AYUDANTÍA 4: SISTEMAS LINEALES

ÁLVARO TELLO CRIMO.

P1 CONSIDERE LA MATRIZ $A \in M_{33}(\mathbb{R})$, CON $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. DEMUESTRE QUE SI LA ECUACIÓN $Ax=0$ TIENE SOLUCIÓN ÚNICA, ENTONCES $(a\neq b)\wedge(b\neq c)\wedge(c\neq a)$

ESCALONANDO LA MATRIZ AUMENTADA $(A|0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & c \\ a^2 & b^2 & c^2 & c^2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{13}(-a^2)]{E_{12}(-a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E(-(b+a))} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & 0 \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(a+b) & 0 \end{array}\right)$$

POR LO TANTO, PARA QUE TENGA SOLUCIÓN ÚNICA DEBE CUMPLIRSE

$$(b-a)\neq 0 \wedge c^2-a^2-(c-a)(a+b)\neq 0$$
$$(b-a)\neq 0 \wedge (c-a)(c+a-a-b)\neq 0$$
$$(b-a)\neq 0 \wedge (c-a)(c-b)\neq 0$$

ES DECIR $(b-a)\neq 0 \wedge (c-a)\neq 0 \wedge (c-b)\neq 0$

$$(b\neq a)\wedge(c\neq a)\wedge(c\neq b)$$

P2 a) MUESTRE QUE LA MATRIZ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ TIENE INFINITAS INVERSAS POR LA DERECHA. MUESTRE ADEMÁS QUE NO TIENE INVERSA POR LA IZQUIERDA.

b) DEMUESTRE QUE SI LA SUMA DE LOS ELEMENTOS EN CADA FILA DE UNA MATRIZ ES INVERTIBLE ES K, ENTONCES LA SUMA DE LOS ELEMENTOS EN CADA FILA DE LA INVERSA ES 1/K.

a) BUSCAMOS UNA MATRIZ TAL QUE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBTENEMOS EL SIGUIENTE SISTEMA DE ECUACIONES.

$$m+r=1$$
$$n+s=0$$
$$p=0$$
$$q=1$$

SE OBSERVA QUE EL SISTEMA TIENE INFINITAS SOLUCIONES, YA QUE POSEE MÁS INCÓGNITAS QUE ECUACIONES. POR LO TANTO TIENE INFINITAS INVERSAS.

DE MANERA ANÁLOGA, POR LA IZQUIERDA TENEMOS EL SIGUIENTE SISTEMA DE ECUACIONES

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a & b & a \\ c & d & c \\ e & f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=1 & c=0 \\ b=0 & e=0 \\ a=0 & f=0 \\ c=0 & e=1 \\ d=1 & \end{matrix}$$

EL CUAL ES UN SISTEMA INCONSISTENTE, POR LO TANTO NO EXISTE SOLUCIÓN POR LA IZQUIERDA, LUEGO, NO ES INVERTIBLE POR LA IZQUIERDA.

b) SEA $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ LA MATRIZ CON LA PROPIEDAD MENCIONADA, Y $B \in M_{nn}(\mathbb{R})$, SU INVERSA. ENTONCES TENEMOS QUE PARA LA FILA m-ÉSIMA.

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{mi} \quad \text{def de multiplicación}$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{mj}A_{ji} = \sum_{j=1}^{n} B_{mj} \sum_{i=1}^{n} A_{ji} = \sum_{j=1}^{n} B_{mj} \cdot K = K \sum_{j=1}^{n} B_{mj}$$

EN DONDE SE CONCLUYE QUE $\sum_{j=1}^{n} B_{mj} = 1/K$ PARA CUALQUIER m DE B.

P3] **a)** DETERMINAR SI EXISTE UNA MATRIZ $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ DE MODO TAL QUE PARA TODA MATRIZ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ SE CUMPLA

$$M \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}$$

JUSTIFIQUE YA SEA ENCONTRANDO M O POR EL CONTRARIO PROBANDO QUE NO EXISTE.

b) PRUEBE QUE SI $A \in M_{n,n}\mathbb{R}$ VERIFICA $A^2 + A + I = 0$ ENTONCES ES INVERTIBLE.

a) ESCRIBAMOS M DE LA FORMA $M=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

AL MULTIPLICAR OBTENEMOS

$$M\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+yc & xb+yd \\ za+wc & zb+wd \end{bmatrix}$$

OBTENIENDO EL SIGUIENTE SISTEMA DE ECUACIONES QUE SE DEBEN CUMPLIR $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

(1) $ax+yc=a$

(2) $xb+yd=b$

(3) $za+wc=a+c$

(4) $zb+wd=d$

QUEDAMOS CON LA SIGUIENTE MATRIZ EXTENDIDA.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & c & 0 & 0 & a \\ b & d & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & d & d \\ 0 & 0 & a & c & a+c \end{array}\right) \xrightarrow[E_{34}\left(-\frac{a}{b}\right)]{E_{12}\left(-\frac{b}{a}\right)} \left(\begin{array}{cccc|c} a & c & 0 & 0 & a \\ 0 & \frac{da-bc}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d & d \\ 0 & 0 & 0 & \frac{cb-da}{b} & \frac{(a+c)b-da}{b} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a & c & 0 & 0 & a \\ 0 & \frac{da-bc}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d & d \\ 0 & 0 & 0 & cb-da & (a+c)b-da \end{array}\right)$$

VIENDO LA ÚLTIMA FILA, VOLVIENDO AL SISTEMA DE ECUACIONES QUEDA

$$(cb-da)\,w = (a+c)b-da$$

$$w = \frac{(a+c)b-da}{(cb-da)}$$

DE LO CUAL VEMOS UNA RESTRICCIÓN, EN EL CASO QUE $cb-da=0$ w SE INDETERMINA Y LA MATRIZ NO TIENE SOLUCIÓN, LO CUAL CONTRADICE EL ENUNCIADO QUE DICE QUE EXISTE M PARA TODA MATRIZ $2,2$ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ PARA TODO $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, COMO NO EXISTE CUANDO $cb=da$, LA MATRIZ M NO EXISTE.

b) TENEMOS DOS FORMAS DE PROBARLO

1ª MOSTRANDO QUE EXISTE $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ TAL QUE $A \cdot B = B \cdot A = I$

EN EFECTO SI

$$A^2 + A + I = 0$$
$$A^2 + A = -I$$
$$A(A+I) = -I$$
$$-A(A+I) = I$$
$$A(-A-I) = I \quad \text{DENOMINANDO } B = (-A-I)$$
$$A \cdot B = I$$

ESTO TAMBIEN SE PUEDE ESCRIBIR DE LA FORMA

$$-A^2 - A = I$$
$$(-A-I)A = I \quad \text{NUEVAMENTE } B = (-A-I)$$
$$B \cdot A = I$$

POR LO TANTO A ES INVERTIBLE.

2ª FORMA.

HIPÓTESIS, LA MATRIZ A CUMPLE $Ax = 0$

POR DEMOSTRAR QUE LO CUMPLE SI Y SOLO SI $x = 0$

EN EFECTO, SABEMOS QUE A CUMPLE:

$$A^2 + A + I = 0 \quad / \cdot x$$
$$A^2 x + Ax + x = 0$$
$$A(Ax) + Ax + x = 0 \quad \text{AHORA, POR HIPÓTESIS } Ax = 0.$$
$$A \cdot 0 + 0 + x = 0 \Rightarrow x = 0$$

POR LO TANTO, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, SIENDO LA ÚNICA SOLUCIÓN POSIBLE

ENTONCES A ES INVERTIBLE.

a iii) 0.5 por escalonar

0.5 por las condiciones

1.0 por el conjunto solución. No es necesario escribirlo como se hizo en la pauta, mientras esté correcto.

b) 0.2 por la matriz aumentada con la indentidad

1.8 por el resto

OBSERVACION: En ai) aii) y aiii) es necesario realizar previamente el escalonamiento de la matriz aumentada. Los 0.5 ptos. de cada parte suman 1.5 ptos que se asignan globalmente a la parte del escalonamiento. Luego en cada una de estas partes se asigna 0.5 por reconocer y encontrar correctamente las condiciones sobre α, β.

En las partes que requieran escalonamiento se debiera dar más importancia a el saber cómo funciona el método, que a la correctitud de las operaciones algebraicas en cada paso.

P2.- **a)** (2 ptos.) Determine si existe una matriz $M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ de modo tal que para toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se cumpla

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}.$$

Justifique ya sea encontrando M o por el contrario probando que no existe.

b) (1 pto.) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica $A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

c) Suponga que A y $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ conmutan, es decir

$$AB = BA.$$

Pruebe que

i) (1 pto.) $A^n B = BA^n \ \forall n \in \mathbb{N}$,

ii) (1 pto.) $A^t B^t = B^t A^t$, y

iii) (1 pto.) si además A y B son invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Pauta. **a)** Escribamos M de la forma

$$M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

y tratemos de encontrar sus coeficientes x, y, z, w. Tenemos

$$M \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+yc & xb+yd \\ za+wc & zb+wd \end{bmatrix}$$

por lo que

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

es equivalente a que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se cumplan las siguientes ecuaciones

(1) $\quad ax + yc = a$

(2) $\quad xk + yd = b$

(3) $\quad za + wc = a + c$

(4) $\quad zb + wd = d$

Entonces:

- eligiendo $a = 0, c = 1$ en (1) deducimos que $y = 0$,
- eligiendo $a = 1, c = 0$ en (1) deducimos que $x = 1$
- eligiendo $a = 0, c = 1$ en (3) deducimos que $w = 1$
- eligiendo $a = 1, c = 0$ en (3) deducimos $z = 1$.

Pero entonces (4) queda $b + d = d \quad \forall b, d$ lo que es imposible.
LA matriz NO existe
VARIANTE DE LO ANTERIOR: El argumento anterior es equivalente a plantear lo siguiente. Si existiese la matriz M, utilizando $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se deduce que M debe cumplir

$$MI = I$$

y por lo tanto $M = I$. Pero entonces tendríamos

$$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & d \end{bmatrix}$$

para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, lo que no es posible (basta considerar $a = 1$, $c = 1$ por ejemplo).

b) PRIMERA FORMA: Partimos de la información

$$A^2 + A + I = 0.$$

Luego, restando I en ambos lados
$$A^2 + A = -I.$$

Esto se puede escribir
$$A(A + I) = -I \iff A(-A - I) = I$$

y también
$$(A + I)A = -I \iff (-A - I)A = I.$$

Esto muestra que A es invertible.
SEGUNDA FORMA: Podemos utilizar el resultado que afirma que si una matriz cuadrada A tiene la propiedad
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (Ax = 0 \Longrightarrow x = 0)$$

entonces A es invertible. Veamos que la matriz A del enunciado cumple lo anterior. Multiplicando la ecuación matricial por $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$A^2x + Ax + x = 0 \qquad \iff \qquad AAx + Ax + x = 0.$$

Como $Ax = 0$ deducimos que $x = 0$. Luego A es invertible.

c) i)

$$\begin{aligned} A^n \cdot B &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ veces}} \cdot B = A \cdot \ldots \cdot A \cdot B \cdot A \\ &= A \cdot \ldots \cdot A \cdot B \cdot A \cdot A \\ &\vdots \\ &= B \cdot A \cdot \ldots \cdot A \\ &= B \cdot A^n \end{aligned}$$

ii) $A^tB^t = (BA)^t = (AB)^t = B^tA^t$
iii) $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Puntaje. a) Se sugiere que el puntaje sea asignado de la siguiente forma:
0.5 puntos por la idea de plantear el problema como el buscar M o sus coeficiente x, y, z, w de la matriz M
0.5 por identificar condiciones necesarias sobre estos coeficientes, o M (como se planteó en la variante)
1.0 por llegar correctamente a la conclusión.

b) 1.0 pto.

P4| a) DEMUESTRE QUE SI UNA MATRIZ CUADRADA VERIFICA $A^k = I$. PARA ALGÚN NATURAL $k \geq 1$, ENTONCES A ES INVERTIBLE

b) ENCUENTRE TODAS LAS MATRICES DE LA FORMA $A = \begin{bmatrix} x & z \\ 0 & y \end{bmatrix}$ QUE CUMPLEN $A^2 = I$, EN DONDE x, y, z SON NÚMEROS REALES e I LA MATRIZ IDENTIDAD.

Sol:

a) SUPONGAMOS QUE $A^n = I$, DEBEMOS PROBAR QUE SI $Ax = 0$, LA ÚNICA SOLUCIÓN POSIBLE ES QUE $x = 0$.
VEAMOS, SI $Ax = 0$, $A^2x = 0$, SUPONGAMOS QUE PARA UN K CUALQUIERA SE CUMPLE $A^k x = 0$, AHORA PARA A^{k+1} TENEMOS $A^{k+1}x = A(A^k x) = A \cdot 0 = 0$. POR LO TANTO SE CUMPLE, PARA TODO $k \in \mathbb{N}$ QUE $A^k x = 0$, POR MÉTODO INDUCTIVO.
AHORA, SI $k = n$ TENEMOS $A^n x = 0 \Rightarrow Ix = 0 \Rightarrow x = 0$
Y ~~COMO~~ COMO EL PROCEDIMIENTO ES SEMEJANTE PARA TODO $n \in \mathbb{N}$, PODEMOS DECIR QUE $x = 0$ ES LA ÚNICA SOLUCIÓN DEL SISTEMA $A^n x = 0$, POR LO TANTO A ES INVERTIBLE.

b) PROPUESTO... DIVIERTANSE!