AYUDANTÍA 1: LÓGICA

ÁLVARO TELLO CRINO

P1) PROBAR USANDO TABLAS DE VERDAD QUE EL OPERADOR LÓGICO IMPLICANCIA "$\Rightarrow$" ES DISTRIBUTIVO SOBRE SÍ MISMO.

DEBEMOS PROBAR QUE SE CUMPLE PARA CUALQUIER PROPOSICIÓN p, q, r QUE $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	$\Leftrightarrow$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

COMO OBTENEMOS SÓLO VERDADERO CORRESPONDE A UNA TAUTOLOGÍA, POR LO TANTO EL CONECTOR "$\Rightarrow$" ES DISTRIBUTIVO SOBRE SÍ MISMO, ES DECIR, SIEMPRE SE CUMPLE QUE $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

P2) SE DEFINE EL CONECTOR LÓGICO BINARIO $\star$ A TRAVÉS DE LA SIGUIENTE TABLA DE VERDAD

p	q	$p \star q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

DEMUESTRE LAS EQUIVALENCIAS:

i) $\bar{p} \Leftrightarrow p \star p$

ii) $p \vee q \Leftrightarrow (p \star q) \star (p \star q)$

iii) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \star p) \star (q \star q)$

iv) $p \star q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim(p \wedge q)]$

PARA RESOLVER ESTE PROBLEMA PODEMOS HACER UNA TABLA DE VERDAD QUE ABARQUE AL MENOS LOS PRIMERAS TRES EQUIVALENCIAS

p	p	$\bar{p}$	q	q	$p\star q$	$p\star p$	$q\star q$	$p\vee q$	$p\wedge q$	$(p\star q)\star(p\star q)$	$(p\star p)\star(q\star q)$
V	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	F	F

i) CON LA TABLA ANTERIOR SE OBTIENE, RECORDANDO QUE PARA LA EQUIVALENCIA TODOS LOS VALORES DE VERDAD DEBEN SER IGUALES, SE MUESTRA LA EQUIVALENCIA ENTRE $\bar{p}$ Y $p\star p$

$\bar{p}$	$p\star p$	$\bar{p} \Leftrightarrow (p\star p)$
F	F	V
F	F	V
V	V	V
V	V	V

TAUTOLOGÍA, SE DEMUESTRA LA EQUIVALENCIA.

ii) NUEVAMENTE GRACIAS A LA TABLA DE VERDAD ANTERIOR

$p\vee q$	$(p\star q)\star(p\star q)$	$\Leftrightarrow$
V	V	V
V	V	V
V	V	V
F	F	V

TAUTOLOGÍA, SE DEMUESTRA LA EQUIVALENCIA

iii) PROBAMOS CON LA TABLA DE VERDAD

$p\wedge q$	$(p\star p)\star(q\star q)$	$\Leftrightarrow$
V	V	V
F	F	V
V	V	V
F	F	V

TAUTOLOGÍA, SE DEMUESTRA LA EQUIVALENCIA.

iv) REALIZAMOS UNA NUEVA TABLA DE VERDAD

p	q	$p\star q$	$p\wedge q$	$p\Leftrightarrow q$	$\sim(p\wedge q)$	$p\Leftrightarrow q \wedge \sim(p\wedge q)$	$\Leftrightarrow$
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V

Tautología, SE DEMUESTRA LA EQUIVALENCIA.

P3) SEAN P, q, r y s PROPOSICIONES PRUEBE SIN USAR TABLA DE VERDAD QUE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES SON TAUTOLOGÍAS

a) $[(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p}\vee \bar{r} \vee (q\wedge s)]$

b) $[(p\wedge q)\Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p\wedge \sim r)\Rightarrow \sim q]$

c) $[(p\Rightarrow \sim q)\wedge(\sim r\vee q)\wedge r] \Rightarrow \sim p$

d) $(p\Rightarrow r)\Rightarrow [(p\wedge q)\Rightarrow r]$

a) MOSTRARÉ DISTINTAS FORMAS DE RESOLVER EL PROBLEMA, ES BUENO QUE CONOZCAN MÁS DE UNA FORMA DE ABORDAR UN PROBLEMA Y PODRÁN USAR EL QUE MÁS LES GUSTE.

MÉTODO 1: VERIFICACIÓN SIMBÓLICA, LA IDEA ES USAR LAS TAUTOLOGÍAS BÁSICAS PARA DESARROLLAR **TODA** LA PROPOSICIÓN HASTA LLEGAR A UNA VERDAD, ES EL MÉTODO MÁS CLÁSICO Y MÁS TEDIOSO.

$[(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow \bar{r})] \Rightarrow [\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)]$ POR CARACTERIZACIÓN DEL "⇒"

$\Leftrightarrow [(\bar{p}\vee q)\wedge(s\vee\bar{r})] \Rightarrow [\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)]$ NUEVAMENTE CARACTERIZACIÓN.

$\Leftrightarrow \sim[(\bar{p}\vee q)\wedge(s\vee\bar{r})] \vee [\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)]$ NEGACIÓN DE "∧" Y "∨"

$\Leftrightarrow [(p\wedge\bar{q})\vee(\bar{s}\wedge r)]\vee[\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)]$ ORDENAMOS GRACIAS ASOCIATIVIDAD.

$\Leftrightarrow [(p\wedge\bar{q})\vee\bar{p}]\vee[(\bar{s}\wedge r)\vee\bar{r}]\vee(q\wedge s)$ USANDO DISTRIBUTIVIDAD

$\Leftrightarrow [(p\vee\bar{p})\wedge(\bar{q}\vee p)]\vee[(\bar{s}\vee\bar{r})\wedge(r\vee\bar{r})]\vee(q\wedge s)$ TAUTOLOGÍA $(p\wedge\bar{p})\Leftrightarrow F$

$\Leftrightarrow [V\wedge(\bar{q}\vee p)]\vee[(\bar{s}\vee\bar{r})\wedge V]\vee(q\wedge s)$ TAUTOLOGÍA $p\wedge V\Leftrightarrow p$

$\Leftrightarrow (\bar{q}\vee p)\vee(\bar{s}\vee\bar{r})\vee(q\wedge s)$ REORDENAMOS CON ASOCIATIVIDAD

$\Leftrightarrow (p\vee\bar{r})\vee(\bar{q}\vee\bar{s})\vee(q\wedge s)$ NEGACIÓN DEL "∨"

$\Leftrightarrow (p\vee\bar{r})\vee\sim(q\wedge s)\vee(q\wedge s)$ TAUTOLOGÍA $(p\vee\bar{p})\Leftrightarrow V$

$\Leftrightarrow (p\vee\bar{r})\vee V$ TAUTOLOGÍA $p\vee V\Leftrightarrow V$

$\Leftrightarrow V$ POR LO TANTO ES TAUTOLOGÍA.

MÉTODO 2: POR CONTRADICCIÓN, USAMOS ESTE MÉTODO CUANDO TENEMOS UN IMPLICA GRANDE QUE DOMINA LA PROPOSICIÓN, USAMOS LA VENTAJA QUE IMPLICANCIA SOLO TIENE UNA CONFIGURACIÓN PARA QUE SEA FALSA ENTONCES USAMOS COMO HIPÓTESIS QUE LA PROPOSICIÓN ES FALSA Y ANALIZAMOS SI EXISTE CONTRADICCIÓN. PARA QUE IMPLICANCIA SEA FALSA ES NECESARIO QUE, SI $p\Rightarrow q \Leftrightarrow F$, p SEA VERDADERO Y q FALSO. PARA NUESTRO CASO

$$\underbrace{[(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow\bar{r})]}_{V}\Rightarrow\underbrace{[\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)]}_{F}$$

DE ESTO OBTENEMOS QUE COMO $[\bar{p}\vee\bar{r}\vee(q\wedge s)]$ ES FALSO NECESARIAMENTE $\bar{p}$ Y $\bar{r}$ SON FALSOS, POR LO TANTO p Y r SON VERDADEROS, ADEMÁS $(q\wedge s)$ DEBE SER FALSO. VOLVIENDO A LA LA PROPOSICIÓN ANTERIOR NOS QUEDA

$[(p\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow\bar{r})]\Leftrightarrow[(V\Rightarrow q)\wedge(\bar{s}\Rightarrow F)]$ PARA QUE LA SIGUIENTE PROPOSICIÓN SEA VERDADERA NECESITAMOS OBLIGADAMENTE QUE s Y q SEAN VERDADEROS, PERO SE DEDUJO QUE $(s\wedge q)$ SON FALSOS, LLEGANDO ENTONCES A UNA CONTRADICCIÓN. DE ESTE RAZONAMIENTO SE DEDUCE QUE NO PUEDE HABER CONFIGURACIÓN DE VALORES DE VERDAD CON TAL QUE LA PROPOSICIÓN SEA FALSA, POR LO TANTO DEBE SER NECESARIAMENTE TAUTOLOGÍA.

b) MÉTODO 1: VERIFICACIÓN SIMBÓLICA. (USTEDES ANALICEN LAS PROPIEDADES USADAS)

$$(p\wedge q\Rightarrow r)\Leftrightarrow((p\wedge\bar{r})\Rightarrow\bar{q})$$
$$\Leftrightarrow[(p\wedge q\Rightarrow r)\Rightarrow((p\wedge\bar{r})\Rightarrow\bar{q})]\wedge[((p\wedge\bar{r})\Rightarrow\bar{q})\Rightarrow((p\wedge q)\Rightarrow r)]$$
$$\Leftrightarrow[(\sim(p\wedge q)\vee r)\Rightarrow(\sim(p\wedge\bar{r})\vee\bar{q})]\wedge[(\sim(p\wedge\bar{r})\vee\bar{q})\Rightarrow(\sim(p\wedge q)\vee r)]$$
$$\Leftrightarrow[\sim(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)\vee(\bar{p}\vee r\vee\bar{q})]\wedge[\sim(\bar{p}\vee r\vee\bar{q})\vee(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)]$$
$$\Leftrightarrow[\sim(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)\vee(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)]\wedge[\sim(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)\vee(\bar{p}\vee\bar{q}\vee r)]$$
$$\Leftrightarrow[V]\wedge[V]$$
$$\Leftrightarrow V$$, POR LO TANTO CORRESPONDE A TAUTOLOGÍA.

MÉTODO 2: VENTAJA DE TENER EQUIVALENCIA, USANDO TAUTOLOGÍAS BÁSICAS LA IDEA ES PARTIR DEL LADO IZQUIERDO DE LA EQUIVALENCIA Y LLEGAR AL DERECHO. luego se debe demostrar partiendo desde el lado derecho para demostrar así la equivalencia. La implicancia, en cambio, solo es demostrable hacia un lado (izquierda a derecha).

(Izq a Der.) $(p\wedge q\Rightarrow r)\Rightarrow(\sim(p\wedge q)\vee r)$
$$\Rightarrow(\sim p\vee\sim q\vee r)$$
$$\Rightarrow(\sim p\vee r\vee\sim q)$$
$$\Rightarrow(\sim(p\wedge\sim r)\vee\sim q)$$
$$\Rightarrow((p\wedge\sim r)\Rightarrow\sim q)$$

(Der. a izq)

$$((p \land \sim r) \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim(p \land \sim r) \lor \sim q)$$
$$\Rightarrow (\sim p \lor r \lor \sim q)$$
$$\Rightarrow (\sim p \lor \sim q \lor \sim r)$$
$$\Rightarrow (\sim(p \land q) \lor \sim r)$$
$$\Rightarrow ((p \land q) \Rightarrow r)$$

c) MÉTODO 1: VERIFICACIÓN SIMBÓLICA.

$$[(p \Rightarrow \bar{q}) \land (\bar{r} \lor q) \land r] \Rightarrow \bar{p}$$
$$\Leftrightarrow \sim[(p \Rightarrow \bar{q}) \land (\bar{r} \lor q) \land r] \Rightarrow \bar{p}$$
$$\Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow \bar{q}) \lor \sim(\bar{r} \lor q) \lor \bar{r} \lor \bar{p}$$
$$\Leftrightarrow (p \land q) \lor (r \land \bar{q}) \lor \bar{r} \lor \bar{p}$$
$$\Leftrightarrow (p \land q) \lor \bar{p} \lor (r \land \bar{q}) \lor \bar{r}$$
$$\Leftrightarrow [(p \lor \bar{p}) \land (q \lor \bar{p})] \lor [(r \lor \bar{r}) \land (\bar{q} \lor \bar{r})]$$
$$\Leftrightarrow [V \land (q \lor \bar{p})] \lor [V \land (\bar{q} \lor \bar{r})]$$
$$\Leftrightarrow [V] \lor [V] \Leftrightarrow V$$ POR LO TANTO ES TAUTOLOGÍA.

MÉTODO 2: POR CONTRADICCIÓN, PARA QUE SEA FALSA DEBE CUMPLIRSE QUE $[(p \Rightarrow \bar{q}) \land (\bar{r} \lor q) \land r]$ SEA VERDADERA Y ADEMÁS $\bar{p}$ SEA FALSA, POR LO TANTO SE CONCLUYE QUE p DEBE SER VERDAD, POR OTRO LADO, AL SER $\land$ EL CONECTOR LÓGICO PARA QUE SEA LA PROPOSICIÓN COMPLETA SEA VERDAD DEBE SER $(p \Rightarrow \bar{q})$, $(\bar{r} \lor q)$ Y r VERDAD, POR LO TANTO $\bar{r}$ ES FALSO, NECESITANDO PARA QUE $(\bar{r} \lor q)$ SEA VERDAD QUE q SEA VERDAD. LUEGO COMO q ES VERDAD Y p VERDAD SE OBTIENE QUE $(p \Rightarrow \bar{q})$ ES FALSO, LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN Y LA PROPOSICIÓN NO PUEDE SER FALSA, POR LO TANTO ES UNA TAUTOLOGÍA.

D) MÉTODO 1: VERIFICACIÓN SIMBÓLICA

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \land q) \Rightarrow r]$$
$$\sim(p \Rightarrow r) \lor [(p \land q) \Rightarrow r]$$
$$\sim(\bar{p} \lor r) \lor [\sim(p \land q) \lor r]$$
$$(p \land \bar{r}) \lor (\bar{p} \lor \bar{q}) \lor r$$
$$(p \land \bar{r}) \lor (\bar{p} \lor r) \lor \bar{q} \Leftrightarrow V \lor \bar{q} \Leftrightarrow V$$ POR LO TANTO ES TAUTOLOGÍA

MÉTODO 2: POR CONTRADICCIÓN, SUPONEMOS QUE $(P \Rightarrow r)$ ES VERDADERO Y $[(P \wedge q) \Rightarrow r]$ ES FALSO, POR LO TANTO DEBE CUMPLIRSE QUE $(P \wedge q)$ SEA VERDAD, SIENDO P Y q NECESARIAMENTE VERDAD, Y r SEA FALSO. POR OTRO LADO SI P ES VERDAD Y r ES FALSO $P \Rightarrow r$ ES FALSO, LO CUAL ES UNA CONTRADICCIÓN A LA HIPÓTESIS, CONCLUYENDO QUE LA PROPOSICIÓN NUNCA PUEDE SER FALSA, SIENDO ENTONCES TAUTOLOGÍA.

P4) SEAN P, q, r, s Y t PROPOSICIONES, BUSQUE EL VALOR DE VERDAD DE ELLAS SABIENDO QUE

$$[(P \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(r \Rightarrow s)} \wedge \bar{t}] \Rightarrow [s \vee (q \Rightarrow s)] \text{ ES FALSA.}$$

COMO ES FALSA LA PROPOSICIÓN Y CONTIENE UN IMPLICA QUE DOMINA TODO, DEBE CUMPLIRSE QUE $[(P \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(r \Rightarrow s)} \wedge \bar{t}]$ SEA VERDAD Y $[s \vee (q \Rightarrow s)]$ ES FALSA, PARA QUE LA SEGUNDA SEA FALSA Y CONTIENE CONECTOR "$\vee$" s DEBE SER FALSA CONCLUYENDO QUE q DEBE SER VERDAD. POR EL OTRO LADO AL SER EL CONECTOR "$\wedge$" SE CUMPLE QUE $(P \Leftrightarrow q)$ ES VERDAD, POR LO TANTO $P \Leftrightarrow q \Leftrightarrow V$, $\overline{(r \Rightarrow s)}$ VERDAD Y $\bar{t}$ VERDAD, SIENDO t FALSO Y $(r \Rightarrow s)$ FALSO; COMO s ES FALSO DEBE CUMPLIRSE QUE r SEA VERDADERO. CONCLUYENDO QUE P, q Y r SON VERDADERO Y s Y t FALSAS.

P5) SEAN P, q Y r TRES PROPOSICIONES TAL QUE $(\bar{P} \vee q) \Rightarrow r$ ES FALSA DETERMINE EL VALOR DE VERDAD DE LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES

a) $\bar{q} \Rightarrow \bar{P}$

b) $r \Rightarrow [P \Leftrightarrow \overline{(q \vee r)}]$

PRIMERO, DADO QUE $(\bar{P} \vee q) \Rightarrow r$ ES FALSO SE CONCLUYE QUE $(\bar{P} \vee q)$ ES VERDAD Y r FALSO NECESARIAMENTE. DE AQUÍ.

a) $(\bar{P} \vee q) \Leftrightarrow V \Leftrightarrow (\bar{P} \vee q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{P})$, POR TAUTOLOGÍA CONTRARECÍPROCA, POR LO TANTO, $(\bar{q} \Rightarrow \bar{P})$ ES TAUTOLOGÍA.

b) COMO r ES FALSO, ANALIZANDO LA TABLA DE VERDAD DE IMPLICANCIA, SE OBSERVA QUE SI $[P \Leftrightarrow \overline{(q \vee r)}]$ ES VERDAD O FALSO NO IMPORTA, LA IMPLICANCIA HACE QUE SEA SIEMPRE VERDAD, POR LO TANTO TAUTOLOGÍA.

P6| a) Si $p(y)$ y $p(x)$ son funciones proposicionales, muestre que:

$$(\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)] \text{ es tautología}$$

• Negando la proposición se tiene:

$$\sim\left((\exists y)[p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)]\right) \Leftrightarrow (\forall y)\sim[\sim p(y) \vee (\forall x)p(x)]$$
$$\Leftrightarrow (\forall y)[p(y) \wedge (\exists x)\sim p(x)]$$
$$\Leftrightarrow (\forall y)p(y) \wedge (\forall y)(\exists x)\sim p(x)$$

pero $p(x)$ no depende de y, luego

$$\Leftrightarrow (\forall y)p(y) \wedge (\exists x)\sim p(x)$$

Lo anterior nos dice que todo punto y cumple que $p(y)$ sería verdadero y además existe un punto x talque $\sim p(x)$ también sería verdadero. tomando el caso en que $y = x$ se obtiene que $p(x)$ y $\sim p(x)$ son verdad al mismo tiempo, lo cual no es posible. Por lo tanto la negación de la proposión del enunciado es falsa, concluyéndose que la proposición inicial es tautología

b) ¡EXTRA! SEA P UNA PROPOSICIÓN LÓGICA Y $q(x)$ UNA FUNCIÓN PROPOSICIONAL

i) SI LLAMAMOS r ~~AL~~ A LA PROPOSICIÓN $(\forall x)(P \Rightarrow q(x))$, DETERMINE EL VALOR DE VERDAD DE P, SABIENDO QUE r ES FALSA.

ii) LLAMAMOS S A LA PROPOSICIÓN $(\exists x)(P \Rightarrow q(x))$ DECIDA SI ES POSIBLE DETERMINAR EL VALOR DE VERDAD SABIENDO QUE S ES VERDADERA.

i) TENEMOS $r \Leftrightarrow (\forall x)[p \Rightarrow q(x)]$ Y r ES VERDADERA

POR LO TANTO

$$\sim[(\forall x)(p \Rightarrow q(x))]$$
$$\Leftrightarrow \sim(\forall x)[\bar{p} \vee q(x)]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x) \sim[\bar{p} \vee q(x)]$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)[p \wedge \bar{q}(x)] \Leftrightarrow V$$

PER CONECTOR "$\wedge$" OBLIGA A QUE TANTO p Y $\bar{q}(x)$ SEAN VERDADEROS.

ii) TENEMOS $s \Leftrightarrow (\exists x)[p \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow V$

COMO EXISTEN LOS x ANALIZAREMOS LA PROPOSICIÓN $p \Rightarrow q(x)$, NOTAMOS QUE $q(x)$ SERÁ VERDADERO, PARA ESOS x, POR LO TANTO p PARA ESE CASO NO IMPORTA SI p ES VERDADERO O FALSO. POR OTRO LADO, PARA LOS CASOS ES EN QUE x HACEN FALSA LA PROPOSICIÓN YA QUE EXISTEN SOLO ALGUNOS x QUE LA HACEN VERDADERA, NO TODOS, AHÍ NECESARIAMENTE $q(x)$ DEBE SER FALSO Y p VERDADERO. POR LO TANTO CONCLUIMOS QUE p DEBE SER POSITIVO

PROPUESTO

P7 SEAN p, q Y r PROPOSICIONES LÓGICAS. SE CONSIDERA LA PROPOSICIÓN COMPUESTA s CUYA TABLA DE VERDAD ES

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

a) CONSTRUIR LA PROPOSICIÓN COMPUESTA s EN FUNCIÓN DE p, q Y r. HINT: UTILICE SOLO CONECTORES LÓGICOS "$\wedge$" Y "$\vee$" EN SU CONSTRUCCIÓN.

b) PROBAR QUE $s \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ ES UNA TAUTOLOGÍA, SIN USAR TABLA DE VERDAD.