

# Examen de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 1 de Enero, 2013

**Tiempo: 120 minutos.**

**Nombre:**

**Pregunta 1.** Resuelva ambas preguntas.

(a) **(3 pts.)** Calcule cada una de las siguientes suma para demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^n (4k - 1).$$

Ayuda: Para calcular la suma de la izquierda debe expandir, agrupar y usar sumas conocidas.

(b) **(3 pts.)** Demuestre usando el principio de inducción que

$$3^{2n+2} - 2^{n+1} \text{ es divisible por } 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Pregunta 2.** Resuelva ambas preguntas.

(a) Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , las funciones definidas por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x & \text{si } x > 1 \end{cases}$   
y  $g(x) = |x - 1|$ . Determine:

(i) **(2.0 pts.)** La fórmula de la función  $f \circ g$ .

(ii) **(0.5 pts.)** El dominio de la función  $f \circ g$ .

(iii) **(1.5 pts.)** El gráfico de la función  $f \circ g$ .

(b) **(2.0 pts.)** Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

Sabiendo que  $f(-1) > 0$  y  $f(1) < 0$ , ¿podemos concluir que el gráfico de la función  $f$  intersecta al eje  $x$  en un punto entre  $-1$  y  $1$ ?

**Pregunta 3.** Resuelva ambas preguntas.

(a) Sea  $f$  la función dada por  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ .

(i) **(2.0 pts.)** Encuentre  $f'(x)$ .

(ii) **(1.5 pts.)** Encuentre intervalos de monotonía de  $f$ .

(iii) **(0.5 pts.)** ¿Existe máximos o mínimos locales?

(b) **(2.0 pts.)** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(6x)}}{x^2}$ .