

AUXILIAR 5: MATRICES INVERSAS Y RECTAS EN EL ESPACIO.

ÁLVARO TELLO CRINO.

P1) SEA $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & \alpha \end{pmatrix}$ ENCUENTRE PARA QUE VALORES DE α A ES INVERTIBLE, ENCUENTRE LA DESCOMPOSICIÓN LDU DE A.

BASTA PIVOTEAR LA MATRIZ (A|I) Y AL DIAGONALIZAR EXIGIR QUE NINGÚN $\tilde{a}_{ii}$ SEA CERO. EN EFECTO.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 7 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & -3 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{44}(1/2)]{E_{43}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 7 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 2 & -6 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -5/2 & \alpha+2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[E_{24}(-1/2)]{E_{23}(13)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 7 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -20 & -2 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 & \alpha-26 & 1/2 & -7/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{34}(5/2)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 7 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -20 & -2 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-26 & -9/2 & 22 & 5/2 & 1 \end{array} \right)$$

PARA QUE SEA INVERTIBLE $\alpha - 26 \neq 0$, POR LO TANTO SON TODOS LOS REALES MENOS EL NÚMERO 26. $\mathbb{R} - \{26\}$

AHORA NOTAR QUE TENEMOS LA MATRIZ L^{-1} TAL QUE

$$L^{-1} = E_{23}(-2) \cdot E_{24}(1/2) \cdot E_{23}(13) \cdot E_{24}(-7/2) \cdot E_{34}(5/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 13 & 1 & 0 \\ -1/2 & 22 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

AHORA, RECORDANDO QUE $L = E_{23}^{-1}(-2) \cdot E_{24}^{-1}(1/2) \cdot E_{23}^{-1}(13) \cdot E_{24}^{-1}(-7/2) \cdot E_{34}^{-1}(5/2)$

$$L = E_{23}(2) \cdot E_{24}(-1/2) \cdot E_{23}(-13) \cdot E_{24}(7/2) \cdot E_{34}(-5/2)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -13 & 1 & 0 \\ 1/2 & -22 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

LUEGO PARA LA DESCOMPOSICIÓN $A = LU$ NOS QUEDA:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -13 & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & 22 & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{pmatrix}$$

SI QUEREMOS $A = LDU$ BASTA DESPEJAR LA DIAGONAL DE LA FORMA SIEMPRE QUE $\alpha \neq 55$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P2 CONSIDERE LAS MATRICES $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Y $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Y $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) PROBAR QUE P ES INVERTIBLE Y ENCONTRE P^{-1}

b) PROBAR QUE $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ Y ENCONTRE A^{10}

a) PARA VER QUE P ES INVERTIBLE SE CALCULA LA INVERSA PIVOTEANDO (PII)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{I_{22}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{33}(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

COMO TODOS LOS PIVOTES DE P SON DISTINTOS DE CERO P ES INVERTIBLE Y

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b) AHORA.

$$P \cdot D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P \cdot D \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

PARA CALCULAR A^0 NOTEMOS QUE

$$A^2 = A \cdot A = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^2 \cdot P^{-1}$$

$$\text{Y ASÍ } A^3 = A \cdot A \cdot A = P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^3 \cdot P^{-1}$$

$$\text{POR LO TANTO } A^{10} = P \cdot D^{10} \cdot P^{-1}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2^{10} \\ 1 & 0 & 2^{10} \\ -1 & -1 & 2^{10} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{3} \right) \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3} \right) \begin{bmatrix} 2+2^{10} & 2^{10}-1 & 2^{10}-1 \\ 2^{10}-1 & 2+2^{10} & 2^{10}-1 \\ 2^{10}-1 & 2^{10}-1 & 2+2^{10} \end{bmatrix}$$

P3 a) DEMUESTRE QUE SI A ADMITE LA DESCOMPOSICIÓN LDU ENTONCES ESTA ES ÚNICA

b) DEMUESTRE ADEMÁS SI A ES SIMÉTRICA, ENTONCES $L = U^t$

c) ENCUENTRE LA DESCOMPOSICIÓN LDU DE $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

a) SUPONGAMOS QUE A TIENE DOS FACTORIZACIONES DISTINTAS $L_1 D_1 U_1$ Y $L_2 D_2 U_2$. POR LO TANTO.

$$A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2 \quad / L_2^{-1} \quad / \cdot U_1^{-1}$$

$$L_2^{-1} L_1 D_1 = D_2 U_2 U_1^{-1}$$

PERO $L_2^{-1} L_1$ ES TRIANGULAR INFERIOR CON 1'S EN LA DIAGONAL
POR LO TANTO $L_2^{-1} L_1 D_1$ ES TRIANGULAR INFERIOR & ANALOGAMENTE
 $D_2 U_2 U_1^{-1}$ ES TRIANGULAR SUPERIOR.

COMO SON IGUALES AMBAS DEBEN SER TRIANGULAR SUPERIOR
E INFERIOR AL MISMO TIEMPO, POR LO TANTO DEBEN SER
DIAGONALES.

COMO $L_2^{-1} L_1$ TIENEN 1'S EN LA DIAGONAL $L_2^{-1} L_1 D_1$ TIENE
LA DIAGONAL IGUAL A D_1 Y ANALOGAMENTE CON $U_2 U_1^{-1} D_2$
POR LO TANTO $D_1 = D_2$, Y COMO D_1 Y D_2 SON INVERTIBLES.

$$L_2^{-1} L_1 = D_1^{-1} D_2 U_2 U_1^{-1} = I$$

POR LO TANTO L_2^{-1} ES LA INVERSA DE L_1 , CONCLUYENDO
QUE $L_2 = L_1$ NECESARIAMENTE. LUEGO DEL MISMO MODO $U_1 = U_2$.
CONCLUYENDO QUE SI A SE PUEDE DESCOMPONER DE LA FORMA $L D U$
ESTA ES ÚNICA.

b) AHORA, SI A ES SIMÉTRICO. $A^t = A$, POR LO TANTO

$$A = L D U \Rightarrow A^t = (L D U)^t = (U)^t (L D)^t = U^t D^t L^t = L D U = A$$

COMO D ES DIAGONAL $D^t = D$, ENTONCES $U^t D L^t = L D U$
Y COMO ESTA DESCOMPOSICIÓN ES ÚNICA. $U^t = L$.

c) PROPUESTO

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$