

Prueba 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Sábado 19 de Octubre, 2013

Tiempo: 120 minutos.

Nombre:

1. Demuestre las siguientes proposiciones.

a) **(2 pts.)** Si $x \in A \cup (B \cap C)$, entonces $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) **(3 pts.)** Si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$.

(1 pto.) ¿Qué podríamos concluir de estas dos proposiciones?

Solución:

a) Sabemos que:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$$

Entonces, tenemos 2 casos:

$$\circ x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$\circ x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Así, en ambos casos $(x \in A \vee x \in (B \cap C))$ se concluye que:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\therefore \text{ Si } x \in A \cup (B \cap C), \text{ entonces } x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

b) Sabemos que:

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) &\Rightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\&\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\end{aligned}$$

Entonces, tenemos 4 casos:

- $(x \in A \wedge x \in A) \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$
- $(x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$
- $(x \in B \wedge x \in A) \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$
- $(x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$

Así, en todos los casos se concluye que:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\therefore \text{ Si } x \in (A \cup B) \cap (A \cup C), \text{ entonces } x \in A \cup (B \cap C).$$

c) De las dos anteriores proposiciones se puede concluir que:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2. Resuelva ambas preguntas.

- a) **(2 pts.)** Sabiendo que $a_1 = 1/2$ y $a_k = a_{k-1}(1 - \frac{1}{k+1})$ para cada $k > 1$, demuestre usando inducción que

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- b) **(4 pts.)** Usando el término a_n de la letra anterior, calcule $\sum_{i=3}^{20} (2 \cdot a_i \cdot a_{i+2})$.

Solución:

- a) Demostraremos por inducción que las proposiciones $p(n) : a_n = \frac{1}{n+1}$ son cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. Para esto debemos probar:

◦ $p(1)$ es cierta: $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

$\therefore p(1)$ es cierta.

- $p(k)$ es cierta $\Rightarrow p(k+1)$ cierta: Asumiendo que la proposición $p(k)$ es cierta, tendremos

$$a_k = \frac{1}{k+1}.$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \left(1 - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{k+1} \left(1 - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \\ &= \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

$\therefore p(k+1)$ es cierta.

Finalmente, el principio de inducción nos asegura que las proposiciones $p(n)$ son cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

- b) Usando el término a_n de la letra anterior, tendremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{20} (2 \cdot a_i \cdot a_{i+2}) &= \sum_{i=3}^{20} \left(2 \cdot \frac{1}{i+1} \cdot \frac{1}{i+3} \right) \\ &= \sum_{i=3}^{20} \frac{2}{(i+1)(i+3)} \end{aligned}$$

Para calcular esta suma primero separaremos en fracciones parciales .

$$\frac{2}{(i+1)(i+3)} = \frac{A}{i+1} + \frac{B}{i+3} = \frac{i(A+B) + (3A+B)}{(i+1)(i+3)}.$$

Luego,

$$\left. \begin{array}{l} A+B = 0 \\ 3A+B = 2 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2A = 2 \\ B = -A \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array} \right|$$

Reemplazando esto en la suma anterior, tendremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{20} (2 \cdot a_i \cdot a_{i+2}) &= \sum_{i=3}^{20} \frac{2}{(i+1)(i+3)} \\ &= \sum_{i=3}^{20} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+3} \right) \\ &= \sum_{i=3}^{20} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+3} \right) \\ &= \sum_{i=3}^{20} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) + \sum_{i=3}^{20} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{22} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{23} \right) \end{aligned}$$

3. Resuelva ambas preguntas.

a) **(3 pts.)** Calcule $\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}$.

b) **(3 pts.)** Encuentre el término central y el término independiente de x (si existe) en la siguiente expresión.

$$\left(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x} \right)^5.$$