: R + s\cdot\vec{d} \Rightarrow R = P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in L$, ambos sirven, AHORA $\vec{d} = Q - P$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$ es vector director, por lo tanto

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2-2s \\ z = 3+5s \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x=1 \\ \frac{2-y}{2} = \frac{z-3}{5} \end{array} \Rightarrow L: \begin{array}{l} x=1 \\ -3y+2z=0 \end{array}$$

c)

$$L: \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y=2 \end{array}\right| \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

Sea $x=t \Rightarrow$ de (2) $y=2-2t$

de (1) $z=1-t-2+2t=-1+t$.

Así $x=t$

$y=2-2t \Rightarrow L=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

$z=-1+t$

P2

a) Sea $\pi:\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ exprésela en forma cartesiana

b) Sean $L_1=\begin{pmatrix}0\\8\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$ y $L_2=\begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ verifique que son paralelas y encuentre el plano que definen.

c) Sean $P=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$ y $R=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ verifique que estos puntos no son colineales y obtenga el plano que definen en forma paramétrica.

d) Sea $8x+9y+z=-5$ un plano, expréselo de forma paramétrica.

a) $\left.\begin{array}{l} x=5+3s+2t \\ y=-1+2s+2t \\ z=4s+t \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=6+s \\ y-2z=-1-7s \end{array}\right| \Rightarrow 7x-6y-2z=41$

b) $\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ como existe λ tal que $v_1 = \lambda v_2 \Rightarrow L_1 \parallel L_2$.

$\Pi = p + t d_1 + s d_2$, pero como $\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$ es paralelo a $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ no puede ser ambos vector director, entonces.

$P = \begin{pmatrix}0\\8\\-3\end{pmatrix} \in \Pi$, $d_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ director de Π.

$d_2 = \begin{pmatrix}5\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\8\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}5\\-5\\3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} \Rightarrow$ es director y $L_1 \neq 2$.

$\therefore L_1$ y L_2 definen el plano

$\Pi = \begin{pmatrix}0\\8\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\-3\\-0\end{pmatrix} \pm t\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 + 2 \quad -3t \\ z = -3 + 3s + 5t \end{cases}$

c) $Q - P = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} = d_1$ como $d_1 \not\parallel d_2 \Rightarrow P, Q, R$ no son colineales y definen un plano $\Pi: p + t d_1 + s d_2$

$R - P = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = d_2$

$\Pi: \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t - 2s \\ y = 1 + t + s \\ z = 4 - t \end{cases}$

d) $8x + 9y = -5$

sea $x = t$, $y = s \Rightarrow z = -5 - 8t - 9s$

$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -5 - 8t - 9s \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\-9\end{pmatrix}$

P3) CONSIDERE $\pi_1 = 2x - 3y + 2z = 5$. DADAS LAS RECTAS L_1 Y L_2 DEFINIDAS POR

$$L_1: \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \quad y \quad L_2: \begin{cases} 3x + y + 4 = 0 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$$

a) VERIFIQUE QUE L_1 Y L_2 SON PARALELAS Y DISTINTAS Y ENCUENTRE LA ECUACIÓN VECTORIAL Y CARTESIANA DEL PLANO π_2 QUE LAS CONTIENE.

b) ENCUENTRE LA ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA L QUE SE OBTIENE COMO LA INTERSECCIÓN DE LOS PLANOS π_1 Y π_2 ($L = \pi_1 \cap \pi_2$)

c) ENCUENTRE EL PUNTO S DE INTERSECCIÓN DE LAS RECTAS L_1 Y L Y VERIFIQUE QUE S SATISFACE LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PLANO π_1

a) el vector director de L_1 ES $d_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ PARA L_2 TOMAREMOS DOS PUNTOS DE LA RECTA, POR EJEMPLO $T_1 = \begin{pmatrix}0\\-4\\-5\end{pmatrix} \in L_2$ y $T_2 = \begin{pmatrix}1\\-7\\-5\end{pmatrix} \in L_2$. ASÍ UN VECTOR DIRECTOR DE L_2 SERÁ $d_2 = T_2 - T_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$. Y COMO $d_2 = d_1$ SE PUEDE DECIR QUE $L_1 // L_2$, Y, POR EJEMPLO $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in L_1$ PERO $\notin L_2$, POR LO TANTO $L_1 // L_2$ SON PARALELAS Y DISTINTAS.

PARA ENCONTRAR EL PLANO PODEMOS ESCRIBIRLO USANDO $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in L_1$ COMO POSICIÓN, $d_1 = \begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ DIRECTOR DEL PARALELISMO Y OTRO VECTOR DIRECTOR ENTRE LAS RECTAS, POR EJEMPLO $M = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \in L_1$ Y $T_1 = \begin{pmatrix}0\\-4\\-5\end{pmatrix} \in L_2$

Así el vector director $d_2 = T_1 - M = \begin{pmatrix}0\\-4\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-6\end{pmatrix}$ ó $d_2 \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}$

ENTONCES LA ECUACIÓN VECTORIAL O PARAMÉTRICA DE π_2 QUEDA

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = M + s\,d_1 + t\,d_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} \quad ó \quad \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = -1 - 3s + 3t \\ z = 1 + 6t \end{cases}$$

DE DONDE ELIMINANDO s y t: $3x+y=2+6t=2+z-1$, POR LO TANTO LA ECUACIÓN CARTESIANA ES $\pi_2 = 3x+y-z=1$.

b) PARA $L=\pi_1 \cap \pi_2$ BASTA ENCONTRAR DOS PUNTOS COMUNES A AMBOS PLANOS, $3x+y-z-1 = 2x-3y+2z-5$

$$x+4y-3z=-4$$

POR EJEMPLO $A=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0\\-7\\-8\end{pmatrix}$

ASÍ LA RECTA COMÚN A AMBOS PLANOS POR A (POSICIÓN) y VECTOR d (DIRECCIÓN) $d=A-B$ SERÁ

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+t\left[\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-7\\-8\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\8\\11\end{pmatrix}$$

c) PARA $S=L_1\cap L$, $L_1: \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ y $L: \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\8\\11\end{pmatrix}$

EL PUNTO EN COMÚN DEBE CUMPLIR

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\8\\11\end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{cases}\lambda-u=0\\-3\lambda-8u=2\\-11u=2.\end{cases}$$

De inmediato se ve que $\lambda=u=-2/11$ es solución, de modo

$$L_1\cap L=S=\begin{pmatrix}1-2/11\\-1+6/11\\1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9/11\\-5/11\\1\end{pmatrix}$$

y se verifica para $\pi_1 = 2x-3y+2z=5$

$$18/11+15/11+2=5.$$

P4) SEA $\Pi_1 = 5x+3y-2z=1$; $L_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$
CON $a \in \mathbb{R}$.

a) SEAN L_2 LA RECTA PARALELA A L_1 QUE PASA POR P y L_3 LA RECTA QUE PASA POR P y Q. CONSIDERE Π_2 el plano que contiene A L_1 y L_2.

b) CALCULE a de modo que L_1 y L_3 se INTERSECTEN EN UN PUNTO LLAME $S = L_1 \cap L_3$.

c) OBTENGA a M, LA RECTA PARALELA A $\Pi_1 \cap \Pi_2$ QUE PASA POR S.

a) $L_2 = P + t\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$

$L_3 = P + t(P-Q) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$

$\Pi_2 = P + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\a-1\end{pmatrix}$

b) $L_1 \cap L_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\a\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$

$s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1-a\end{pmatrix}$

HAY QUE RESOLVER $\begin{bmatrix}-1 & -4\\2 & -1\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1-a\end{pmatrix}$

$\left[\begin{array}{cc|c}-1 & -4 & 0\\2 & -1 & -1\\3 & 3 & 1-a\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-1 & -4 & 0\\0 & -9 & -1\\0 & -9 & 1-a\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c}-1 & -4 & 0\\0 & -9 & -1\\0 & 0 & 2-a\end{array}\right]$

LUEGO $L_1 \cap L_3$ Si y SOLO Si $a = 2$

VOLVIENDO AL SISTEMA PODEMOS DESPEJAR $-9t=-1 \Rightarrow t=1/9$

REEMPLAZANDO EN L_1: $S=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow S=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}13\\10\\6\end{pmatrix}$

LUEGO $\Pi_2: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

C) NECESITAMOS $\Pi_1 \cap \Pi_2 = L_4$

DESPEJANDO $\Pi_1 \Rightarrow z_1=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}y$

SI $x=u$ E $y=v$

$$\Pi_1: \left.\begin{aligned} x&=u\\ y&=v\\ z&=1/2+\frac{5}{2}u+3/2\,v\end{aligned}\right\} \Pi_1: \begin{pmatrix}0\\0\\-1/2\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\1\\3/2\end{pmatrix}$$

LUEGO $\Pi_1 \cap \Pi_2 \Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\-1/2\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\0\\5/2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\1\\3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u\begin{pmatrix}1\\0\\5/2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\1\\3/2\end{pmatrix}-s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}-t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\-1/2\end{pmatrix}$$

DEBEMOS RESOLVER

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\5/2&3/2&3&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\s\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3/2\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&1\\0&1&2&1&1\\5/2&3/2&3&1&3/2\end{array}\right]\rightsquigarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&1\\0&1&-2&-1&1\\0&3&-11&-2&-2\end{array}\right]\rightsquigarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&1\\0&1&-2&-1&1\\0&0&-5&1&-5\end{array}\right]\Rightarrow \begin{aligned}u+s&=1\\v-2s-t&=1\\-5s+t&=-5\end{aligned}$$

$\Rightarrow -5s+t=-5 \Rightarrow t=-5+5s$

REEMPLAZANDO EN π_2:

$$L_4: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + (-5+5s)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$L_4: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1\\-4\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\7\\8\end{pmatrix} = L_4$$

FINALMENTE $M = S + t\vec{d}$

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}13\\10\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\7\\8\end{pmatrix}$$