AYUDANTÍA 2: CONJUNTOS Y MATRICES.

ÁLVARO TELLO CRINO

P.1 SEAN A, B y C CONJUNTOS, DEMUESTRE QUE:

a) $(A\setminus C) \cup (B\setminus C) = (A\cup B)\setminus C$

$= (A\cap C^c) \cup (B\cap C^c)$ POR DISTRIBUTIVIDAD

$= (A\cup B)\cap C^c$ POR DEFINICIÓN.

$= \underline{(A\cup B)\setminus C}$

b) $[A\setminus(B\setminus A)] \cup [(B\setminus A)\setminus A] = A\cup B$

$= [A\setminus(B\cap A^c)] \cup [(B\cap A^c)\setminus A]$

$= [A\cap (B\cap A^c)^c] \cup [(B\cap A^c)\cap A^c]$

$= [A\cap (B^c\cup A)] \cup [(B\cap A^c)\cap A^c]$

$= (A\cap B^c) \cup (A\cap A) \cup (B\cap A^c)$

$= (A\cap B^c) \cup A \cup (B\cap A^c)$

$= (A\cap B^c) \cup [(A\cup B)\cap (A\cup A^c)]$

$= (A\cap B^c) \cup [(A\cup B)\cap U]$

$= (A\cap B^c) \cup (A\cup B)$

$= (A\cap B^c) \cup B \cup A$

$= [(A\cup B)\cap (B^c\cup B)] \cup A$

$= [(A\cup B)\cap U] \cup A$

$= A\cup B\cup A = \underline{A\cup B}$

c) $A\subseteq C \Rightarrow A\setminus B = C\setminus[B\cup(C\setminus A)]$

PRIMERO NOTEMOS QUE SI SE TIENEN 2 CONJUNTOS A, C, POR PROPIEDADES VISTAS EN CLASE $A\cap C\subseteq A$. POR OTRO LADO, POR HIPÓTESIS SE SABE QUE $A\subseteq C$, SI SE INTERSECTA CON A SE TIENE $A\cap A\subseteq C\cap A$, ES DECIR $A\subseteq C\cap A$. JUNTANDO AMBAS EXPRESIONES TENEMOS QUE $A\subseteq C\cap A\subseteq A$, DEDUCIENDO QUE $C\cap A = A$. AHORA VOLVIENDO AL PROBLEMA.

$= C\setminus[B\cup(C\setminus A)]$

$= C\cap[B\cup(C\cap A^c)]^c$

$= C\cap[B^c\cap(C\cap A^c)^c]$

$= C\cap[B^c\cap(C^c\cup A)]$

$= C\cap B^c\cap(C^c\cup A)$

$= B^c \cap C \cap (C^c \cup A)$
$= B^c \cap [(C \cap C^c) \cup (C \cap A)]$
$= B^c \cap [\emptyset \cup (C \cap A)]$
$= B^c \cap (C \cap A)$ PERO POR LO ANTERIOR SABEMOS QUE $C \cap A = A$
$= B^c \cap A$
$= A \cap B^c$
$= A \setminus B.$

d) $(B \setminus A) \subseteq C \iff C^c \subseteq (B^c \cup A)$ POR DEF.
$\underbrace{(B \cap A^c)}_{D} \subseteq C = D \subseteq C$ POR PROPIEDADES VISTAS EN CLASE.
$D \subseteq C \iff C^c \subseteq D^c$
$\iff C^c \subseteq (B \cap A^c)^c$ POR LEY DE MORGAN.
$C^c \subseteq (B^c \cup A)$ //

P2| SEA A UN CONJUNTO FIJO DEL UNIVERSO U. MUESTRE QUE $\forall X, Y \subseteq U$ SE TIENE QUE $(X \cup A = Y \cup A) \land (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$.
Sea $x \in X \Rightarrow x \in X \cup A \iff x \in Y \cup A$, POR HIPÓTESIS
$\Rightarrow x \in Y \lor x \in A$.
SEPARAMOS EN CASOS:
i) SI $x \in Y$, ENTONCES $x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow X \subseteq Y$
ii) SI $x \in A \Rightarrow x \in X \cap A \iff x \in Y \cap A \Rightarrow x \in Y$, POR LO TANTO $X \subseteq Y$
ANÁLOGAMENTE SE DEDUCE, MEDIANTE $y \in Y$, QUE $Y \subseteq X$, POR LO TANTO $X = Y$.

SEGUNDA FORMA:
USAMOS UN RESULTADO PRELIMINAR, SIENDO A, B CONJUNTOS ARBITRARIOS, LLAMAMOS $X = A \cap B$, SABIENDO QUE $A \subseteq A \cup X$, LUEGO $A \subseteq (A \cap B) \cup A$ (*)
POR OTRO LADO, SE SABE QUE $A \cap B \subseteq A$, PARA CUALQUIER PAR DE CONJUNTOS.
SI $A \cap B \subseteq A$, UNIENDO A A AMBOS LADOS, $A \cup (A \cap B) \subseteq A \cup A$, QUE ES LO MISMO QUE $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ (**). UNIENDO (*) CON (**) OBTENEMOS QUE $(A \cap B) \cup A = A$.
CON ESTOS RESULTADOS PARTIMOS DE LA HIPÓTESIS

$$X \cup A = Y \cup A \ / \cap X$$
$$(X \cup A) \cap X = (Y \cup A) \cap X$$

$$(X\cap X)\cup(A\cap X) = (Y\cap X)\cup(A\cap X)$$

$$X\cup(A\cap X) = (Y\cap X)\cup(A\cap X)$$ POR HIPÓTESIS $(A\cap X)=(A\cap Y)$

$$X\cup(A\cap X) = (Y\cap X)\cup(A\cap Y)$$

$$X\cup(A\cap X) = (X\cap Y)\cup(A\cap Y)$$

$$X\cup(A\cap X) = (X\cup A)\cap Y$$ POR HIPÓTESIS $(A\cup X)=(A\cup Y)$

$$X\cup(A\cap X) = (Y\cup A)\cap Y$$

$$X\cup(A\cap X) = (Y\cap Y)\cup(Y\cap A)$$

$$X\cup(A\cap X) = Y\cup(Y\cap A)$$ POR RESULTADO PRELIMINAR, SIENDO A, B CUALQUIER CONJUNTO

$$X = Y$$

P3 SUPONGA QUE $A^t\cdot A$ ES INVERTIBLE. SE DEFINE COMO $P\in M_{n\times m}$ COMO:

$$P = I_n - A(A^tA)^{-1}\cdot A^t$$

PRUEBE QUE ES SIMÉTRICA Y QUE $P^2=P$, ADEMÁS COMPRUEBE QUE $P\cdot A = 0_{n\times m}$.

VEAMOS SI ES SIMÉTRICA

$$P^t = I_n^t - \left[\{A(A^tA)^{-1}\}A^t\right]^t$$

$$= I_n - (A^t)^t\{A(A^tA)^{-1}\}^t$$

$$= I_n - A((A^tA)^{-1})^t\cdot A^t$$

$$= I_n - A((A^tA)^t)^{-1}A^t$$

$$= I_n - A(A^tA)^{-1}A^t = P$$

AHORA VEAMOS QUE $P^2=P$.

$$P^2 = (I_n - A(A^tA)^{-1}A^t)(I_n - A(A^tA)^{-1}A^t)$$

$$P^2 = I_n(I_n - A(A^tA)^{-1}A^t) - A(A^tA)^{-1}A^t(I_n - A(A^tA)^{-1}A^t)$$

$$P^2 = I_nP - A(A^tA)^{-1}A^t\cdot I_n + A[(A^tA)^{-1}(A^t\cdot A)](A^tA)^{-1}\cdot A^t$$

$$P^2 = P - A(A^tA^{-1})A^t + AI_m(A^tA^{-1})\cdot A^t$$

$$P^2 = P - A(A^tA^{-1})A^t + A(A^tA^{-1})A^t$$

$$P^2 = P$$

FINALMENTE, PARA $PA\in M_{n\times m}$

$$PA = (I_n - A(A^tA)^{-1}A^t)\cdot A$$

$$PA = I_nA - A(A^tA)^{-1}(A^tA)$$

$$PA = A - AI_n$$

$$PA = A - A$$

$$PA = 0_{n\times m}\in M_{n\times m}.$$

P4) a) Sea $A \in M_{n\times n}$. Pruebe que si A^2 es invertible, entonces A es invertible

b) Sean $A, B \in M_{n\times n}$. Pruebe que si A, B y $A+B^{-1}$ son invertibles, entonces $A^{-1}+B$ también es invertible, y su inversa es $A(A+B^{-1})^{-1}B^{-1}$

a) Como A^2 es invertible, $\exists B \in M_{n\times n}$ talque $A^2B = I = BA^2$

observamos que $A^2B = A(AB) = I$, siendo AB candidato a inverso de A, falta demostrar que $(AB)A = I$ para concluir que A es invertible y $A^{-1} = AB$.

En efecto: $(AB)A = ABAI = ABA(A^2B) = A(BA^2)AB = AIAB = A^2B = I$

Luego A es invertible

b) Sea $C = A(A-B^{-1})^{-1}B^{-1}$ pdq $C(A^{-1}+B) = I$ y $(A^{-1}+B)C = I$.

$$\begin{aligned}
(A^{-1}+B)C &= [(A^{-1}+B)A](A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \\
&= [I+BA](A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \\
&= (BB^{-1}+BA)(A+B^{-1})^{-1}B^{-1} \\
&= B[(B^{-1}+A)(A+B^{-1})^{-1}]B^{-1} \\
&= B\cdot I\cdot B^{-1} \\
&= I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(A^{-1}+B) &= A(A+B^{-1})^{-1}[B^{-1}(A^{-1}+B)] \\
&= A(A+B^{-1})^{-1}(B^{-1}A^{-1}+I) \\
&= A(A+B^{-1})^{-1}(B^{-1}A^{-1}+AA^{-1}) \\
&= A[(A+B^{-1})^{-1}(B^{-1}+A)]A^{-1} \\
&= AIA^{-1} \\
&= I
\end{aligned}$$

Luego $A^{-1}-B$ es invertible y su inversa es C.

P5 SEA $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ UNA MATRIZ FIJA QUE VERIFICA $A^3=0$. CONSIDERE EL CONJUNTO

$$G = \{M(\lambda) \in M_{nn}(\mathbb{R}) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \text{ con } M(\lambda) = I_n + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2} A^2$$

a) MUESTRE QUE $M(\lambda+\beta) = M(\lambda) \cdot M(\beta)$

b) DEMUESTRE QUE $(G, \cdot)$ ES UN GRUPO ABELIANO, DONDE $\cdot$ ES EL PRODUCTO USUAL DE MATRICES. DETERMINE DE MANERA EXPLÍCITA $M(\lambda)^{-1}$. HINT: ESTUDIE QUIÉN ES $M(0)$.

a)
$$\begin{aligned} M(\lambda)M(\beta) &= \left(I_n + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2}A^2\right)\left(I_n + \beta A + \frac{\beta^2}{2}A^2\right) \\ &= I_n\left(I_n + \beta A + \frac{\beta^2}{2}A^2\right) + \lambda A\left(I_n + \beta A + \frac{\beta^2}{2}A^2\right) + \frac{\lambda^2}{2}A^2\left(I_n + \beta A + \frac{\beta^2}{2}A^2\right) \\ &= I_n^2 + \beta A + \frac{\beta^2}{2}A^2 + \lambda A + \lambda\beta A^2 + \frac{\lambda\beta^2}{2}A^3 + \frac{\lambda^2}{2}A^2 + \frac{\lambda^2}{2}\beta A^3 + \frac{\lambda^2\beta^2}{4}A^4 \end{aligned}$$

AHORA SE SABE POR ENUNCIADO QUE $A^3=0$
POR OTRO LADO $A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot 0 = 0$, QUEDANDO

$$\begin{aligned} M(\lambda)M(\beta) &= I_n + \beta A + \frac{\beta^2}{2}A^2 + \lambda A + \lambda\beta A^2 + \frac{\lambda^2}{2}A^2 \\ &= I_n + (\lambda+\beta)A + \frac{(\lambda^2 + 2\lambda\beta + \beta^2)}{2}A^2 \\ &= I_n + (\lambda+\beta)A + \frac{(\lambda+\beta)^2}{2}A^2 = \underline{M(\lambda+\beta)} \end{aligned}$$

b) PROPUESTO, NO ESTOY EN CONDICIONES, PERO NO ES COMPLICADO, ÁNIMO!

P6 PROPUESTO, PARA QUE SE DIVIERTAN.
SEA $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. PRUEBE QUE SI A ES INVERTIBLE,

ENTONCES $ad - bc \neq 0$, Y, ADEMÁS $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$