



INDUCCIÓN MATEMÁTICA

EDUARDO SÁEZ , IVÁN SZÁNTÓ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARIA

1. INTRODUCCIÓN

El método deductivo, muy usado en matemática, obedece a la siguiente idea: “A partir de un cierto conjuntos de axiomas aceptados sin demostración y de reglas lógicas no contradictorias, se deducen otros enunciados llamados teoremas combinando los axiomas y respetando en cada etapa las reglas lógicas”.

Otro método para demostrar resultados generales que dependen en algún sentido de los números naturales es conocido con el nombre de **Inducción Matemática** . Esta dependencia de los números naturales significa: se sabe que una determinada afirmación es verdadera para algunos casos particulares y surge la pregunta. ¿ Dicha afirmación sigue siendo verdadera para los **infinitos** números naturales restante ?.

Existen muchas afirmaciones que **sólo** son válidas para un número **finito** de casos y en consecuencia son falsas para un número infinitos de situaciones. Sin embargo, podemos encontrar proposiciones (afirmaciones) que son verdaderas sólo a partir de un cierto número natural n_0 , de ser así, la técnica que se desarrollaremos se llama **Inducción Incompleta**. Para demostrar que una proposición $p(n)$, $\forall n \in M \subseteq \mathbb{N}$, es verdadera es necesario comprobar la validez de ella para todos los elementos del conjunto M . En el caso en que $M = \mathbb{N}$, diremos que es una **Inducción Completa**.

Si se requiere demostrar la falsedad de una cierta proposición $p(n)$, $\forall n \in M \subseteq \mathbb{N}$, es suficiente indicar un elemento particular $m \in M$ de manera que $p(m)$ sea falsa.
(Construcción de un contra ejemplo).

Ejemplo 1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 3n - 1 < 0$

*Es fácil probar que esta desigualdad es verdadera para $n = 1, 2, 3$. Sin embargo, para $n = 4$ no se cumple ya que $4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3 > 0$. Nótese que este ejemplo sencillo muestra que una proposición puede ser verdadera para los primeros números naturales, sin embargo, es **falsa** , para números naturales más grandes.*

Otros ejemplos:

Ejemplo 2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$, es divisible por 5.

Es fácil probar que esta proposición es verdadera para $n = 1, 2, 3$. Sin embargo, para $n = 4$ no se cumple dado que $(2 \cdot 4 - 1)(2 \cdot 4 + 1)(2 \cdot 4 + 3) = 693$. no es divisible por 5

Ejemplo 3. (Ejemplo dado por Leonhard Euler (1707-1783))

Consideremos el polinomio cuadrático $p(n) = n^2 + n + 41$ y determinemos su valor para ciertos $n \in \mathbb{N}$

n	:	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 + n + 41$	:	43	47	53	61	71	83	97	113

Nótese que todos los números que se obtienen son primos. Se podría esperar que este polinomio cuadrático continua generando números primos. Desafortunadamente no es así, para $n = 40$, se tiene $1681 = 41^2$, que no es un número primo, luego la proposición que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 41$ es un número primo resulta falsa.

2. Principio de inducción Matemática

Una proposición $p(n)$ es verdadera para todos los valores de la variable n si se cumplen las siguientes condiciones :

- Paso 1.- La proposición $p(n)$ es verdadera para $n = 1$, o bien, $p(1)$ es verdadera.
 Paso 2.- **Hipótesis de Inducción** . Se supone que $p(k)$ es verdadera , donde k es un número natural cualesquiera.
 Paso 3.- **Tesis de Inducción**. Se demuestra que $p(k+1)$ es verdadera, o bien,
- $$p(k) \text{ verdadera} \Rightarrow p(k+1) \text{ verdadera.}$$

La técnica de Inducción Matemática consiste en los tres pasos anteriores. Si se necesita demostrar la validez de una proposición $p(n)$ para todos los valores naturales n , entonces es suficiente que se cumplan: Paso 1, Paso 2 y Paso 3 .

Comentario: Intuitivamente la idea anterior se conoce con el nombre de “Efecto Dominó”. Si imaginamos una fila infinita de fichas de dominó: dispuestas verticalmente y suficientemente próximas una cualquiera de la siguiente , entonces si el volteamiento de la primera ficha provoca el volteamiento de la segunda ficha, por el Principio de Inducción Matemática la fila completa es volteada.

Existen dos variantes útiles sobre el Principio de Inducción Matemática que deben ser considerados . En la primera variante, la proposición por demostrar involucra los naturales no menores a un natural fijo n_0 , en este caso el Principio de Inducción quedaria como sigue:

Si $p(n)$ es verdadera para n_0 y si $p(m+1)$ es verdadera para todo natural $m \geq n_0$ para la cual $p(m)$ es verdadera, entonces $p(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$.

La segunda variante se aplica de preferencia en el caso cuando $p(m+1)$ no puede ser fácilmente deducible de $p(m)$, pero su validez depende de $p(k)$ para cualquier $k < m$. Si $p(1)$ es verdadera y si $p(m+1)$ es verdadera para todo $m \geq 1$ para la cual todas las proposiciones $p(1), p(2), p(3), \dots, p(m)$ son verdaderas, entonces $p(n)$ es verdadera para $n \geq 1$. Para ilustrar el uso de estas variantes, consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4. *Determine para que valores de $n \in \mathbb{N}$ es verdadera la desigualdad*

$$2^n > n^2 + 4n + 5$$

Al examinar los valores de $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ nos damos cuenta que la desigualdad es incorrecta, pero si es verdadera para $n = 7$, por lo que podemos intentar demostrar por el método de Inducción Incompleta que para todos los valores de $n \geq 7$, la desigualdad es verdadera.

Paso 1.- *Si $n = 7$, obtenemos*

$$2^7 = 128 > 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 = 82$$

o sea, cuando $n = 7$ la desigualdad es correcta.

Paso 2.- *(Hipótesis Inductiva) Se supone que la desigualdad es verdadera para un cierto valor de $n = k$, o sea,*

$$2^k > k^2 + 4k + 5.$$

Paso 3.- *Finalmente a partir de la hipótesis inductiva, se desea probar la Tesis dada por*

$$2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

Al multiplicar la desigualdad dada en la hipótesis inductiva por 2, obtenemos

$$2^{(k+1)} > 2k^2 + 8k + 10$$

Transformando el segundo miembro de esta desigualdad obtenemos

$$2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + k^2 + 2k$$

Teniendo en cuenta que $k^2 + 2k > 0$ para todo $k \geq 7$, podemos deducir que $2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$, obteniendo lo que se requería demostrar (Tesis).

Ejemplo 5. *Demostrar que la suma de los n primeros números naturales es igual a $n(n+1)/2$.*

Demostración:

Queremos probar que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n+1)/2$$

Sea $p(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n+1)/2$, debemos probar que $p(n)$ satisface las propiedades (1), (2) y (3).

(1) $p(1) : 1 = 1(1+1)/2$, lo cual es verdadero.

(2) Se supone que la igualdad es verdadera para un cierto valor de k , es decir,
 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = k(k+1)/2$

(3) Sea $k \in \mathbb{N}$, debemos probar que $p(k) \implies p(k+1)$ es verdadero. Notese que si $p(k)$ es falsa la implicación es verdadera, de modo que hay que hacer la demostración suponiendo que $p(k)$ es verdadera.

Como $p(k+1) : 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = (k+1)((k+1)+1)/2$, $p(k+1)$ debe formarse de $p(k)$ sumando $k+1$ a ambos miembros de la igualdad (de la Hipótesis inductiva):

$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = k(k+1)/2 + (k+1) = (k+1)(k/2+1) = (k+1)(k+2)/2$.
 Hemos confirmado nuestras sospechas, lo que es, hemos deducido que $p(k+1)$ es verdadera, suponiendo que $p(k)$ lo es. Así, hemos demostrado que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n+1)/2$ es verdadera.

Ejemplo 6. Probar que $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$

Solución: Sea $p(n) : 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$

Entonces $p(1) : 1 \cdot 3 = 1(1+1)(2 \cdot 1 + 7)/6 = 2 \cdot 9/6 = 3$, lo que prueba que $p(1)$ es verdadera.

Hipótesis inductiva:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) = k(k+1)(2k+7)/6.$$

(Suponemos que $p(n)$ es verdadera) Tesis:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3) = (k+1)(k+2)(2k+9)/6.$$

(Queremos probar que $p(k+1)$ es verdadera). Tenemos:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3) = k(k+1)(2k+7)/6 + (k+1)(k+3) = \frac{(k+1)}{6}(k(2k+7) + 6(k+3)) = (k+1)(2k^2 + 13k + 18)/6 = (k+1)(2k+9)(k+2)/6$$

lo que prueba que $p(k+1)$ es verdadera. Luego, la formula $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 7. Determinar si el producto de 3 números impares consecutivos es siempre divisible por 6.

Solución: Sea $p(n) : (2n-1)(2n+1)(2n+3) = 6q$ donde q es algún número natural. Queremos determinar si $p(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

$p(1) : 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15 = 6q \implies q = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$. Luego $p(1)$ es falso. Se puede continuar analizando $p(2), p(3), p(4), \dots$ y vemos que todos no cumplen la condición que sea divisible por 6. Es fácil ver que $(2n-1)(2n+1)(2n+3) = 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3 = 2(4n^3 + 6n^2 - n - 1) - 1$ luego este número es de la forma $2j-1$ que es un número impar y por lo tanto no es divisible por 6.

Ejemplo 8. *Determine si la suma de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6.*

Demostración: Sea $p(n): n + (n + 1) + (n + 2) = 6q, \quad q \in \mathbb{N}$. Entonces $p(1): 1 + 2 + 3 = 6$ es verdadera ($q = 1$.)

Hipótesis inductiva: $p(k) = k + (k + 1) + (k + 2) = 6q_1, \quad q_1 \in \mathbb{N}$ es verdadera.

Por demostrar $p(k + 1): (k + 1) + (k + 2) + (k + 3) = 6q_2, \quad q_2 \in \mathbb{N}$ es verdadera.

Como $(k + 1) + (k + 2) + (k + 3) = k + (k + 1) + (k + 2) + 3 = 6q_1 + 3 = 6(q_1 + \frac{1}{2}) \notin \mathbb{N}$. Luego $p(k)$ verdadero no implica $p(k + 1)$ verdadero. Por lo tanto, $p(n): n + (n + 1) + (n + 2) = 6q, \quad q \in \mathbb{N}$, es falso. La suma de 3 enteros consecutivos no es necesariamente divisible por 6.

Observación: Es fácil ver que $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$, de donde para que sea divisible por 6, necesariamente el factor $(n + 1)$ debe ser un número impar para cualquier n natural, lo que es falso.

Ejemplo 9. *Consideremos un ejemplo con desigualdades.*

Determine todos los números naturales para los cuales:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n > 2^n$$

Solución: La fórmula no es válida para $n = 1, 2, 3$

Pra $n = 4$, se tiene que $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 = 16$ es verdadera.

Supongamos que la desigualdad es válida para $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 4$; esto es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k > 2^k, \quad k \geq 4$.

Por demostrar que la desigualdad es válida para $k + 1$, es decir que

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k \cdot (k + 1) > 2^{k+1}, \quad k \geq 4.$$

En efecto:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k \cdot (k + 1) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k) \cdot (k + 1) > 2^k(k + 1) > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}.$$

Luego $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n > 2^n$, y por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4 \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n > 2^n$

Ejemplo 10. *Consideremos el siguiente ejemplo de divisibilidad:*

Demostrar por inducción, que si n es un número impar, $7^n + 1$ es divisible por 8.

Antes de aplicar inducción conviene hacer un cambio de índices. Sea $n = 2i - 1$.

Entonces si $i = 1, 2, 3, \dots$ se tiene que $n = 1, 3, 5, \dots$ y nuestro enunciado se transforma en:

7^{2i-1} es divisible por 8, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Para $i = 1$, $7^1 + 1 = 8$ es divisible por 8, lo que es una proposición verdadera.

Hipótesis inductiva: $7^{2i-1} + 1$ es divisible por 8.

Tesis: 7^{2i+1} es divisible por 8.

Dado que nuestra única información es la hipótesis, debemos hacer que la expresión $7^{2i-1} + 1$ aparezca en el desarrollo

$$7^{2i+1} + 1 = 7^2(7^{2i-1}) + 1 = 7^2(7^{2i-1} + 1) - 7^2 + 1 = 7^2(7^{2i-1} + 1) - 48$$

y aquí ambos sumandos son divisibles por 8, luego 8 divide a $7^{2i+1} + 1$. Luego resulta que $7^n + 1$ es divisible por 8 para todo n impar.

3. Ejercicios resueltos.

1) Pruebe que la fórmula

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$$

es válida para todo natural n .

Demostración. Sea $p(n)$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Entonces $p(1)$, $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$ es verdadera.

Hipótesis Inductiva: $p(k)$ verdadera, es decir

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k + 1) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3}$$

Tesis: Por demostrar $p(k + 1)$, es decir

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k + 1) + (k + 1) \cdot (k + 2) = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3}$$

Sumando $(k + 1) \cdot (k + 2)$ a ambos lados a la igualdad de la hipótesis inductiva se obtiene:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k + 1) + (k + 1) \cdot (k + 2) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + (k + 1) \cdot (k + 2)$$

luego sólo resta probar que

$$\frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + (k + 1) \cdot (k + 2) = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3}$$

Factorizando por $(k + 1)(k + 2)$, se tiene $(k + 1)(k + 2)(1 + \frac{k}{3}) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$, que es justamente la tesis deseada y lo que prueba que $p(n)$ es verdadera para todo natural n

2) Pruebe que para todo número natural $n > 1$, el último dígito del número $2^{2^n} + 1$ es 7.

Demostración.

Denotando por $p(n)$ la proposición a demostrar, podemos observar que para $n = 2$, $2^{2^2} + 1 = 17$ y la proposición es verdadera.

Nuestra hipótesis inductiva es para $n = k$, es decir aceptamos que el último dígito de $2^{2^k} + 1$ es 7.

Tesis: Por demostrar que el último dígito de $2^{2^{k+1}} + 1$ es 7

Notando que $2^{2^{k+1}} + 1 = (2^{2^k} + 1)^2 - 2(2^{2^k} + 1) + 2$ podemos concluir con la ayuda de la hipótesis inductiva que el último dígito de $(2^{2^k} + 1)^2$ es 9, el último

dígito de $2(2^{2^k} + 1)$ es 4 que luego al restarlos y sumarle 2, se demuestra la proposición.

3) Demuestre que para todo natural $n \geq 2$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

Demostración

Sea $p(n)$ la proposición dada, luego para $n = 2$, se tiene que $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$. La proposición verdadera.

Hipótesis de inducción: $n = k$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k}$$

Tesis: $n = k + 1$, Por demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1}$$

Sumando $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ a la igualdad de la hipótesis inductiva se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Como

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k^2 + k} + 1}{\sqrt{k+1}} > \frac{k+1}{\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1}$$

se concluye la demostración.

4) Demuestre que para todo natural n , $n^5 - n$ es divisible por 5.

Demostración.

Sea $p(n)$ la proposición dada, luego para $n = 1$ se tiene que $0 = 5 \cdot 0$ lo cual es verdadero.

Hipótesis de inducción: $n = k$, $k^5 - k$ es divisible por 5

Tesis: $n = k + 1$, Por demostrar que $(k+1)^5 - (k+1)$ es divisible por 5

Dado que nuestra única información es la hipótesis debemos hacer que la expresión $k^5 - k$, aparezca en nuestro desarrollo

En efecto,

$$(k+1)^5 - (k+1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 4k$$

y es igual a

$$k^5 - k + 5k(k^3 + 2k^2 + 2k + 1)$$

de donde ambos sumandos son divisibles por 5, luego para todo natural n , $n^5 - n$ es divisible por 5.