3.4. Inducción

Axioma de Inducción. Sean $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y A el conjunto de los naturales que son iguales o mayores que m, es decir:

$$A = \{n \;/\; n \geq m, m \in \mathbb{N}_0\}.$$

Si S es un subconjunto de A con las siguientes dos propiedades:

1. Contiene a m,
2. $\forall\, k \in A$: si $k \in S$,

entonces $(k+1) \in S$, luego el conjunto S es igual a A. En muchas aplicaciones de este axioma se tiene que $m = 1$, por tanto $\mathbb{N} = A$.

Cuando se use este axioma para demostrar propiedades del tipo que estamos considerando, el conjunto A y la forma proposicional $p(n)$, $n \in \mathbb{N}$, nos lo dan en la proposición de la propiedad. Se toma S como el subconjunto de A que contiene aquellos naturales para los cuales $p(n)$ es verdad. Así podemos volver a formular el axioma como un proceso operacional que se acostumbra a llamar *Principio de Inducción Matemática.*

Principio de Inducción. Sea $A = \{n \;/\; n \geq m, m \in \mathbb{N}_0\}$ una proposición de la forma $\forall\, n \in A : p(n)$, probaremos la verdad de esta proposición estableciendo lo siguiente:

1. $p(m)$ es verdad.

2. $\forall\, n \in A$, la implicación $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ es verdad.

Notemos que usualmente $m = 1$, luego $A = \{n \ / \ n \geq 1\}\} = \mathbb{N}$. También suponer la verdad de $p(n)$, se acostumbra a llamar hipótesis inductiva (H.I).

Ejemplo 3

Demostrar $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Demostración.

Se tiene que: $m = 1$, $A = \{n \ / \ n \geq 1\}$,

$$p(n) : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

1. $p(1)$ es verdad, pues $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$
2. $p(n)$ es verdad, es decir, se cumple

   $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad \text{(H.I.)}$$

   entonces $p(n+1)$, es decir, debemos establecer que:

   $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \qquad \text{(T.)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Demostrar $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que

$$a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

es divisible por 133.

Demostración.

Se tiene que: $m = 1$, $A = \{n \;/\; n \geq 1\}$

$$a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133p, \qquad \forall\, p \in \mathbb{Z}^+$$

1. $a_1 = 11^3 + 12^3 = 3059 = 133 \cdot 23$, es verdad.

2. Sea
$$a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133p, p \in \mathbb{Z}^+ \qquad \text{(H.I.)}$$
entonces,
$$a_{n+1} = 11^{n+3} + 12^{2n+3} \text{ sea divisible por } 133 \qquad \text{(T.)}$$
En efecto:
$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 11^{n+2} \cdot 11 + 12^{2n+1} \cdot 12^2 \\
a_{n+1} &= 11(11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 12^{2n+1}12^2 - 11 \cdot 12^{2n+1} \\
a_{n+1} &= 11a_n + 12^{2n+1}(12^2 - 11) \\
a_{n+1} &= 11 \cdot 133p + 12^{2n+1} \cdot 133 \\
a_{n+1} &= 113 \cdot (11p + 12^{2n+1})
\end{aligned}$$
lo que prueba la tesis.

Principio General de Inducción.

3.5. Ejercicios Resueltos

1. Demuestre que si n es cualquier entero positivo, $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

   Demostración.
   Sea $S = \{n \in \mathbb{N} \ / \ \frac{1}{3}(n^3+2n) \text{ es un entero}\}$.

   i) $1 \in S$, pues $\frac{1}{3}(1^3+2\cdot 1) = 1$ y 1 es un entero.
   ii) Si $n \in S$ se tiene que $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero. (H.I.)
   Por demostrar que $(n+1) \in S$.

   En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}[(n+1)^3+2(n+1)] &= \frac{1}{3}(n^3+3n^2+3n+1+2n+2) \\ &= \frac{1}{3}(n^3+2n)+(n^2+n+1) \end{aligned}$$

   es un entero, pues $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ lo es por (H.I.) y n^2+n+1 es un entero, pues n lo es, así $n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$, por tanto, $S = \mathbb{N}$.

   Nota: en adelante vamos a dejar de formular al conjunto A o bien S, dejándolo sobreentendido, pero el lector, si es su deseo, bien puede hacerlo.

2. Si $u_{i+1} = 2u_i + 1$, $i \in \mathbb{N}$. Demostrar que $u_n + 1 = 2^{n-1}(u_1+1)$.

   Demostración.

   i) Para $n = 1 \Rightarrow u_1 + 1 = 2^{1-1}(u_1+1) = u_1 + 1$.
   ii) Hipótesis Inductiva: para $n = k \Rightarrow u_k + 1 = 2^{k-1}(u_1+1)$.
   Por demostrar para $n = k+1$, o sea, $u_{k+1} + 1 = 2^k(u_1+1)$.

   En efecto, en la hipótesis del problema hagamos $i = k$, luego

$$u_{k+1} = 2u_k + 1 \Rightarrow u_{k+1} + 1 = 2u_k + 2 = 2(u_k+1),$$

   usando la hipótesis inductiva:

$$\Rightarrow u_{k+1} + 1 = 2(2^{k-1}(u_1+1)) = 2^k(u_1+1).$$

3. Sabiendo que: $4 = \frac{3}{u_1} = u_1 + \frac{3}{u_2} = u_2 + \frac{3}{u_3} = \ldots = u_n + \frac{3}{u_{n+1}}$.

   Demostrar: $u_n = \frac{3^{n+1}-3}{3^{n+1}-1}$.

   Demostración.

   i) Para $n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{4}$; $u_1 = \frac{3^{1+1}-3}{3^{1+1}-1} = \frac{9-3}{9-1} = \frac{3}{4}$.

   ii) Hipótesis inductiva: para $n = k \Rightarrow u_k = \frac{3^{k+1}-3}{3^{k+1}-1}$, por demostrar para $n = k+1$, o sea, $u_{k+1} = \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+2}-1}$.

   En efecto, por hipótesis del problema tenemos:

$$4 = u_k + \frac{3}{u_{k+1}} \Rightarrow u_{k+1} = \frac{3}{4 - u_k};$$

   ahora, usando la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{3}{4 - (3^{k+1}-3)/(3^{k+1}-1)} \\ &= \frac{3(3^{k+1}-1)}{4 \cdot 3^{k+1} - 4 - 3^{k+1} + 3} \\ u_{k+1} &= \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+1}(4-1)-1} \\ &= \frac{3^{k+2}-3}{3^{k+2}-1} \end{aligned}$$

4. Si $u_1 = 0$ y $u_{n+1} = (1+x)u_n - nx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, demostrar que:

$$u_n = \frac{1}{x}[1 + nx - (1+x)^n], \quad x \neq 0.$$

   Demostración.

   i) Para $n = 1$, $u_1 = 0$; $u_1 = \frac{1}{x}[1 + x - (1+x)] = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$.

   ii) Hipótesis inductiva. Para $n = k \Rightarrow u_k = \frac{1}{x}[1 + kx - (1+x)^k]$, por demostrar para $n = k+1$, o sea,

$$u_{k+1} = \frac{1}{x}[1 + (k+1)x - (1+x)^{k+1}].$$

En efecto, hacemos $n = k$ en la hipótesis del problema $u_{k+1} = (1 + x)u_k - kx$, ahora reemplazando la hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= (1+x)\frac{1}{x}[1+kx-(1+x)^k] - kx \\
\Rightarrow u_{k+1} &= \frac{1}{x}[(1+x)+(1+x)kx-(1+x)(1+x)^k] - kx \\
&= \frac{1}{x}[1+x+kx+kx^2-(1+x)^{k+1}-kx^2] \\
\Rightarrow u_{k+1} &= \frac{1}{x}[1+x+kx-(1+x)^{k+1}] \\
&= \frac{1}{x}[1+(1+k)x-(1+x)^{k+1}]
\end{aligned}$$

5. Demuestre $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que: $2^{n+4} > (n+4)^2$.

   Demostración.

   i) Para $n = 1$; $2^{1+4} > (1+4)^2 \Rightarrow 2^5 > 5^2 \Rightarrow 32 > 25$.

   ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow 2^{k+4} > (k+4)^2$.
   Por demostrar para $n = k+1$, o sea, $2^{k+5} > (k+5)^2$.

   En efecto, como
   $2^{k+4} > (k+4)^2 \Rightarrow 2^{k+4} \cdot 2 > (k+4)^2 \cdot 2$
   $\Rightarrow 2^{k+5} > 2k^2 + 16k + 32$
   $\Rightarrow 2^{k+5} > k^2 + 10k + 25 + k^2 + 6k + 7$ y como

   $k^2 + 10k + 25 + k^2 + 6k + 7 > k^2 + 10k + 25 \Rightarrow$
   $2^{k+5} > k^2 + 10k + 25 \Rightarrow 2^{k+5} > (k+5)^2$.

6. Demuestre $\forall\, n \in \mathbb{Z}$; $n \geq 1$; $h \geq -1$; que:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

   Demostración.

   i) Para $n = 1$; $(1+h)^1 \geq 1 + h \Rightarrow 1 + h = 1 + h$.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow (1+h)^k \geq 1 + kh$.
Por demostrar para $n = k+1$, o sea, $(1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h$,.

En efecto, como $(1+h) \geq 0$, tenemos:

$(1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h)$

$\Rightarrow (1+h)^{k+1} \geq 1 + h + kh + kh^2 \geq 1 + h + kh$ pues $kh^2 \geq 0$

$\Rightarrow (1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1)h$

7. Demostrar que los números de la forma $u_n = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ son divisibles por 54.

Demostración.

i) Para $n = 1$; $u_1 = 2^3 - 9 + 3 - 2 = 0$ y 0 es divisible por 54.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow u_k = 2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2$ es divisible por 54.
Por demostrar para $n = k+1$, o sea que $u_{k+1} = 2^{2k+3} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2$ sea divisible por 54.

En efecto:

$$u_{k+1} - u_k = 2^{k+1}(2^2 - 1) - 18k - 6 = 3(2^{2k+1} - 6k - 2),$$

sumando y restando $27k^2$, tenemos:

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= 3[2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2] + 27k^2 - 27k \\ \Rightarrow u_{k+1} - u_k &= 3u_k + 27(k)(k-1) \end{aligned}$$

ahora como el producto de dos números consecutivos es par, podemos poner

$$k(k-1) = 2S, (S \in \mathbb{N}),$$

luego:

$$u_{k+1} - u_k = 3u_k + 54S \Rightarrow u_{k+1} = 4u_k + 54S$$

como por hipótesis inductiva

$$4u_k = 54p, (p \in \mathbb{N}) \Rightarrow u_{k+1} = 54(S+p)$$

con lo que u_{k+1} es divisible por 54.

8. Demostrar que $u_n = 3^{4n+2} + 5^{2n+1}$ es múltiplo de 14.

Demostración.

i) Para $n = 1$, $u_1 = 3^{4\cdot1+2} + 5^{2\cdot1+1} = 854$, es múltiplo de 14.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow u_k = 3^{4k+2} + 5^{2k+1}$ es múltiplo de 14.

Por demostrar que para $n = k + 1 \Rightarrow u_{k+1} = 3^{4k+6} + 5^{2k+3}$ es múltiplo de 14.

En efecto, sea:

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= 80 \cdot 3^{4k+2} + 5^{2k+1} \cdot 24 \\ &= 24(3^{4k+2} + 5^{2k+1}) + 56 \cdot 3^{4k+2} \\ u_{k+1} - u_k &= 24u_k + 14 \cdot 4 \cdot 3^{4k+2} \Rightarrow \\ u_{k+1} &= 25u_k + 14S, S = 4 \cdot 3^{4k+2} \end{aligned}$$

Como u_k es múltiplo de 14, ambos sumandos son múltiplos de 14, luego u_{k+1} es múltiplo de 14.

9. Demostrar que $\forall\ n \in \mathbb{N}$; $f(n) = 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ es divisible por 9.

Demostración.

i) Para $n = 1$; $f(1) = 10^1 + 3 \cdot 4^{1+2} + 5 = 207$.

ii) Por hipótesis inductiva, para $n = k \Rightarrow f(k) = 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5$ es divisible por 9.

Por demostrar que para $n = k + 1 \Rightarrow f(k + 1) = 10^{k+1} + 3 \cdot 4^{k+3} + 5$ sea divisible por 9. En efecto, sea:

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= 10^k(10 - 1) + 3 \cdot 4^{k+2}(4 - 1) \\ &= 9 \cdot 10^k + 9 \cdot 4^{k+2} \\ \Rightarrow f(k+1) &= 9(10^k + 4^{k+2}) + f(k) \end{aligned}$$

como $f(k)$ es divisible por 9 y también $9(10^k + 4^{k+2})$, tenemos que $f(k + 1)$ es divisible por 9.

10. Demostrar:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1}\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^n\alpha}{2^n \operatorname{sen}\alpha}$$

$(\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Demostración.

i) Para $n = 1$, $\cos\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} = \cos\alpha$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k$:

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2\alpha^{k-1}\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^k\alpha}{2^k \operatorname{sen}\alpha}$$

Por demostrar, para

$$n = k+1 \Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2^k\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{2k+1}\alpha}{2^{k+1} \operatorname{sen}\alpha}$$

en efecto, multiplicando la hipótesis inductiva por $\cos 2^k\alpha$, tenemos

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2^{k-1}\alpha \cdot \cos 2^k\alpha &= \frac{\operatorname{sen} 2^k\alpha}{2^k \operatorname{sen}\alpha} \cdot \cos 2^k\alpha \\
\Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 2^k\alpha &= \frac{2\operatorname{sen} 2^k\alpha \ \cos 2^k\alpha}{2 \cdot 2^k \operatorname{sen}\alpha} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2(2^k\alpha)}{2^{k+1} \operatorname{sen}\alpha} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1}\alpha}{2^{k+1} \operatorname{sen}\alpha}
\end{aligned}$$

11. Demostrar que $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

Demostración.

i) Para $n = 1$, $\cos\pi = (-1)^1 \Leftrightarrow (-1) = (-1)$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k$; $\cos(k\pi) = (-1)^k$.

Por demostrar, para $n = k+1 \Rightarrow \cos[(k+1)\pi] = (-1)^{k+1}$. En efecto, como:

$$\begin{aligned} \cos(k\pi) &= (-1)^k \\ \cos(k\pi)(-1) &= (-1)^k(-1) \\ \cos(\pi + k\pi) &= (-1)^{k+1} \\ \cos[(k+1)\pi] &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

12. Demostrar $\forall\ n \in \mathbb{Z};\ n \geq 4$, que $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! > 2^n$.

Demostración.

i) Para $n = 4$: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 \Rightarrow 24 > 16$.

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k$, $k \geq 4$: $k! > 2^k$

Por demostrar, para $n = k+1 \Rightarrow (k+1)! > 2^{k+1}$, en efecto, como

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k > 2^k &\Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) > 2^k(k+1) \\ &\Rightarrow (k+1)! > 2^k(k+1) \qquad (*) \end{aligned}$$

Dado que,

$$\begin{aligned} \forall\ k \geq 4 &\Rightarrow k+1 > 4 \Rightarrow 2^k(k+1) > 4 \cdot 2^k \\ &\Rightarrow 2^k(k+1) > 4 \cdot 2^k > 2 \cdot 2^k \Rightarrow 2^k(k+1) > 2^{k+1} \qquad (**) \end{aligned}$$

luego, por (*) y (**) concluimos $(k+1)! > 2^{k+1}$.

13. Se definen los números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mediante $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Demostrar que $a_n < 2$ para todo n.

Demostración.

a) Para $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2} < 2$.

b) Hipótesis inductiva, para $n = k : a_k < 2$, por demostrar para $n = k+1$, o sea: $a_{k+1} < 2$. En efecto, como $a_k < 2 \Rightarrow 2a_k < 4 \Rightarrow \sqrt{2a_k} < \sqrt{4} \Rightarrow$ por definición $\sqrt{2a_k} = a_{k+1}$ luego $a_{k+1} < 2$.

14. Demostrar $\forall\, n \in \mathbb{N}$, que

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$$

Demostración.

i) Para $n=1 \Rightarrow \frac{1}{2}=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$ verdadero.

ii) Sea válido para n, o sea se verifica que

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n} \qquad \text{(H.I.)}$$

Por demostrar para $n+1$, o sea que:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}} \qquad \text{(T)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}} &= 2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}\\
&= 2-\frac{2(n+2)-(n+1)}{2^{n+1}}\\
&= 2-\frac{n+3}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

15. Si $a_1=1, a_2=3, \ldots, a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$, probar que:

i) $a_1<a_3<a_5<\ldots$ y $a_2>a_4>a_6>\ldots$

ii) $a_n=\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

iii) $a_{n+2}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y $a_{n+2}-a_{n+1}=2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

Prueba.

i) Vamos a demostrar que $a_{2n-1}<a_{2n+1}$.

1) Para $n=1$, $a_1<a_3 \Leftrightarrow 1<2$ que es verdad.

2) Sea válido para n, o sea, se cumple $a_{2n-1} < a_{2n+1}$ (H.I.)
En efecto,

$$\begin{aligned} a_{2n-1} < a_{2n+1} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1}) < \frac{1}{2}(a_{2n+1} + a_{2n}) \\ &\Leftrightarrow a_{2n+1} < a_{2n+2} \Leftrightarrow 2a_{2n+1} < a_{2n+2} + a_{2n+1} \\ &\Leftrightarrow a_{2n+1} < \frac{1}{2}(a_{2n+2} + a_{2n+1}) \\ &\Leftrightarrow a_{2n+1} < a_{2n+3}, \end{aligned}$$

análogamente se establece:

$$a_2 > a_4 > a_6 > \ldots$$

ii) 1) Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = 1$ que es verdad.
2) Sea válido para n, o sea, que se verifica

$$a_n = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \text{(H.I.)}$$

Por demostrar para $n+1$, o sea, $a_{n+1} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (T)
En efecto, como $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ y tomando en cuenta el principio general de inducción,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right) \\ a_{n+1} &= \frac{7}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(1-2) \\ a_{n+1} &= \frac{7}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

iii) Como en ii) está establecida la validez de la fórmula para todo n se tiene:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left[\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \\ &= \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Análogamente para $a_{n+2} - a_{n+1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

16. Demuestre que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

    Demostración.
    Sea $S = \{n \in \mathbb{N} \ / \ x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y\}$.

    i) $1 \in S$ pues $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ es divisible por $(x + y)$.

    ii) Si $n \in S$ se tiene que $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x + y$ (H.I.)

    Por demostrar que $(n+1) \in S$, o sea, $x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)}$ sea divisible por $(x + y)$ (T)

    En efecto:

    $$\begin{aligned} x^{2(n+1)} - y^{2(n+1)} &= x^{2n+2} - y^{2n+2} \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n}) + x^2y^{2n} - y^{2n+2} \\ &= x^2(x^{2n} - y^{2n}) + y^{2n}(x - y)(x + y) \end{aligned}$$

    es divisible por $(x + y)$ pues $x^{2n} - y^{2n}$ lo es por hipótesis y el término que se suma contiene a $(x + y)$, por tanto, $(n + 1) \in S$, luego $S = \mathbb{N}$.

3.6. Ejercicios Propuestos

1. Si $a_1 = 1$ y $a_{k+1} = 2a_k + 1$, probar que $a_n = 2^n - 1$.

2. Si $u_1 = 0$ y $u_{k+1} = (1 - x)u_k + kx$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, pruebe que

   $$u_n = \frac{1}{x}[nx - 1 + (1 - x)^n], \quad x \neq 0.$$

3. Probar que si $u_0 = 2$, $u_1 = 3, \ldots, u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1}$, entonces $\forall\ n \geq 0$, $u_n = 2^n + 1$.

4. Siendo $u_1 = c$ y $u_{k+1} = 2u_k + 1$, $\forall\ k \geq 1$, probar que $u_n + 1 = 2^{n-1}(c + 1)$.

5. Se definen los números de Fibonacci inductivamente por:

   $$u_0 = 0, u_1 = 1, \ldots, u_{k+1} = u_k + u_{k-1},$$

   pruebe que:

a) $u_{n+1} \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

b) $u_{n+1} \cdot u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$

c) $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + 1$

d) $u_{n+p-1} = u_{n-1}u_{p-1} + u_n u_p$

6. Se define $u_1 = 1$ y $u_{k+1} = u_k + \frac{1}{k+1}$.
   Pruebe que $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)u_n - n$.

7. Pruebe que:

   a) 9 divide a $(3n+1)7^n - 1$

   b) 15 divide a $2^{4n} - 1$

   c) 2304 divide a $7^{2n} - 48n - 1$

   d) 8 divide a $3^{2n} - 1$

   e) 5 divide a $7 \cdot 16^n + 3$

   f) 64 divide a $7^{2n} + 16n - 1$

   g) 48 divide a $7^{2n} - 1$

   h) 64 divide a $9^n - 8n - 1$

8. Pruebe que:

   a) $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$

   b) $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ es divisible por $x + y$

9. Demuestre que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, que:

   a) $2^n \geq 1 + n$

   b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2,\ n > 1$

   c) $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n},\ n > 1$

   d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}$

   e) $n! > 2^n,\ n \geq 4$

10. Probar que 24 divide a $n(n^2 - 1)$ si n es impar.

11. Demuestre: $n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)$ es divisible por p.

12. Pruebe que:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1), \qquad n \geq 0$$

13. Probar que el producto $(2n+1)$ números reales negativos es un número negativo.

14. Probar que para $n > 2$, la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados es $(n-2)\pi$.

15. Determine la falla del método de inducción en la demostración de: $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ la fórmula $p(n) = n^2 - n + 41$ proporciona solo números primos.

16. Demostrar:

    a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$
    b) $2 + 5 + 13 + \ldots + (2^{n-1} + 3^{n-1}) = \frac{1}{2}(2^{n+1} + 3^n - 3)$
    c) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$
    d) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$
    e) $\frac{5}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{7}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3^2} + \frac{9}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots$ (n términos) $= 1 - \frac{1}{(n+1)3^n}$
    f) $\frac{8}{3\cdot 5} - \frac{12}{5\cdot 7} + \frac{16}{7\cdot 9} - \ldots$ (n términos) $= \frac{1}{3} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+3}$
    g) $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{(-4)^n}\right)$

17. Demostrar que:

    a) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$
    b) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\ldots(1+x^{2^n}) = 1 - x^{2^{n+1}}$
    c) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$

18. Demuestre que:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

19. Sean $\mu_1 = 10, \mu_2 = 47 \ldots \mu_n = 23\mu_{n-1} - 60\mu_{n-2}$, $n \geq 3$. Pruebe que: $\mu_n = 20^{n-1} + 3^{n+1}$

20. Dado que $a_0 = 12, a_1 = 11, \ldots, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$, $n \geq 0$. Demuestre que $a_n = 7 \cdot 3^n + 5(-2)^n$.

21. Sean $a_1 = 0, a_2 = 1, \ldots, a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$, $n \geq 2$. Demostrar que:

$$a_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

22. $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2), a_4 = \frac{1}{3}(a_2 + 2a_3), \ldots$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Demostrar que:

$$a_n = a - \frac{3c}{c+3} \left[\left(-\frac{c}{3} \right)^{n-1} - 1 \right], \qquad c = b - a.$$