

Prueba 2 (Pauta) de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 23 de Noviembre, 2013

Pregunta 1. Resuelva ambas preguntas.

(a) **(3 pts.)** Resuelva la siguiente inecuación.

$$2 \leq |x^2 - 1|.$$

Solución: Sabemos que $2 \leq |x^2 - 1|$ es equivalente a

$$\begin{aligned} & (2 \leq x^2 - 1) \vee (x^2 - 1 \leq -2) \\ & (3 \leq x^2) \vee (x^2 \leq -1) \\ & (\sqrt{3} \leq |x|) \vee (x \in \emptyset) \\ & (\sqrt{3} \leq x \vee x \leq -\sqrt{3}) \vee (x \in \emptyset) \\ & x \in]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty[\end{aligned}$$

$\therefore$ La solución de la inecuación es $S =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty[$.

(b) **(3 pts.)** Encuentre el dominio de $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1| - 2}$ y demuestre que f es inyectiva **si restringimos su dominio a** $Dom(f) \cap [0, \infty[$.

Solución: Para que x pertenezca al dominio de f debe cumplir

$$|x^2 - 1| - 2 \geq 0.$$

Pero esta inecuación es equivalente a la resuelta anteriormente, es decir, su solución es $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty[$.

$$\therefore Dom(f) =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty[.$$

Ahora probaremos que f es inyectiva en $Dom(f) \cap [0, \infty[= [\sqrt{3}, \infty[$.

Sean $a, b \in [\sqrt{3}, \infty[$ con

$$\begin{aligned}
 f(a) &= f(b) \\
 \Leftrightarrow \sqrt{|a^2 - 1| - 2} &= \sqrt{|b^2 - 1| - 2} & / ()^2 \\
 \Leftrightarrow |a^2 - 1| - 2 &= |b^2 - 1| - 2 & / + 2 \\
 \Leftrightarrow |a^2 - 1| &= |b^2 - 1|
 \end{aligned}$$

Como $a, b \in [\sqrt{3}, \infty[$ se tiene que $(a^2 - 1), (b^2 - 1) > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow |a^2 - 1| &= |b^2 - 1| \\
 \Leftrightarrow a^2 - 1 &= b^2 - 1 & / + 1 \\
 \Leftrightarrow a^2 &= b^2 & / \sqrt{} \\
 \Leftrightarrow |a| &= |b| & / a, b > 0 \\
 \Leftrightarrow a &= b
 \end{aligned}$$

$\therefore f$ es inyectiva en $[\sqrt{3}, \infty[$.

Pregunta 2.

Una persona se ha intoxicado al ingerir accidentalmente un medicamento vencido. Se estima que el porcentaje de sangre contaminada t horas después de ocurrida la intoxicación es $p(t) = 18t - t^2$. Se considera el paciente en riesgo vital cuando el porcentaje de sangre contaminada es más de un 65 %.

- (i) **(1 pts.)** Indique $Dom(p)$ de acuerdo al contexto del problema.
- (ii) **(2 pts.)** ¿En qué intervalo de tiempo el paciente está fuera de riesgo vital?
- (iii) **(3 pts.)** Considerando $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 65 \\ -t & \text{si } 65 < t \end{cases}$, calcule $(f \circ p)(t)$, grafique y encuentre $Rec(f \circ p)$.

Solución:

- (i) Sabemos que $p(t)$ representa al porcentaje de sangre contaminada, por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq p(t) \leq 100 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 18t - t^2 \leq 100 \\ \Leftrightarrow (0 \leq 18t - t^2) &\quad \wedge \quad (18t - t^2 \leq 100) \\ \Leftrightarrow (0 \leq t(18 - t)) &\quad \wedge \quad (0 \leq t^2 - 18t + 100) \\ \Leftrightarrow (t \in [0, 18]) &\quad \wedge \quad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\therefore Dom(p) = [0, 18].$$

- (ii) Sabemos que el paciente se encuentra fuera de riesgo vital si

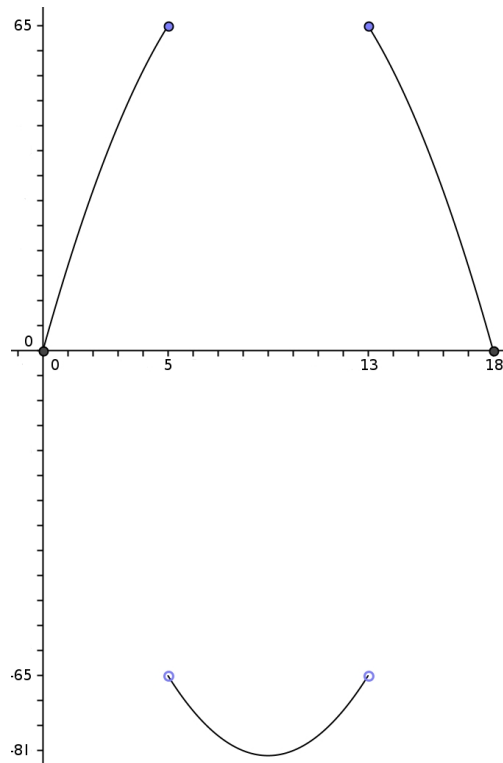
$$\begin{aligned} p(t) &\leq 65 \\ \Leftrightarrow 18t - t^2 &\leq 65 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq t^2 - 18t + 65 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (t - 5)(t - 13) \\ \Leftrightarrow t &\in] - \infty, 5] \cup [13, \infty[\end{aligned}$$

Contextualizando esta solución al problema, tendremos que el paciente se encuentra fuera de riesgo vital entre la 0 y 5 hrs, y también entre las 13 y 18 hrs.

(iii) Primero encontremos la fórmula para $f(p(t))$.

$$\begin{aligned}
 f(p(t)) &= \begin{cases} p(t) & \text{si } 0 \leq p(t) \leq 65 \\ -p(t) & \text{si } 65 < p(t) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} p(t) & \text{si } t \in [0, 5] \cup [13, 18] \\ -p(t) & \text{si } t \in]5, 13[\end{cases} \\
 &= \begin{cases} 18t - t^2 & \text{si } t \in [0, 5] \cup [13, 18] \\ t^2 - 18t & \text{si } t \in]5, 13[\end{cases}
 \end{aligned}$$

Luego, el gráfico para esta fórmula es:



Finalmente, $Rec(f \circ p) = [-81, -65[\cup [0, 65]$.

Pregunta 3.

(a) La temperatura de cierto día de verano se modela mediante la fórmula

$$C(t) = -\frac{1}{9}(t - 12)^2 + 25,$$

donde t se mide en horas y $C(t)$ en grados Celsius ($^{\circ}C$).

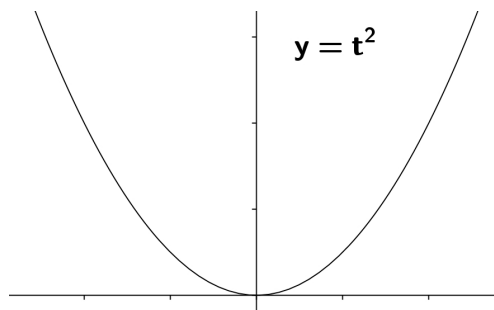
(i) **(1.5 pts.)** Indique las transformaciones necesarias para llegar al gráfico de C a partir del gráfico de la función dada por $y = t^2$. Grafique C .

(i) **(1.5 pts.)** Si nos piden medir la temperatura en grados Fahrenheit ($^{\circ}F$) y nos dicen que la relación entre estas medidas es $F(t) = \frac{9}{5}C(t) + 32$. Encuentre una fórmula para F y luego genere un gráfico que modele la temperatura en grados Celsius y Fahrenheit .

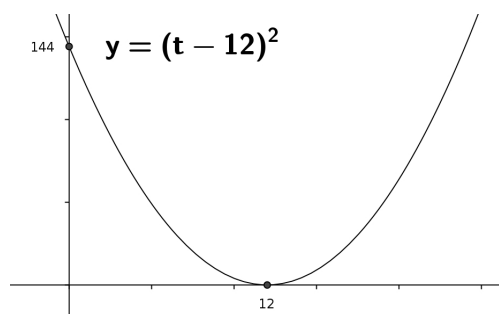
(b) **(3 pts.)** Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Solución:

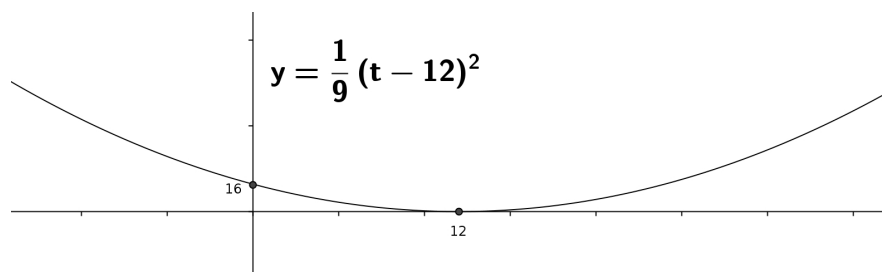
(a.i) Partiremos con el gráfico de la función dada por $y = t^2$.



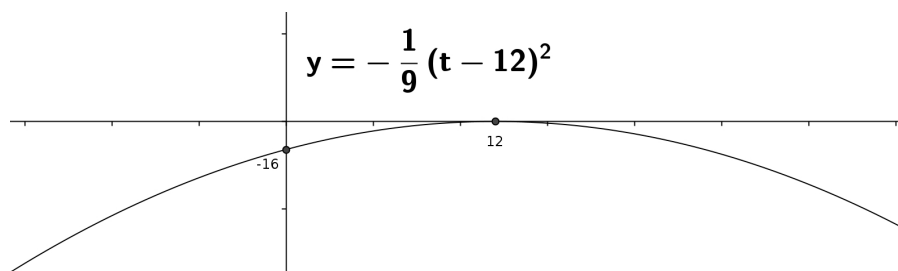
Luego, trasladamos este gráfico 12 unidades a la derecha.



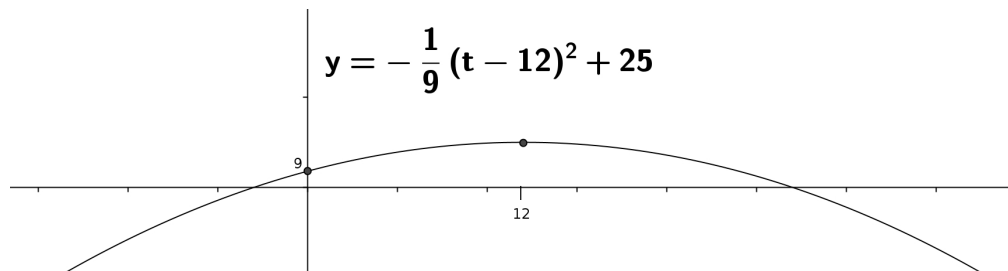
Ahora, comprimimos verticalmente el gráfico anterior al dividirlo por 9.



El anterior gráfico se refleja con el eje x al multiplicarlo por -1 .



Finalmente se traslada 25 unidades hacia arriba al sumarle 25.



(a.ii) La fórmula de F es:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{9}{5}C(t) + 32 \\ &= \frac{9}{5}\left(-\frac{1}{9}(t - 12)^2 + 25\right) + 32 \\ &= -\frac{1}{5}(t - 12)^2 + 77 \end{aligned}$$

Luego, para generar el gráfico de F partimos con el gráfico de la función dada por $y = t^2$ y lo trasladamos 12 unidades hacia la derecha, después lo contraemos verticalmente a su quinta parte, también lo reflejamos con el eje x y finalmente lo subimos en 77 unidades. Así, tendremos que los gráficos que modelan la temperatura en grados Celsius y Fahrenheit son:

