

AYUDANTIA 3: MATRICES ELEMENTALES Y SISTEMAS LINEALES

A LVARO TELLO CRINO.

P1) CONSIDERE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2 \sin \alpha - \cos \beta + 3 \tan \gamma = 3$$

$$4 \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2 \tan \gamma = 10$$

$$6 \sin \alpha - 3 \cos \beta - \tan \gamma = 9$$

ESCRIBA CADA UNO DE FORMA MATRICIAL ($Ax=b$), LUEGO, DE SER POSIBLE, RESUELVA EL SISTEMA ESCALONANDO LA MATRIZ AUMENTADA.

P2) CONSIDERE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

$$\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha x_3 = 0 \quad \alpha x_1 - \alpha x_2 - \beta x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad \alpha x_2 + x_3 + \beta x_4 = \alpha$$

$$\beta x_1 + \beta x_2 + (\alpha + \beta)x_3 = 0 \quad \beta x_3 - \beta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = \beta$$

$$\alpha x_1 + \beta x_3 = 0$$

DONDE x_1, x_2, x_3 Y x_4 SON INCÓGNITAS Y α, β VALORES FIJOS.

DETERMINE α Y β DE TAL MANERA QUE EL SISTEMA TENGA INFINITAS, SOLO UNA, O NINGUNA SOLUCIÓN.

P3) CONSIDERE LA MATRIZ $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$, tal que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, SUPONGA ADICIONALMENTE QUE $a \cdot d - bc \neq 0$.

a) MUESTRE QUE LA MATRIZ A ES INVERTIBLE Y ENCUENTRE DE MANERA EXPLÍCITA A^{-1} .

b) USE LO ANTERIOR PARA RESOLVER EL SIGUIENTE SISTEMA $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

c) MUESTRE QUE A ES INVERTIBLE SI Y SOLO SI $a \cdot d - bc \neq 0$.

P4) CONSIDERE LOS VECTORES $u, v \in M_{n,n}(\mathbb{R}) / \{0\}$. SE DEFINE LA MATRIZ $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ POR $A = uv^T$.

a) PUEDE QUE $\forall x \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $Ax = 0 \Leftrightarrow v^T x = 0$?

b) ENCUENTRE EL NÚMERO DE VARIABLES LIBRES EN LA RESOLUCIÓN DEL SISTEMA $Ax = 0$.

¿ES A INVERTIBLE?

PA) a) $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
 $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2$
 $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

FORMA MATRICIAL $AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

MATRIZ AUMENTADA (A/b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{I_{13}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{E(-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-1/2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ -2x_2 + 9x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_3 = 1 \\ -2x_2 + 9 = -3 \Rightarrow x_2 = 6 \\ x_1 + 6 - 1 = -1 \Rightarrow x_1 = -4 \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $2\sin\alpha - \cos\beta + 3\tan\gamma = 3$
 $4\sin\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 10$
 $6\sin\alpha - 3\cos\beta - \tan\gamma = 9$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\beta \\ \tan\gamma \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

FORMA MATRICIAL $AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\beta \\ \tan\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$

MATRIZ AUMENTADA (A/b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \\ 6 & -3 & -1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}(-3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{E_2(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\beta \\ \tan\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = 2; \cos\beta = 1; \tan\gamma = 0$$

CONCLUIAMOS QUE EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN, YA QUE NO EXISTE α tal que $\sin\alpha = 2$.

P2

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\beta x_1 + \beta x_2 + (\alpha + \beta)x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta & \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Forma extendida $\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta & \beta & \alpha + \beta & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{I_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha + \beta & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_2(-\alpha)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta - \alpha & -\alpha & -\alpha \\ \beta & \beta & \alpha + \beta & 0 \end{array} \right]$

$$\xrightarrow{E_3(-\beta)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta - \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha - \beta & -\beta \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta - \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \end{array} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

matriz invertible

forma escalonada

Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \beta \Rightarrow$ no hay 0's en la diagonal

$\Rightarrow$ el sistema tiene solución única.

Si $\alpha = 0 \Rightarrow 0 \cdot x_3 = -\beta$ $\begin{cases} \text{Si } \beta \neq 0 \text{ no hay solución} \\ \text{Si } \beta = 0 \text{ el sistema se reduce} \\ \text{a } x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \text{infinitas soluciones} \end{cases}$

Si $\alpha = \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha x_3 = -\alpha \Rightarrow x_3 = -1$ (3ª fila)

$-\alpha x_3 = -\alpha \Rightarrow x_3 = 1$ (2ª fila)

$\rightarrow$ contradicción, por lo tanto el sistema no tiene solución

RESUMIENDO:

$\rightarrow$ Hay una única solución si: $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq \beta$

$\rightarrow$ no hay solución si: 1) $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$

2) $\alpha \neq 0$ y $\alpha = \beta$

$\rightarrow$ Hay ∞ soluciones si $\alpha = \beta = 0$

$$b) \quad \begin{cases} \alpha x_1 + \alpha x_2 + \beta x_4 = 0 \\ \alpha x_2 + x_3 + \beta x_4 = \alpha \\ \beta x_4 + \alpha x_2 + \beta x_3 = \beta \\ \alpha x_1 + \beta x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Forma extendida (A|b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-\beta)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \alpha(1+\beta) & \beta^2 & \beta^2 & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{14}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & \alpha(1+\beta) & \beta^2 & \beta^2 & \beta \\ 0 & \alpha^2 & \beta & \alpha\beta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(-(1+\beta))} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & \beta - \alpha(1+\beta) \\ 0 & \alpha^2 & \beta & \alpha\beta & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{24}(-\alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & \beta - \alpha(1+\beta) \\ 0 & 0 & \beta - \alpha & 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{34}(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & -\beta & \beta - \alpha(1+\beta) \\ 0 & 0 & 0 & -\beta(\beta - \alpha) - \alpha^2 + (\beta - \alpha)(\beta - \alpha\beta) \end{pmatrix}$$

ANALIZAMOS:

Si $\alpha = \beta$ y $\alpha \neq 0$ NO EXISTE SOLUCIÓN PUES EN LA FILA 4 QUEDA $0 = -\alpha^2$ LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN.

Si $\alpha = \beta = 0$ EXISTEN INFINITAS SOLUCIONES PUES EN LA ÚLTIMA FILA SE PRODUCEN SÓLO CEROS Y SE INDETERMINA DE x_4 .

Si $\alpha \neq \beta$ y $\beta = 0$ TAMBIÉN SE PRODUCEN CEROS EN LA CUARTA FILA $0 = 0$, INDETERMINÁNDOSE EL SISTEMA DE x_4 , POR LO TANTO PRESENTA INFINITAS SOLUCIONES.

Si $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = 0$ LAS FILAS 2 Y 3 SE CONTRADICEN, POR LO TANTO SE INDETERMINA EL SISTEMA DE x_2 Y x_3 , POR LO TANTO EXISTEN INFINITAS SOLUCIONES.

Si $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ LA SOLUCIÓN ES ÚNICA.

RESUMEN.

- 1) SISTEMA CON 1 SOLUCIÓN SI $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$ Y $\beta \neq 0$
- 2) SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN SI $\alpha = \beta$ Y $\alpha = 0$.
- 3) SISTEMA CON INFINITAS SOLUCIONES SI $\alpha = \beta = 0$ O SI $\alpha \neq \beta$ Y $\beta = 0$ O $\alpha \neq \beta$ Y $\alpha = 0$.

P3) Buscamos una matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tal que $AX = I$ por lo tanto

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo cual lo podemos escribir como el sistema

$$ax+bz = 1$$

$$ay+bw = 0$$

$$cx+dz = 0$$

$$cy+dw = 1$$

forma matricial

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada queda como

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{13}(-\frac{c}{a})} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & ad-bc & 0 & -c/a \\ 0 & c & 0 & d & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & (ad-bc) & 0 & -c \\ 0 & c & 0 & d & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_{24}(-\frac{c}{a})} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & (ad-bc) & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c & (ad-bc) & -c/a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & (ad-bc) & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & (ad-bc) & a \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_{43}(-\frac{1}{ad-bc})} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-c}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \xrightarrow{E_{24}(-b)} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-c}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{E_{31}(-b)} \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & 0 & 0 & \frac{1+ab}{ad-bc} \\ 0 & a & 0 & 0 & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-c}{ad-bc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{forma final}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ad-bc} \cdot d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{ad-bc} \cdot b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{ad-bc} \cdot c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{ad-bc} \cdot a \end{array} \right)$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ad-bc} \cdot d \\ \frac{-1}{ad-bc} \cdot b \\ \frac{-1}{ad-bc} \cdot c \\ \frac{1}{ad-bc} \cdot a \end{pmatrix}$$

por lo tanto

NUESTRA MATRIZ $X = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
 X QUEDA

b) EL SISTEMA NOS QUEDA, SI $X = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

POR LO TANTO $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} dy_1 - by_2 \\ -cy_1 + ay_2 \end{pmatrix}$$

POR LO TANTO $x_1 = \frac{dy_1 - by_2}{ad-bc}$ y $x_2 = \frac{-cy_1 + ay_2}{ad-bc}$

c) LA IMPEDANCIA A LA IZQUIERDA VIENE EN LA PARTE a), VEAMOS LA OTRA.
EN EFECTO, SUPONGAMOS QUE A ES INVERTIBLE Y QUE $ad-bc \neq 0$. WEBO
SABEMOS QUE $AX=0 \Rightarrow X=0$, PERO:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = 0 \neq \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = 0$$

LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN. POR LO TANTO A ES INVERTIBLE.

P4)

a) ($\Leftarrow$) $Ax = (u v^T) x = u(v^T x) = u(0) = 0$.

$\Rightarrow$ ASÍ POR LO TANTO $Ax=0$

($\Rightarrow$) SEA $Ax=0 \stackrel{\text{HIPÓTESIS}}{\Rightarrow} (u v^T) x = 0 \Rightarrow u(v^T x) = 0$

PERO $v^T x = (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n = r \in \mathbb{R}$
ES UN ESCALAR

ASÍ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $Ax=0 \Rightarrow r u = 0$ CON $u \neq 0 \Rightarrow r = 0$

ENTONCES $v^T x = 0$.

b) COMO $Ax=0 \Leftrightarrow v^T x=0 \Rightarrow v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_n x_n = 0$ EL SISTEMA SE
REDUCE A UNA SOLA ECUACIÓN CON n VARIABLES. TOMANDO i TAL QUE $v_i \neq 0$
SE PUEDE DEJAR x_i Y DEJAR LIBRES LAS OTRAS $n-1$ VARIABLES. ENTONCES
HAY $n-1$ VARIABLES LIBRES.