Quinta Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

30 de Octubre del 2013

1. Encuentre el dominio de las siguientes funciones reales

$$a) f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$e) f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$b) f(x) = \sqrt{-2x + 3}$$

$$f) f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x}} + \frac{\sqrt{x+1}}{2}$$

$$c) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 + 5x + 11}$$

$$g) f(x) = \sqrt{x^2 - x - 20}$$

$$d) f(x) = |x|/x$$

$$h) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 20}}$$

2. Para cada una de las siguientes fórmulas encuentre: dominio, recorrido, $f([2, 5])$, $f^{-1}([-3, -1])$, $f^{-1}(0)$, y $f^{-1}(y)$ para cada $y \in \text{Rec}(f)$.

$$a) f(x) = -x^2 + 3x - 1.$$

$$b) f(x) = \frac{x}{x-1}.$$

$$c) f(x) = \frac{-1}{x^2}.$$

$$d) f(x) = -|x - 2| + 2.$$

3. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x^2 + x + c$. Encontrar dos elementos en el dominio de f que tengan la misma imagen y con esto concluir que f no es inyectiva.
4. Demostrar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función par, entonces f no es inyectiva.
5. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 3| + |x + 3|$. ¿Es f una función par, impar? ¿Es f una función inyectiva, epiyectiva?
6. Encuentre el mayor conjuntos $B \subset \mathbb{R}$ de tal forma que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow B$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ se epiyectiva. Demuestre que con el conjunto B encontrado, efectivamente f es epiyectiva.

7. Encuentre el mayor conjuntos $B \subset \mathbb{R}$ de tal forma que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow B$ definida por $f(x) = |x|/x$ se epiyectiva. Demuestre que con el conjunto B encontrado, efectivamente f es epiyectiva.
8. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función impar que cumple con que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre:
- $f(x-y) = f(x) - f(y)$.
 - $f(0) = 0$.
 - Si $x = 0$ es el único elemento de $\mathbb{R}$ cuya imagen es cero, entonces f es inyectiva.
9. Si se sabe que por servicio de estacionamiento se cobra \$400 por cada media hora o fracción. Describa la cuenta $C(x)$, que deberá pagar un automovilista que se estacionó en el lugar por t [min]. Grafique la función C .
10. Si se sabe que un rectángulo tiene 400 [cm] de perímetro. Expresar su área como función uno de sus lados. ¿Es cierto que de todos los rectángulos de parímetro 400 [cm] existe uno de mayor área?
11. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \sqrt{x+4}$. Encuentre
- $f + g$
 - $f \cdot g$
 - f/g
 - $f \circ g$
 - $g \circ f$

Con sus respectivos dominios.

12. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } x > -1 \end{cases}$ y $g(x) = |x - 1|$. Encuentre $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$ indicando dominio de cada una. Grafique $f, g, (g \circ f)$ y $(f \circ g)$.
13. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x - 11 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ y $g(x) = x^2 + 4x - 2$. Encuentre $(g \circ f)$ y $(f \circ g)$ indicando dominio de cada una. Grafique $f, g, (g \circ f)$ y $(f \circ g)$.
14. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-3\}$ definida por $f(x) = \frac{3x+2}{1-x}$. Encuentre la inversa de f . Grafique f y f^{-1} indicando intersecciones con los ejes.

15. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son funciones inyectivas, demostrar que $(g \circ f)$ es una función inyectiva.
16. Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son funciones epiyectivas, demostrar que $(g \circ f)$ es una función epiyectiva.
17. Sean f y g funciones biyectivas, tales que $(f \circ g)(\frac{2}{5}) = \frac{3}{4}$, $f(\frac{2}{5}) = \frac{4}{3}$, $f^{-1}(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$. Hallar $g^{-1}(\frac{1}{2})$ y $(f \circ g^{-1})(\frac{1}{2})$.