PROBLEMAS RESUELTOS

PROGRESIONES ARITMETICAS

1. Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones son progresiones aritméticas:

a) $1, 6, 11, 16, \ldots$ es una p. a. ya que $6 - 1 = 11 - 6 = 16 - 11 = 5$. $(d = 5)$

b) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$ es una p. a. ya que $1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$. $(d = \frac{2}{3})$

c) $4, -1, -6, -11, \ldots$ es una p. a. ya que $-1 - 4 = -6 - (-1) = -11 - (-6) = -5$. $(d = -5)$

d) $9, 12, 16, \ldots$ no es una p. a. ya que $12 - 9 \neq 16 - 12$.

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ no es una p. a. ya que $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$.

f) $7, 9 + 3p, 11 + 6p, \ldots$ es una p. a. con $d = 2 + 3p$.

2. Deducir la fórmula $S = \frac{n}{2}(a + l)$ de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética se puede escribir:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + l \qquad (n \text{ términos})$$

o

$$S = l + (l - d) + (l - 2d) + \ldots + a \qquad (n \text{ términos})$$

en la que se ha escrito la suma en orden inverso.

Sumando, $2S = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots + (a + l)$ para n términos

$$2S = n(a + l) \quad \text{y} \quad S = \frac{n}{2}(a + l)$$

3. Hallar el dieciseisavo término de la p. a.: $4, 7, 10, \ldots$

Tenemos $a = 4$, $n = 16$, $d = 7 - 4 = 10 - 7 = 3$, y $l = a + (n - 1)d = 4 + (16 - 1)3 = 49$.

4. Hallar la suma de los 12 primeros términos de la p. a.: $3, 8, 13, \ldots$

Tenemos $a = 3$, $d = 8 - 3 = 13 - 8 = 5$, $n = 12$, y

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{12}{2}[2(3) + (12 - 1)5] = 366.$$

Otro método: $l = a + (n - 1(d = 3 + (12 - 1)5 = 58$ y

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{12}{2}(3 + 58) = 366.$$

5. Hallar el cuarentavo término y la suma de los 40 primeros términos de la p. a.: $10, 8, 6, \ldots$

Tenemos $d = 8 - 10 = 6 - 8 = -2$, $a = 10$, $n = 40$.

Luego $l = a + (n - 1)d = 10 + (40 - 1)(-2) = -68$ y

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{40}{2}(10 - 68) = -1\,160.$$

6. ¿Qué término de la progresión 5, 14, 23, ... es 239?

$l = a + (n-1)d$, $239 = 5 + (n-1)9$. $9n = 243$ es el término $n = 27$.

7. Hallar la suma de los 100 primeros enteros positivos múltiplos de 7.

La sucesión es 7, 14, 21, ... una p. a. en la cual $a = 7$, $d = 7$, $n = 100$.

Luego $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{100}{2}[2(7) + (100-1)7] = 35\,350$.

8. Hallar cuántos enteros consecutivos a partir de 10 se deben tomar para que su suma valga 2 035.

La sucesión es 10, 11, 12, ... una p. a. en la cual $a = 10$, $d = 1$, $S = 2\,035$.

Aplicando $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, se obtiene $2\,035 = \frac{n}{2}[20 + (n-1)1]$, $2\,035 = \frac{n}{2}(n + 19)$,

$n^2 + 19n - 4\,070 = 0$, $(n - 55)(n + 74) = 0$, $n = 55, -74$. Luego hay que tomar 55 enteros.

9. Hallar el tiempo que se empleará en saldar una deuda de 880 pesetas pagando 25 pesetas el primer mes, 27 pesetas el segundo, 29 pesetas el tercero, etc.

De $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, se obtiene $880 = \frac{n}{2}[2(25) + (n-1)2]$, $880 = 24n + n^2$,

$n^2 + 24n - 880 = 0$, $(n - 20)(n + 44) = 0$, $n = 20, -44$. La deuda se salda en 20 meses.

10. ¿Cuántos términos de la p. a. 24, 22, 20, ... se necesitan para que su suma sea 150? Escribir los términos.

$150 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-2)]$, $n^2 - 25n + 150 = 0$, $(n - 10)(n - 15) = 0$, $n = 10, 15$.

Para $n = 10$: 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6.
Para $n = 15$: 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4.

11. Determinar la p. a. en lo que la suma de los n primeros términos es $n^2 + 2n$.

Término enésimo = suma de n términos − suma de $n - 1$ términos $\quad$ N = L

$= n^2 + 2n - [(n-1)^2 + 2(n-1)] = 2n + 1$. Luego la p. a. es 3, 5, 7, 9, ...

$n^2 - 2n + 1 + 2n - 2$ $\quad n^2 - 2$ $\quad n^2 + 2n - n^2 - 2 =$

12. Demostrar que la suma de n enteros impares consecutivos a partir del 1 es igual a n^2.

Tenemos que hallar la suma de los n primeros términos de la p. a. 1, 3, 5, ...

Tenemos $a = 1$, $d = 2$, $n = n$ y $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)2] = n^2$.

13. Hallar tres números en p. a. sabiendo que la suma del primero y el tercero es 12, y que el producto del primero por el segundo es 24.

Sean los números en p. a. $(a - d)$, a, $(a + d)$. Luego $(a - d) + (a + d) = 12$ de donde $a = 6$.

Por tanto, $(a - d)a = 24$, $(6 - d)6 = 24$ de donde $d = 2$. Luego los números son 4, 6, 8.

14. Hallar tres números en p. a. cuya suma es 21 y cuyo producto es 280.

Sean los números $(a - d)$, a, $(a + d)$. Tendremos $(a - d) + a + (a + d) = 21$ o sea $a = 7$.

Por otra parte $(a - d)(a)(a + d) = 280$, $a(a^2 - d^2) = 7(49 - d^2) = 280$ y $d = \pm 3$.

Los números son 4, 7, 10 o 10, 7, 4.

15. Tres números están en la relación 2 : 5 : 7. Hallar dichos números, sabiendo que si se resta 7 del segundo los números forman una p. a.

Sean los números $2x$, $5x$, $7x$. Los números formando una p. a. son $2x$, $(5x - 7)$, $7x$.

Por tanto $(5x - 7) - 2x = 7x - (5x - 7)$ de donde $x = 14$. Luego los números son 28, 70, 98.

16. Hallar la suma de todos los enteros comprendidos entre 100 y 800 que sean múltiplos de 3.

La p. a. es 102, 105, 108, . . . , 798. Luego $l = a + (n - 1)d$, $798 = 102 + (n - 1)3$, $n = 233$,
y $S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{233}{2}(102 + 798) = 104\,850$.

17. Sobre una superficie horizontal se levanta una rampa de pendiente uniforme por medio de 10 soportes igualmente espaciados. Las alturas de los soportes mayor y menor son 42,5 y 2 metros respectivamente. Hallar la altura de cada uno de los soportes.

De $l = a + (n - 1)d$ tenemos $42\frac{1}{2} = 2 + (10 - 1)d$ y $d = 4\frac{1}{2}$ m.

Luego las alturas son 2, $6\frac{1}{2}$, 11, $15\frac{1}{2}$, 20, $24\frac{1}{2}$, 29, $33\frac{1}{2}$, 38, $42\frac{1}{2}$ metros respectivamente.

18. Un cuerpo cae libremente, partiendo del reposo, y recorre 16 metros durante el primer segundo, 48 metros en el segundo, 80 metros en el tercero, etc. Hallar la distancia que recorre durante el quinceavo segundo y la distancia total que recorre en 15 segundos, partiendo del reposo.

Tenemos $d = 48 - 16 = 80 - 48 = 32$.

Durante el quinceavo segundo recorre una distancia $l = a + (n - 1)d = 16 + (15 - 1)32 = 464$ m.
La distancia total recorrida en 15 segundos es $S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{15}{2}(16 + 464) = 3\,600$ m.

19. Se colocan 8 bolas en línea recta separadas entre sí una distancia de 6 metros. A 6 metros de la primera, al otro lado de las bolas, está situada una persona con una cesta que va andando por la fila recogiéndolas de una en una e introduciéndolas en la misma. Sabiendo que empieza a recogerlas partiendo de la posición en que inicialmente se encuentra, hallar la distancia total que recorrerá hasta que termine la operación

Tenemos $a = 2 \cdot 6 = 12$ m y $l = 2(6 \cdot 8) = 96$ m. Luego $S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{8}{2}(12 + 96) = 432$ m.

20. Demostrar que si los lados de un triángulo rectángulo están en p. a. su relación es 3 : 4 : 5.

Sean los lados $(a - d)$, a, $(a + d)$, siendo la hipotenusa $(a + d)$.

Tendremos $(a + d)^2 = a^2 + (a - d)^2$ o sea $a = 4d$. Luego $(a - d) : a : (a + d) = 3d : 4d : 5d = 3 : 4 : 5$.

MEDIAS ARITMETICAS

21. Deducir la fórmula de la media aritmética (x) entre dos números p y q.

Como p, x, q están en p. a., tenemos $x - p = q - x$ o seá $x = \frac{1}{2}(p + q)$.

22. Hallar la media aritmética de los pares de números siguientes:

a) 4 y 56. Media aritmética $= \dfrac{4 + 56}{2} = 30$.

b) $3\sqrt{2}$ y $-6\sqrt{2}$. Media aritmética $= \dfrac{3\sqrt{2} + (-6\sqrt{2})}{2} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $a + 5d$ y $a - 3d$. Media aritmética $= \dfrac{(a + 5d) + (a - 3d)}{2} = a + d$.

33. Situar 5 medias aritméticas entre 8 y 26.

Tenemos que hallar una p. a. de la forma 8, —, —, —, —, —, 26; por tanto, $a = 8$, $l = 26$ y $n = 7$.

Luego $l = a + (n - 1)d$, $26 = 8 + (7 - 1)d$, $d = 3$.

Las cinco medias aritméticas son 11, 14, 17, 20, 23.

34. Situar entre 1 y 36 un número de medias aritméticas de tal forma que la suma de la progresión aritmética resultante sea 148.

$S = \frac{1}{2}n(a + l)$, $\quad 148 = \frac{1}{2}n(1 + 36)$, $\quad 37n = 296 \quad$ y $\quad n = 8$.

$l = a + (n - 1)d$, $\quad 36 = 1 + (8 - 1)d$, $\quad 7d = 35 \quad$ y $\quad d = 5$.

La progresión aritmética completa es 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.

PROGRESIONES GEOMETRICAS

35. Determinar cuáles de las sucesiones siguientes son progresiones aritméticas:

a) 3, 6, 12, . . . es una p. g. ya que $\dfrac{6}{3} = \dfrac{12}{6} = 2$. $\quad (r = 2)$

b) 16, 12, 9, . . . es una p. g. ya que $\dfrac{12}{16} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. $\quad (r = \frac{3}{4})$

c) -1, 3, -9, . . . es una p. g. ya que $\dfrac{3}{-1} = \dfrac{-9}{3} = -3$. $\quad (r = -3)$

d) 1, 4, 9, . . . no es una p. g. ya que $\dfrac{4}{1} \neq \dfrac{9}{4}$.

e) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{9}, \ldots$ es una p. g. ya que $\dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2/9}{1/3} = \dfrac{2}{3}$. $\quad (r = \frac{2}{3})$

f) $2h, \dfrac{1}{h}, \dfrac{1}{2h^3}, \ldots$ es una p. g. ya que $\dfrac{1/h}{2h} = \dfrac{1/2h^3}{1/h} = \dfrac{1}{2h^2}$. $\quad (r = \dfrac{1}{2h^2})$

36. Deducir la fórmula $S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica se puede escribir:

1) $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$ $\quad$ (n términos). $\quad$ Multiplicando 1) por r, se obtiene

2) $rS = \phantom{a +{}} ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$ $\quad$ (n términos). $\quad a(-r)(-r^n+1)$

Restando 1) de 2), $\quad rS - S = ar^n - a$, $\quad (r - 1)S = a(r^n - 1)$ $\quad$ y $\quad S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$. $\quad a(1-r^n)$

$(-r)(1-r) \quad 1-r$

37. Hallar el octavo término y la suma de los ocho primeros términos de la progresión 4, 8, 16, . . .

Tenemos $a = 4$, $r = 8/4 = 16/8 = 2$, $n = 8$.

El octavo término es $l = ar^{n-1} = 4(2)^{8-1} = 4(2^7) = 4(128) = 512$.

La suma de los ocho primeros términos es $S = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} = \dfrac{4(256 - 1)}{1} = 1\,020$.

38. Hallar el séptimo término y la suma de los siete primeros términos de la progresión 9, -6, 4, . . .

Tenemos $a = 9$ $\quad r = \dfrac{-6}{9} = \dfrac{4}{-6} = -\dfrac{2}{3}$, luego el séptimo término es $l = ar^{n-1} = 9(-\dfrac{2}{3})^{7-1} = \dfrac{64}{81}$.

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{9[1 - (-2/3)^7]}{1 - (-2/3)} = \frac{9[1 - (-128/2187)]}{5/3} = \frac{463}{81}$$

29. El segundo término de una p. g. es 3 y el quinto es 81/8. Hallar el octavo.

Quinto término $= ar^4 = \frac{81}{8}$, Segundo término $= ar = 3$. Luego $\frac{ar^4}{ar} = \frac{81/8}{3}$, $r^3 = \frac{27}{8}$ y $r = \frac{3}{2}$.

Por tanto, el octavo término $= ar^7 = (ar^4)r^3 = \frac{81}{8}(\frac{27}{8}) = \frac{2187}{64}$.

30. Hallar tres números en p. g. cuya suma es 26 y cuyo producto es 216.

Sean los números en p. g. a/r, a, ar. Se tiene $(a/r)(a)(ar) = 216$, $a^3 = 216$ y $a = 6$.

Por otra parte $a/r + a + ar = 26$, $6/r + 6 + 6r = 26$, $6r^2 - 20r + 6 = 0$ de donde $r = 1/3, 3$.

Para $r = 1/3$, los números son 18, 6, 2; para $r = 3$, los números son 2, 6, 18.

31. El primer término de una p. g. es 375 y el cuarto es 192. Hallar la razón y la suma de los cuatro primeros términos.

Primer término $= a = 375$, cuarto término $= ar^3 = 192$. Luego $375r^3 = 192$, $r^3 = 64/125$ de donde $r = 4/5$.

La suma de los cuatro primeros términos es $S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{375[1 - (4/5)^4]}{1 - 4/5} = 1\,107$.

32. El primer término de una p. g. es 160 y la razón es 3/2. Hallar los términos consecutivos que se deben tomar para que su suma sea 2 110.

$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $2\,110 = \frac{160[(3/2)^n - 1]}{3/2 - 1}$, $(\frac{3}{2})^n - 1 = \frac{211}{32}$, $(\frac{3}{2})^n = \frac{243}{32} = (\frac{3}{2})^5$, $n = 5$.

Los cinco términos consecutivos son 160, 240, 360, 540, 810.

33. Una progresión geométrica de razón positiva consta de cuatro términos. Sabiendo que la suma de los dos primeros es 8 y que la correspondiente de los dos últimos es 72, determinar dicha progresión.

Los cuatro términos son a, ar, ar^2, ar^3. Se tiene $a + ar = 8$ y $ar^2 + ar^3 = 72$.

Luego $\frac{ar^2 + ar^3}{a + ar} = \frac{ar^2(1 + r)}{a(1 + r)} = r^2 = \frac{72}{8} = 9$, de donde $r = 3$.

Como $a + ar = 8$, $a = 2$ y la progresión es 2, 6, 18, 54.

34. Demostrar que x, $x + 3$, $x + 6$ no pueden formar una progresión geométrica.

Si x, $x + 3$, $x + 6$ forman p. g. se tiene $r = \frac{x + 3}{x} = \frac{x + 6}{x + 3}$, $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x$ o sea $9 = 0$.

Como esta igualdad nunca puede ser cierta, x, $x + 3$, $x + 6$ no pueden estar en p. g.

35. Un muchacho gana una peseta el primer día, dos pesetas el segundo, cuatro el tercero, ocho el cuarto, etc. Hallar el número de pesetas que ganará al cabo de 12 días.

Tenemos $a = 1$, $r = 2$, $n = 12$.

$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = 2^{12} - 1 = 4\,096 - 1 = 4\,095$ cént $= 40{,}95$ pts.

Se estima que la población de una cierta ciudad se incrementará en un 10% anual durante cuatro años. ¿En qué tanto por ciento aumentará la población después de los cuatro años? $z_1 = p$

$z_2 = 1{,}10p$

Sea p la población inicial. Después de un año la población es $1{,}10p$; después de dos años, $(1{,}10)^2p$; después de tres años, $(1{,}10)^3p$; y después de cuatro años, $(1{,}10)^4p = 1{,}46p$. Por tanto, la población aumentará en un 46 %. $z_3 = (1{,}10)^2 p$

De un depósito, que contiene 240 litros de alcohol, se extraen 60 litros y se sustituyen por agua. A continuación se extraen 60 litros de la mezcla y se les remplazan por agua, etc. Hallar el número de litros de alcohol que habrá en el depósito después de haber efectuado 5 extracciones de 60 litros.

Después de la primera extracción quedan en el depósito $240 - 60 = 180$ litros de alcohol.

Después de la segunda quedan $180(\frac{240 - 60}{240}) = 180(\frac{3}{4})$ litros de alcohol, etc.

El número de litros de alcohol que quedan en el depósito después de cada extracción forman una p. g., 180, $180(\frac{3}{4})$, $180(\frac{3}{4})^2$, ... siendo $a = 180$ y $r = \frac{3}{4}$.

Después de la quinta extracción ($n = 5$): $l = ar^{n-1} = 180(\frac{3}{4})^4 = 57$ litros de alcohol, que son los que contiene el depósito.

Se invierten 400 000 pesetas a un 6% anual. Calcular el capital que se habrá formado al cabo de cinco años si el interés es compuesto *a*) anual, *b*) semestral, *c*) trimestral.

Sea P = capital inicial, i = rédito, en tantos por ciento, por periodo de tiempo.

S = Capital acumulado al cabo de n periodos.

Al final del primer periodo: Interés $= Pi$, capital $= P + Pi = P(1 + i)$.

Al final del segundo periodo: Interés $= P(1 + i)i$, capital $= P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$.

El capital acumulado al cabo de n periodos será, $S = P(1 + i)^n$.

a) Como se cobran los intereses una vez por año, $n = 5$ e $i = 0{,}06$.

$S = P(1 + i)^n = 400\,000(1 + 0{,}06)^5 = 400\,000(1{,}3382) = 535\,280$ pts.

b) Como se cobran los intereses dos veces por año, $n = 2(5) = 10$ e $i = \frac{1}{2}(0{,}06) = 0{,}03$.

$S = P(1 + i)^n = 400\,000(1 + 0{,}03)^{10} = 400\,000(1{,}3439) = 537\,560$ pts.

c) Como se cobran los intereses cuatro veces por año, $n = 4(5) = 20$ e $i = \frac{1}{4}(0{,}06) = 0{,}015$.

$S = P(1 + i)^n = 400\,000(1 + 0{,}015)^{20} = 400\,000(1{,}3469) = 538\,760$ pts.

Hallar el capital (P) que se debe invertir al 4% de interés compuesto semestral para que al cabo de 3,5 años se transforme en un capital (S) de 500 000 pesetas.

Como se cobran intereses dos veces por año, $n = 2(3{,}5) = 7$ (periodos) y el rédito, en tantos por ciento y por periodo, es $i = \frac{1}{2}(0{,}04) = 0{,}02$.

Por tanto, $S = P(1 + i)^n$, de donde $P = S(1 + i)^{-n} = 500\,000(1 + 0{,}02)^{-7} = 500\,000(0{,}87056) = 435\,280$ pts.

MEDIAS GEOMETRICAS

Deducir la fórmula de la media geométrica, G, entre dos números p y q.

Como p, G, q están en progresión geométrica, se tiene $\frac{G}{p} = \frac{q}{G}$, $G^2 = pq$ y $G = \pm\sqrt{pq}$.

Se suele tomar $G = \sqrt{pq}$ si p y q son positivos

y $G = -\sqrt{pq}$ si p y q son **negativos**.

41. Hallar la media geométrica de los pares de números siguientes:

a) 4 y 9. $G = \sqrt{4(9)} = 6$

b) -2 y -8. $G = -\sqrt{(-2)(-8)} = -4$

c) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ y $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. $G = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \sqrt{7 - 3} = 2$

42. Demostrar que la media aritmética A de los números positivos p y q es mayor que o igual a su media geométrica G.

La media aritmética de p y q es $A = \frac{1}{2}(p + q)$. La media geométrica de p y q es $G = \sqrt{pq}$.

Luego $A - G = \frac{1}{2}(p + q) - \sqrt{pq} = \frac{1}{2}(p - 2\sqrt{pq} + q) = \frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$.

Ahora bien $\frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ es siempre positivo o cero; luego $A \geqq G$. ($A = G$ si y solo si $p = q$.)

43. Situar dos medias geométricas entre 686 y 2.

Tenemos que completar la p. g. 686, –, –, 2 siendo $a = 686$, $l = 2$, $n = 4$.

Como $l = ar^{n-1}$, $2 = 686r^3$, $r^3 = 1/343$ y $r = 1/7$.

Luego la p. g. es 686, 98, 14, 2 y las medias son 98, 14.

Nota. Realmente, $r^3 = 1/343$ se satisface para tres valores diferentes de r, uno de ellos real y los otros dos complejos. Aquí prescindimos de las p. g. con términos complejos.

44. Situar cinco medias geométricas entre 9 y 576.

Tenemos que formar la p. g. 9, –, –, –, –, –, 576 siendo $a = 9$, $l = 576$, $n = 7$.

Como $l = ar^{n-1}$, $576 = 9r^6$, $r^6 = 64$, $r^3 = \pm 8$ y $r = \pm 2$.

Luego las progresiones son 9, 18, 36, 72, 144, 288, 576 y 9, -18, 36, -72, 144, -288, 576; y las medias correspondientes son 18, 36, 72, 144, 288 y -18, 36, -72, 144, -288.

PROGRESIONES GEOMETRICAS INDEFINIDAS

45. Hallar la suma de las series geométricas siguientes:

a) $2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots$ $\quad S_\infty = \dfrac{a}{1 - r} = \dfrac{2}{1 - 1/2} = 4$

b) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{27} - \dfrac{8}{81} + \ldots$ $\quad S_\infty = \dfrac{a}{1 - r} = \dfrac{1/3}{1 - (-2/3)} = \dfrac{1}{5}$

c) $1 + \dfrac{1}{1{,}04} + \dfrac{1}{(1{,}04)^2} + \ldots$ $\quad S_\infty = \dfrac{a}{1 - r} = \dfrac{1}{1 - 1/1{,}04} = \dfrac{1{,}04}{1{,}04 - 1} = \dfrac{104}{4} = 26$

46. Expresar los números periódicos siguientes por medio de una fracción racional.

a) 0,444. . . *b*) 0,4272727. . . *c*) 6,305305. . . *d*) 0,78367836. . .

a) $0{,}444\ldots = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + \ldots$, siendo $a = 0{,}4$, $r = 0{,}1$.

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}4}{0{,}9} = \frac{4}{9}$$

b) $0{,}4272727\ldots = 0{,}4 + 0{,}0272727\ldots$,
$0{,}0272727\ldots = 0{,}027 + 0{,}00027 + 0{,}0000027 + \ldots$, siendo $a = 0{,}027$, $r = 0{,}01$.

$$S_\infty = 0{,}4 + \frac{a}{1 - r} = 0{,}4 + \frac{0{,}027}{1 - 0{,}01} = 0{,}4 + \frac{27}{990} = \frac{4}{10} + \frac{3}{110} = \frac{47}{110}$$

c) $6{,}305305\ldots = 6 + 0{,}305305\ldots$

$0{,}305305\ldots = 0{,}305 + 0{,}000305 + \ldots,$ siendo $a = 0{,}305,\ r = 0{,}001.$

$$S_\infty = 6 + \frac{a}{1-r} = 6 + \frac{0{,}305}{1-0{,}001} = 6 + \frac{305}{999} = 6\frac{305}{999}$$

d) $0{,}78367836\ldots = 0{,}7836 + 0{,}00007836 + \ldots,$ siendo $a = 0{,}7836,\ r = 0{,}0001.$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}7836}{1-0{,}0001} = \frac{7\,836}{9\,999} = \frac{2\,612}{3\,333}$$

47. Las amplitudes de las sucesivas oscilaciones de un periodo forman la progresión geométrica. 16, 12, 9, . . . , centímetros. Hallar la distancia total recorrida por la esferilla del péndulo hasta alcanzar el reposo.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{16}{1-3/4} = \frac{16}{1/4} = 64 \text{ centímetros}$$

48. Hallar el menor número de términos que se deben tomar de la serie $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots$ para que su suma difiera de la suma correspondiente a los infinitos términos en menos de $\frac{1}{1\,000}$.

Sea S_∞ = suma de la progresión, S_n = suma de n términos. Luego

$$S_\infty - S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{ar^n}{1-r}$$

Se desea que $\dfrac{ar^n}{1-r} < \dfrac{1}{1\,000}$, siendo $a = 1/3,\ r = 1/2.$

Luego $\dfrac{(1/3)\,(1/2)^n}{1-1/2} < \dfrac{1}{1\,000},\quad \dfrac{1}{3(2^n)} < \dfrac{1}{2\,000},\quad 3(2^n) > 2\,000,\quad 2^n > 666\dfrac{2}{3}.$

Para $n = 9,\ 2^n < 666\frac{2}{3}$; para $n = 10,\ 2^n > 666\frac{2}{3}$. Luego se deben tomar por lo menos 10 términos.

PROGRESIONES ARMONICAS

49. Determinar cuáles de las sucesiones siguientes son progresiones armónicas:

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$ es una progresión armónica ya que $3, 5, 7, \ldots$ es una p. a.

b) $2, 4, 6, \ldots$ no es una progresión armónica ya que $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ no es una p. a.

c) $\frac{1}{12}, \frac{2}{15}, \frac{1}{3}, \ldots$ es una progresión armónica ya que $12, \frac{15}{2}, 3, \ldots$ es una p. a.

50. Calcular el término número 15 de la progresión armónica $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \ldots$

La p. a. correspondiente es $4, 7, 10, \ldots$; su término 15 es $l = a + (n-1)d = 4 + (15-1)3 = 46.$

Luego el término número 15 de la progresión armónica es $\frac{1}{46}$.

51. Deducir la fórmula de la media armónica, H, entre dos números p y q.

Como p, H, q forman una progresión armónica, $\frac{1}{p}, \frac{1}{H}, \frac{1}{q}$ es una progresión aritmética.

Luego $\dfrac{1}{H} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{H},\quad \dfrac{2}{H} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{p+q}{pq}$ y $H = \dfrac{2pq}{p+q}.$

Otro método:

Media armónica entre p y q = recíproco de la media aritmética entre $\frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q}$.

Media aritmética entre $\frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = \frac{p+q}{2pq}$.

Luego la media armónica entre p y $q = \frac{2pq}{p+q}$.

52. Hallar la media armónica entre 3/8 y 4:

Media armónica entre $\frac{8}{3}$ y $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\frac{8}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{35}{24}$. Luego la media armónica entre $\frac{3}{8}$ y $4 = 24/35$.

También aplicando la fórmula $= \frac{2pq}{p+q} = \frac{2(3/8)(4)}{3/8+4} = \frac{24}{35}$.

53. Situar cuatro medias armónicas entre 1/4 y 1/64.

Para hallar cuatro medias en la progresión armónica entre 4 y 64 tenemos: $l = a + (n-1)d$, $64 = 4 + (6-1)d$, $d = 12$. Así, pues, las cuatro medias en la progresión aritmética entre 4 y 64 son, 16, 28, 40, 52.

Luego las cuatro medias en la progresión armónica entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{64}$ son $\frac{1}{16}, \frac{1}{28}, \frac{1}{40}, \frac{1}{52}$.

54. Hallar las medias armónicas entre 10 y 20.

Para hallar tres medias armónicas entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{20}$: $l = a + (n-1)d$, $\frac{1}{20} = \frac{1}{10} + (5-1)d$, $d = -\frac{1}{80}$.

Las tres medias aritméticas entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{20}$ son $\frac{7}{80}, \frac{6}{80}, \frac{5}{80}$.

Luego las tres medias armónicas entre 10 y 20 son $\frac{80}{7}, \frac{40}{3}, 16$.

55. Determinar si la sucesión $-1, -4, 2$ es una progresión aritmética, geométrica o armónica.

Como $-4-(-1) \neq 2-(-4)$, no es una progresión aritmética.

Como $\frac{-4}{-1} \neq \frac{2}{-4}$, no es una progresión geométrica.

Como $\frac{1}{-1}, \frac{1}{-4}, \frac{1}{2}$ es una progresión aritmética, ya que $\frac{1}{-4} - (-1) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{-4})$, la sucesión dada es una progresión armónica.