Capítulo 1

Lógica Simbólica

En matemáticas es fundamental poder reconocer cuándo un razonamiento es correcto y también saber cómo construirlo. Veamos un ejemplo sencillo de un razonamiento en matemáticas. Supongamos nos dicen que cierto número entero positivo es menor que 14. Nos dicen además que el número en cuestión es divisible por 3 y que al sumarle 2 obtenemos un número divisible por 4. ¿Podemos a partir de esta información inferir cual era el número? Veamos. Como el número buscado es divisible por 3 y menor que 14, entonces el número debe ser alguno de los siguientes: 3, 6, 9 o 12. Pero también nos dicen que al sumarle 2 es divisible por 4. Sumemos 2 a cada uno de los números que vimos erán una posible solución y obtenemos: 5, 8, 11 y 14. Como entre estos, el 8 es el único que es divisible por 4, concluimos que el número buscado es el 6. ¿Por qué es correcto este razonamiento? ¿Qué es lo que hace a este argumento inobjetable? Aclarar estas preguntas es el objetivo de este capítulo.

La lógica es la disciplina que se ocupa del estudio de los razonamientos, deducciones e inferencias. Por "razonamiento" entendemos un proceso donde se concluye una afirmación a partir de un conjunto de afirmaciones. Diremos que el razonamiento es "correcto" si cada vez que las afirmaciones iniciales son verdaderas también lo es la afirmación inferida. Una parte importante de la lógica está dedicada al estudio de los razonamientos correctos. Los razonamientos en matemáticas deben ser de ese tipo y solamente de ellos hablaremos en este libro.

En este capítulo lo primero que haremos es precisar que tipo de afirmaciones podemos usar en los razonamientos y después veremos cuales son las reglas que permiten inferir una afirmación a partir de otras. Fundamentalmente nos ocuparemos de la parte de la lógica llamada **lógica proposicional**, que trata de la propiedades formales de las proposiciones y de las reglas de inferencia. Todo esto con el fin de facilitar el aprendizaje de métodos para hacer demostraciones que son una herramienta imprescindible para el estudio de las matemáticas. El lector interesado en profundizar el estudio de la lógica puede consultar los libros [12, 14].

1.1. Proposiciones y tablas de verdad

Ya hemos dicho que para entender cuales razonamientos son correctos, debemos en primer lugar determinar el tipo de afirmaciones permitidas en los razonamientos. Ese es el objetivo de esta sección.

Una **proposición** es una afirmación de la que podemos decir, sin ambigüedad, si es verdadera o falsa. Las proposiciones corresponden a las oraciones declarativas del lenguaje español.

Ejemplos 1.1. Las siguientes afirmaciones son proposiciones:

1. Mérida es el nombre de una ciudad andina.
2. $1 + 1 = 2$.
3. $1 + 1 = 3$.
4. $2^{1245} < 3^{1001}$.
5. El día 15 de julio de 2008 llovió en la ciudad de Mérida (Venezuela).
6. El cuadrado de todo número par también es par.
7. Todo entero par mayor que 4 es la suma de dos números primos.

La oración 5 es una proposición pues obviamente es verdadera o falsa, aunque lo más probable es que ninguno de los lectores pueda decir si es o no verdadera (pero el autor si lo sabe). La oración 6 es una proposición pues uno acepta, al menos intuitivamente, que lo que dice debe ser verdadero o falso, aunque en este momento no veamos como decidir cual de las dos alternativas se cumple. De hecho, esta proposición es verdadera. Por otra parte, cualquiera que entienda lo que dice la oración 7 debería aceptar que es verdadera o falsa. Sin embargo, hasta hoy no se sabe si es verdadera o falsa. Esta proposición se conoce como la conjetura de Goldbach (matemático Prusiano quién en 1742 propuso este problema) .

$\square$[1]

Ejemplos 1.2. Las siguientes oraciones no son proposiciones:

1. Espérame!
2. ¿Por qué estudias matemáticas?
3. $x + y = x$
4. ¡A estudiar!
5. El es un estudiante.

[1]El símbolo $\square$ lo usaremos para indicar que hemos terminado una definición, una demostración o la presentación de un ejemplo.

La oración 3 no es una proposición, pues no hemos especificado el significado de los símbolos x e y y por esto no podemos decir si es verdadera o falsa. Si dijéramos que

$$x + y = x \text{ para algún } x, y \in \mathbb{Z},$$

entonces esa afirmaición es una proposición verdadera. Pues tenemos, por ejemplo, que cuando $x = 1$ y $y = 0$ se cumple que $x + y = x$. La oración 5 tampoco es una proposición pues no se sabe a quien se refiere el pronombre "El". $\square$

1.1.1. Conectivos lógicos

Las proposiciones se pueden combinar para obtener otras proposiciones utilizando los *conectivos lógicos* (también llamados *enlaces*). Los conectivos son los siguientes:

Negación: " ***No*** *tengo frío* ".
Disyunción: " *El carro es de color rojo* ***o*** *blanco* ".
Conjunción: " $5 < 8$ ***y*** $13 < 27$ ".
Condicional: " ***Si*** *llueve,* ***entonces*** *no voy al cine* ".
Bicondicional: " *Voy al cine* ***si, y sólo si****, no llueve*".

Una proposición que no contenga ningún conectivo se dice que es una **proposición simple**, también se les llama **proposiciones atómicas**. Por ejemplo, la afirmación " 3^4 *es menor que* 100" es una proposición simple. Las proposiciones que contengan algún conectivo se llaman **proposiciones compuestas**. Un ejemplo de proposición compuesta es " 3 *es un número impar y* 28 *es par*".

En general, la oración declarativa con que se expresa una proposición puede ser larga y compleja y por esto es conveniente, para simplificar su presentación y manipulación, sustituirla por un letra. Usaremos las letras P, Q, $R \cdots$ para simbolizar proposiciones. De igual manera, los conectivos serán representados en forma simbólica de la siguiente manera:

$\neg$	para la negación
$\vee$	para la disyunción
$\wedge$	para la conjunción
$\rightarrow$	para el condicional
$\leftrightarrow$	para el bicondicional

$\neg P$	se lee	"no P"
$P \vee Q$	se lee	P ó Q
$P \wedge Q$	se lee	P y Q
$P \rightarrow Q$	se lee	Si P, entonces Q
$P \leftrightarrow Q$	se lee	P si, y sólo si Q

Ejemplo 1.3. Considere las siguiente propocisiones:

$$\begin{array}{lcl} P & = & \text{“está lloviendo”} \\ Q & = & \text{“el Sol está brillando”} \\ R & = & \text{“hay nubes en el cielo”} \end{array}$$

Con estas tres proposiciones simples podemos construir varias proposiciones compuestas como se ilustra a continuación.

Está lloviendo y el Sol está brillando	$P \wedge Q$
Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo	$P \rightarrow R$
Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo	$\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R)$
El Sol está brillando si, y sólo si, no está lloviendo	$Q \leftrightarrow \neg P$
Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando	$\neg R \rightarrow Q$

□

Ejemplo 1.4. Sean P, Q y R como en el ejemplo 1.3. Considere las siguientes proposiciones compuestas.

1. $(P \wedge Q) \rightarrow R$
2. $\neg P \leftrightarrow (Q \vee R)$
3. $\neg(P \vee Q) \wedge R$
4. $(P \rightarrow R) \rightarrow Q$
5. $\neg(P \leftrightarrow (Q \vee R))$

La primera de ellas dice “Si está lloviendo y el sol está brillando, entonces hay nubes en el cielo”. La tercera podría traducirse como: “no es el caso que esté lloviendo o el sol esté brillando, pero hay nubes en el cielo”. Se recurrió a la frase “pero...” en lugar de “y...”para indicar que la frase que seguía no estaba afectada por la expresión “no es el caso”. Dejamos a cargo del lector traducir las otras proposiciones a oraciones en español. Tenga presente que al hacerlo puede obtener oraciones, como antes, que no son de uso frecuente en español.

□

Existen dos tipos de disyunción: La inclusiva y la exclusiva. Un ejemplo de disyunción exclusiva se encuentra en la frase *“O corre o se encarama”*. En cambio la “o” en su sentido inclusivo la encontramos en la frase *“Los que estén hablando o estén de pie”*. La disyunción inclusiva se usa cuando ambas alternativas son posibles (o permitidas). En cambio, se usa la disyunción exclusiva cuando sólo una de las alternativas es posible. En matemáticas usaremos únicamente la disyunción en su sentido inclusivo. [2]

[2] El símbolo $\vee$ para la disyunción viene de la palabra latina *vel* que significa “o” [12].

Las proposiciones que tienen la forma

"Si P, entonces Q"

se llaman **proposiciones condicionales**. P se llama *antecedente* y Q *consecuente*. Usando la notación simbólica, las proposiciones condicionales se denotan por $P \to Q$.

La **recíproca** de una proposición condicional $P \to Q$ es la proposición

$$Q \to P.$$

La **contrarrecíproca** (también llamada **contrapositiva**) de una proposición condicional $P \to Q$ es la proposición

$$\neg Q \to \neg P.$$

Ejemplo 1.5. Considere la proposición

Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo.

Usando la notación del ejemplo 1.3 podemos expresar simbólicamente esta proposición por $P \to R$. La recíproca expresada simbólicamente es $R \to P$ y dice

Si hay nubes en el cielo, entonces está lloviendo

En cambio la contrapositiva, que simbólicamente se escribe $\neg R \to \neg P$, dice

Si no hay nubes en el cielo, entonces no está lloviendo.

□

Ejemplo 1.6. En este ejemplo calcularemos la negación de algunas proposiciones. Usaremos las proposiciones presentadas en el ejemplo 1.3.

1. La negación de

   Está lloviendo y el Sol está brillando

   es

   No está lloviendo o el Sol no está brillando.

   Es decir, la negación de una proposición de la forma $P \wedge Q$ dice lo mismo que la siguiente proposición

   $$\neg P \vee \neg Q.$$

2. La negación de

   Está lloviendo o el Sol está brillando

   es

   No está lloviendo y el Sol no está brillando.

   Pero usualmente decimos: *Ni está lloviendo ni el sol está brillando.*

   Es decir, la negación de una proposición de la forma $P \vee Q$ dice lo mismo que la proposición siguiente

   $$\neg P \wedge \neg Q.$$

3. La negación de

   Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo

   es

   Está lloviendo y no hay nubes en el cielo.

   La negación de un proposición condicional $P \rightarrow Q$ dice lo mismo que la proposición

$$P \wedge \neg Q.$$

$\square$

Por último, queremos hacer un comentario sobre la expresión

"P si, y sólo si, Q".

Aquí tenemos la conjunción de dos expresiones. La primera es

"P, si Q".

La cual expresa lo mismo que la condicional " si Q, entonces P". La segunda expresión es

"P, sólo si Q".

Esta proposición dice que P ocurre *sólamente si* Q ocurre. Por esto decimos que Q es una **condición necesaria** para que P ocurra. En otras palabras, cada vez que P se cumple, necesariamente Q también. Por esto, esa expresión equivale a decir que "Si P, entonces Q". Por ejemplo, la proposición " Iré a la playa, sólo si Gabriela me acompaña" se interpreta como " Si voy a la playa, entonces Gabriela me acompaña". Pues si realmente fuí a la playa, necesariamente Gabriela me acompañó.

En resumen, el significado de $P \leftrightarrow Q$ es el mismo que la conjunción de $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow P$.

Ejercicios 1.1.1

1. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones? En caso que sea un proposición diga si es verdadera o falsa.

   a) $5 + 2 = 7$.

   b) $2^4 < 3^2$.

   c) El Presidente actuó en contra de la Ley.

   d) Tu voto es tu opinión.

   e) ¿Te duele?

   f) Me duele.

g) El polo norte es frío y el polo sur es caliente.

h) Perro que ladra no muerde.

i) Si llueve el miércoles, no saldremos de paseo.

j) Si Venezuela gana el campeonato, entonces Colombia pierde.

2. Sean P, Q y R las proposiciones siguientes:

$$\begin{aligned} P &= \text{“Juan llega demasiado pronto”} \\ Q &= \text{“María llega demasiado tarde”} \\ R &= \text{“El jefe se molesta”} \end{aligned}$$

Traduzca las siguientes oraciones a notación lógica utilizando las letras P, Q, R y los conectivos lógicos.

a) Si Juan llega demasiado pronto ó María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.

b) Si María llega demasiado tarde, entonces Juan no llega demasiado pronto.

c) O el jefe se molesta ó María no llega demasiado tarde.

d) María llega demasiado tarde, Juan llega demasiado pronto y el jefe se molesta.

e) Si el jefe no se molesta, entonces Juan no llega demasiado pronto y María no llega demasiado tarde.

f) O María no llega demasiado tarde o Juan llega demasiado pronto.

g) Si María no llega demasiado tarde y Juan no llega demasiado pronto, entonces el jefe no se molesta.

3. Traduzca cada una de las siguientes oraciones a notación lógica de manera análoga a lo hecho en el ejercicio 2 (introduzca las letras que le haga falta).

a) El número de cédula de Genaro es menor que 5 millones o es mayor que seis millones.

b) Alejandra está comiendo, bebiendo y divirtiéndose.

c) El gordo Alberto vive para comer y come para vivir.

d) O yo estoy equivocado, o la pregunta número uno es cierta y la pregunta número dos es falsa.

e) Si el libro cuesta más de Bs. 20, entonces Ramón no podrá comprarlo.

f) Si el número en la pantalla es menor que cuatro o mayor que diez, entonces no es igual a seis.

4. Niegue las siguientes proposiciones:

a) Ganaremos el primer partido o el segundo.

b) $5 \geq 3$.

c) Las rosas son rojas y las margaritas amarillas.

d) Alejandra quiere comer fruta pero no helado.

e) Si $2^{10} < 3^5$, entonces $10^{10} < 15^5$.

5. Proporcione la recíproca y la contrapositiva de cada una de las siguientes proposiciones.

    a) Si soy listo, entonces soy rico.

    b) Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 8$.

    c) Si Juan llega demasiado pronto ó María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.

6. Considere la proposición "si a es un número real y $a > 0$, entonces $a^2 > 0$ ".

    a) Proporcione la recíproca y la contrapositiva de la proposición.

    b) ¿Cuál (o cuáles) de las siguientes proposiciones es verdadera: la proposición original, la recíproca o la contrapositiva?

1.1.2. Tablas de verdad

En la introducción de este capítulo dijimos que para razonar correctamente debemos garantizar que a partir de proposiciones verdaderas se infiera otra proposición verdadera. Por esto es fundamental poder decidir cuando una proposición es verdadera. Dijimos que una proposición es una afirmación que es verdadera o falsa, no puede ser ambigüa. Ahora bien, las proposiciones compuestas pueden ser complejas. Por ejemplo, considere una proposición que tenga la siguiente forma

$$((P \rightarrow Q) \ \wedge \ (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R).$$

Aun sabiendo cuales de las proposiciones P, Q y R son verdaderas, no es del todo claro como decidir si la proposición de arriba es verdadera o no. Este es el problema que analizaremos en esta sección.

Comenzaremos con un ejemplo relativamente sencillo. Considere las siguientes proposiciones:

$$\begin{array}{rcl} P & = & \text{`` } 2^5 < 3^3 \text{ ''} \\ Q & = & \text{`` } 3 < 16 \text{ ''} \\ R & = & \text{`` } 2^{2999} < 12^{1000} \text{ ''}. \end{array}$$

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas (y en consecuencia, cuáles son falsas)?: $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$, $\neg P$, $R \rightarrow Q$, $R \wedge P$. Antes de dar respuesta a estas preguntas, debemos saber cuales de las proposiciones P, Q y R son verdaderas. Un cálculo sencillo nos muestra que P es falsa pues $2^5 = 32$ y $3^3 = 27$. Q es verdadera. Es claro que R es una proposición pues necesariamente alguna de las siguientes dos alternativas se cumple: (i) $2^{2999} < 12^{1000}$ o (ii) $2^{2999} \not< 12^{1000}$. Dejaremos al lector averiguar cual de las dos alternativas se cumple.

(i) Podemos concluir que $P \vee Q$ es verdadera, pues al menos Q lo es. Note que también podemos afirmar que $Q \vee R$ es verdadera, aún cuando no sabemos si R es verdadera o no.

(ii) La proposición $P \wedge Q$ es falsa, pues P es falsa. Lo mismo ocurre con $P \wedge R$. ¿Qué podemos decir acerca de $Q \wedge R$? Hasta tanto no resolvamos si R es verdadera o no, no podemos decir nada.

(iii) La proposición $\neg P$ es verdadera, pues P es falsa.

(iv) Un momento de reflexión debería convencer al lector que una proposición condicional *"Si S, entonces T"* solamente puede ser falsa, cuando S es verdadera y T no lo es. En todos los otros casos necesariamente es verdadera (pues no hay otra alternativa). Por esto $Q \to P$ es falsa, pues Q es verdadera y P no lo es. Por la misma razón tenemos que $R \to Q$ es verdadera, independientemente de si R es o no verdadera.

Los **valores de verdad** son las dos alternativas que tenemos para una proposición: ser verdadera o ser falsa. Serán denotados, respectivamente, con las letras V y F. Si una proposición es verdadera diremos que su valor de verdad es V y si es falsa, diremos que es F.

Ahora veremos algo fundamental para todo lo que sigue en este capítulo. Volvamos al ejemplo al comienzo de esta sección. Si en lugar de las proposiciones P y Q usamos las siguientes (P' se lee P *prima*).

$$\begin{array}{rcl} P' & = & \text{“ } 2^4 < 3^2 \text{ ”} \\ Q' & = & \text{“ } 5 < 10 \text{ ”} \end{array}$$

Entonces P y P' son ambas falsas y Q y Q' son ambas verdaderas. Debería ser claro que al igual que antes tenemos que $P' \vee Q'$ es verdadera; $P' \wedge Q'$ es falsa; $\neg P'$ es verdadera y $Q' \to P'$ es falsa. Lo mismo es válido si en lugar de P colocamos cualquier otra proposición que sea falsa y en lugar de Q usamos cualquier otra proposición que sea verdadera.

En resumen tenemos que:

> El valor de verdad de una proposición compuesta depende *exclusivamente* de los valores de verdad de las proposiciones simples que aparecen en ella.

Por lo dicho arriba, en el estudio de la lógica proposicional no trabajaremos con proposiciones concretas, en su lugar usaremos simplemente letras que llamaremos **variables proposicionales** (a veces también las llaman letras proposicionales). Con estas variables y los conectivos lógicos se construyen las **fórmulas proposicionales** de la misma manera que se construyeron las proposiciones compuestas. Usaremos letras minúsculas p, q, r, etc. para denotar las variables o fórmulas proposicionales y dejaremos las mayúsculas para denotar proposiciones.

Si cada una de las variables que aparecen en una fórmula proposicional se sustituye por una proposición se obtiene una proposición (compuesta). El ejemplo que sigue ilustra lo que acabamos de decir.

Ejemplo 1.7. Considere la fórmula

$$(p \wedge q) \rightarrow r.$$

Sustituiremos p por la proposición " $3^7 < 4^8$ ", q por la proposición " $4^8 < 3^{15}$ y r por la proposición " $3^7 < 3^{15}$. Obtenemos la proposición que dice:

"*Si* $3^7 < 4^8$ *y* $4^8 < 3^{15}$, *entonces* $3^7 < 3^{15}$".

□

Ejemplo 1.8. A continuación presentamos algunos ejemplos de fórmulas proposicionales.

$(p \wedge q) \rightarrow r$

$\neg p \leftrightarrow (q \vee r)$

$\neg(p \vee q) \wedge r$

$(p \rightarrow r) \rightarrow q$

$\neg(p \leftrightarrow (q \vee r))$

$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$

$((p \rightarrow q) \ \wedge \ (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

□

De ahora en adelante simplemente diremos fórmula en lugar de fórmula proposicional. También es usual denotar las fórmulas con letras del alfabeto griego, ϕ, ψ, ρ que se leen, respectivamente, " *fi* ", " *si*" (como en la palabra psicología) y " *ro* ". Usaremos la misma terminología que usamos para las proposiciones. Por ejemplo, si ϕ y ψ son fórmulas, entonces la negación de ϕ es $\neg\phi$, la recíproca de $\phi \rightarrow \psi$ es $\psi \rightarrow \phi$ y la contrarecíproca es $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$.

El comportamiento de los conectivos lógicos en relación con el valor de verdad es muy sencillo de establecer y se hace a través de las *tablas de verdad* que veremos más adelante [3]. Comenzaremos con la tabla de verdad para $\neg$. Es claro que $\neg p$ debe ser verdadera exactamente cuando p no lo es. Por esto la tabla de verdad para la negación es la siguiente:

[3] Las tablas de verdad en forma tabular aparecen en 1918 con los trabajos de Lukasiewicz, Post, Wittgenstein (ver [5, pag. 87]).

p	$\neg p$
V	F
F	V

Una disjunción es verdadera cuando al menos una de las proposiciones es verdadera. La tabla de la disyunción es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Estas tablas se leen horizontalmente. Por ejemplo, la primera línea dice que si p es verdadera y q es verdadera, entonces $p \vee q$ también es verdadera. La tercera línea dice que si p es falsa y q es verdadera, entonces $p \vee q$ es verdadera etc.

Las tablas de verdad para los otros conectivos son:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A cada fórmula le asociamos una *tabla de verdad*. Construiremos la tabla de verdad para la fórmula

$$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q).$$

Las primeras columnas de la tabla serán ocupadas por las variables involucradas, en este caso p y q. Observe que tendremos 4 filas que corresponden al número de posibles combinaciones distintas de los valores de verdad de p y q.

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$
F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V
V	V	V	V	F	V

Un hecho importante que se deduce de la tabla de verdad de una fórmula es el siguiente. La tabla nos indica el valor de verdad que tiene la proposición obtenida cuando cada variable de la fórmula se sustituye por una proposición. Por ejemplo, si en la fórmula $(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$ sustituimos p por una proposición verdadera y q por una falsa, entonces la proposición obtenida es verdadera (pues su valor viene dado por la tercera fila de la tabla de $(p \wedge q) \vee \neg(p \rightarrow q)$).

Ejemplo 1.9. Hay una manera más simple de presentar las tablas de verdad. En la última fila indicaremos a que paso del procedimiento corresponde esa columna.

	p	q	$p \wedge q$	$\vee$	$\neg$	$(p \to q)$
	F	F	F	F	F	V
	F	V	F	F	F	V
	V	F	F	V	V	F
	V	V	V	V	F	V
paso	1	1	2	4	3	2

Los valores en la columna 4 nos dan la tabla de verdad de la fórmula original.

□

Algunas fórmula tienen la propiedad de recibir sólo el valor V. Es decir, en su tabla de verdad la última columna sólo contiene V. Un ejemplo es la fórmula $p \vee \neg p$. Este tipo de fórmulas reciben el nombre de **tautologías**. Las tautologías forman una clase muy importante de fórmulas.

Ejemplos 1.10. 1. $p \to p$ es una tautología.

p	$p \to p$
V	V
F	V

2. $[p \;\wedge\; (p \to q)] \to q$ es una tautología.

p	q	$p \to q$	$p \;\wedge\; (p \to q)$	$[p \;\wedge\; (p \to q)] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

□

Un fórmula que reciba F en cada una de las filas de su tabla de verdad se dice que es una **contradicción**. Note que una fórmula es una contradicción si, y sólo si, su negación es una tautología. La contradicción más simple es $p \wedge \neg p$.

Ejercicios 1.1.2

1. Considere las siguientes fórmulas:

$$p \to q, \qquad \neg p \to \neg q, \qquad q \to p, \qquad \neg q \to \neg p,$$

$$p \to (q \wedge r), \quad \neg p \to (q \vee r), \quad (p \vee q) \to \neg r, \quad (p \wedge \neg q) \to r$$

Para cada una de ellas responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la recíproca?

b) ¿Cuál es la contrapositiva?

2. Construya la tabla de verdad de cada una de la fórmulas dadas en el ejemplo 1.8.

3. Muestre que las siguientes fórmulas son tautologías.

   a) $p \to (p \vee q)$.

   b) $(p \wedge q) \to q$

   c) $(\,(p \vee q) \wedge \neg p) \;\to q$

4. Cada una de las tarjetas indicadas tiene en un lado un número y en el otro una letra.

   $\boxed{\text{E}}\quad\boxed{\text{K}}\quad\boxed{4}\quad\boxed{7}$

   Alguien afirmó: *Todas las tarjetas que tienen una vocal en una cara tienen un número par en la otra*. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que hay que voltear para verificar si tal afirmación es verdadera? ¿Cuáles hay que voltear?

5. Rodolfo y Margarita están hablando. Rodolfo dice: (1) *¿Qué iremos a comer hoy?*. Margarita, que parece molesta, le responde: (2) *Si quieres comer, o preparas tu comida o comes lo que sobró de anoche*. Y Rodolfo responde: (3) *Uhm....Como que no tengo hambre*. Observe que (2) y (3) pueden ser ambas verdaderas y de esta manera Rodolfo no contradice lo dicho por Margarita y no tiene que cocinar y ni comer recalentado!

6. José está mirando una fotografía de un hombre. Alguien llega y le pregunta: *¿Quién es la persona que aparece en la foto?*. José responde diciendo: *No tengo hermanos ni hermanas. Pero el padre del hombre de la foto es el hijo de mi padre*. ¿Quién es la persona que aparece en la foto? (a) El abuelo de José. (b) El padre de José. (c) José. (d) El hijo de José. (e) Ninguna de las anteriores.

7. En un pueblo sus habitantes siempre dicen la verdad o siempre dicen mentiras. El grupo $\mathbb{V}$ está formado por aquellos que dicen siempre la verdad y el grupo $\mathbb{M}$ por aquellos que siempre dicen mentiras. Tres habitantes P, Q y R del pueblo estaban conversando en la plaza. Una persona que caminaba por la plaza le preguntó a P: ¿Eres del grupo $\mathbb{V}$ o del grupo $\mathbb{M}$? Como no pudo escuchar la respuesta de P, entonces le preguntó a Q: ¿Qué fué lo que dijo P? Y Q respondió: "P dijo que él era del grupo $\mathbb{M}$". En este momento R habló y dijo: "No le creas a Q, él está mintiendo" ¿A qué grupo pertenecen Q y R?

1.1.3. Otras expresiones formales

En Matemáticas con frecuencia trabajamos con expresiones que no son necesariamente proposiciones pues contienen variables no especificadas (llamadas *variables libres*). Esto ocurre con expresiones algebraicas como las siguientes

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad x^3 + z^4 \geq y^3 - x.$$

Observe que una vez que las variables se sustituyen por números obtenemos una proposición. Por ejemplo, colocando $x = 3$, $y = 4$ y $z = 5$ obtenemos

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 3^3 + 5^4 \geq 4^3 - 3.$$

Ambas, en este caso, son verdaderas. Pero si sustituimos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 1$, entonces obtenemos en la primera $0 = 1$ que es falsa y en la segunda $1 \geq 0$ que es verdadera. Lo que queremos decir es que una expresión como $x^2 + y^2 = z^2$ no es ni verdadera ni falsa hasta tanto no se le den valores a las variables x, y y z. Esto es exactamente lo que ocurre con las fórmulas proposicionales. No son ni verdaderas ni falsas, hasta tanto cada variable proposicional se sustituya por una proposición (o lo que es lo mismo, hasta tanto se le asigne a cada variable alguno de los valores V o F).

Por otra parte, aún cuando las fórmulas algebraicas no son proposiciones, podemos manipularlas como si lo fueran. En el ejemplo de arriba, podemos negarlas y obtener

$$x^2 + y^2 \neq z^2, \quad x^3 + z^4 \not\geq y^3 - x.$$

Podemos también formar expresiones más complejas. Por ejemplo

$$\text{Si } x \geq 5 \text{ y } y \leq 8, \text{ entonces } y^2 - x^2 \leq 39.$$

Y así podemos hablar de la recíproca o de la contrarecíproca de estas expresiones. En este ejemplo, tenemos que la recíproca es:

$$\text{Si } y^2 - x^2 \leq 39, \text{ entonces } x \geq 5 \text{ y } y \leq 8;$$

y la contrarecíproca es:

$$\text{Si } y^2 - x^2 \not\leq 39, \text{ entonces } x \not\geq 5 \text{ o } y \not\leq 8.$$

Ejercicios 1.1.3

1. Proporcione la recíproca y la contrapositiva de cada una de las siguientes expresiones.

   a) Si $x + y = 1$, entonces $x^2 + y^2 \geq 1$,

   b) Si $x^2 = x$, entonces $x = 0$ ó $x = 1$.