UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

CÁLCULO
Tomo I

Cálculo en una Variable
Límites y Continuidad

Gladys Bobadilla A. y Rafael Labarca B.

Santiago de Chile
Marzo 2010

II

Prefacio

El cero es el silencio antes del número
El número es el verbo matemático
Lo matemático es el cálculo de la realidad
La realidad es lo único increíble
Lo increíble es lo que no podemos
Y lo que no podemos es lo que queremos.
Patricio Manns.

Este texto es producto - en elaboración aún - del proyecto de desarrollo de la docencia **Texto de cálculo anual para ingeniería civil**, financiado por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile.

Gran parte de los contenidos de los capítulos 1 y 2 están sacados del antiguo texto de Cálculo I escrito por Gladys Bobadilla y Jorge Billeke (Q.E.P.D.).

La idea motriz de los autores para emprender esta tarea es el profundo convencimiento que ésta es una forma de contribuir a una cultura nacional independiente.

Aunque los temas tratados - generados en Europa entre los siglos 17 y 19 - forman parte del patrimonio universal y existe una amplia y variada literatura, no es una razón suficiente para que la universidad renuncie a crear su propio material docente. Esta labor es tan importante como la creación de nuevos conocimientos y necesita, como esta última, de una tradición para la cual se debe recorrer un largo camino de errores y rectificaciones.

Además, queremos compartir con los jóvenes estudiantes que usarán este libro, la reflexión del filósofo Gastón Bachelard (1884 - 1962) sobre lo que significa enfrentarse al conocimiento científico: "Frente al misterio de lo real el alma no puede, por decreto, tornarse ingenua. Es entonces imposible hacer, de golpe, tabla rasa de los conocimientos usuales. Frente a lo real, lo que cree saberse claramente ofusca lo que debiera saberse. Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy

viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecerse espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado."[1]

Agradecemos los valiosos comentarios de la Dra. Cecilia Yarur, la profesora Graciela Escalona y el señor Luis Riquelme que nos ayudaron a mejorar la presentación de este texto. Agradecemos además, el apoyo técnico en la escritura digital, de la señorita Evelyn Aguilar y el señor Leonelo Iturriaga.

Finalmente, siendo ésta una versión preliminar, agradeceremos a quienes detecten errores nos lo hagan saber.

Gladys Bobadilla A y Rafael Labarca B.
Santiago, marzo de 2002.

[1] Gastón Bachelard: La formación del espíritu científico. Ed. Siglo XXI, 1997.

Agradecimientos

Esta versión del texto ha sido financiada por la Vicerrectoría de Docencia y Extensión de la Universidad de Santiago de Chile, a través del proyecto de desarrollo docente 2006-2007, **Versión final del texto guía de cálculo para ingeniería civil y ciencias**.

II

Índice general

I TOMO I **1**

1. Los números reales **3**
1.1. La aritmética de los números reales: axiomas de cuerpo 3
1.2. Comparación de los números reales: axiomas de orden 11
1.2.1. Los axiomas de orden 11
1.2.2. Resolución de ecuaciones de grado mayor que uno 16
1.2.3. Desigualdades e inecuaciones 19
1.3. Una distancia en R: el valor absoluto 34
1.4. La continuidad de R: el Axioma del Supremo 45

2. Límites y continuidad **65**
2.1. Límites de funciones numéricas de variable discreta. 65
2.1.1. Las variables discretas y el conjunto $\mathbb{N}$ 65
2.1.2. Sucesiones monótonas no acotadas 69
2.1.3. Sucesiones monótonas acotadas 71
2.1.4. Sucesiones convergentes no monótonas 75
2.2. Límites de referencia 88
2.2.1. Ejercicios resueltos 89
2.2.2. Ejercicios propuestos 107
2.3. Las funciones numéricas de variable continua 111
2.3.1. Definiciones básicas 111
2.3.2. Representación gráfica de funciones 118
2.3.3. Ejercicios resueltos 120
2.3.4. Ejercicios propuestos 136
2.4. Límites de funciones numéricas de variable continua 140
2.4.1. Límites infinitos cuando $|x|$ crece indefinidamente 140
2.4.2. Límites infinitos en una vecindad de un punto 143
2.4.3. Límites finitos cuando $|x|$ crece indefinidamente 147
2.4.4. Límites finitos en un punto x_0 151

2.4.5. Ejercicios resueltos . . . 161
2.4.6. Ejercicios propuestos . . . 174
2.5. Funciones continuas . . . 177
2.5.1. Definiciones básicas . . . 177
2.5.2. Continuidad de funciones elementales . . . 180
2.5.3. Discontinuidades removibles . . . 181
2.5.4. Propiedades de las funciones continuas . . . 181
2.5.5. Ejercicios resueltos . . . 185
2.5.6. Ejercicios propuestos . . . 198

3. Funciones Trascendentes 203
3.1. Introducción . . . 203
3.2. Las funciones circulares o trigonométricas . . . 204
3.2.1. Definición de las funciones circulares o trigonométricas . . . 206
3.2.2. Propiedades básicas de seno y coseno . . . 207
3.2.3. Cálculo de los valores más usuales de las funciones seno y coseno . . . 209
3.2.4. Ceros y signo de las funciones seno y coseno . . . 212
3.2.5. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante . . . 213
3.2.6. Ejercicios resueltos . . . 220
3.2.7. Ejercicios propuestos . . . 227
3.2.8. Ejercicios resueltos . . . 232
3.3. Límites y continuidad de las funciones trigonométricas . . . 252
3.3.1. Límites de referencia de las funciones circulares . . . 252
3.3.2. Ejercicios resueltos . . . 257
3.3.3. Ejercicios propuestos . . . 262
3.3.4. Continuidad de las funciones circulares . . . 262
3.3.5. Las inversas de las funciones circulares . . . 263
3.3.6. Problemas resueltos . . . 264
3.3.7. Problemas propuestos . . . 265
3.4. Función Exponencial y Logaritmo . . . 266
3.4.1. Potencias de exponente entero . . . 266
3.4.2. Potencias de exponente racional . . . 267
3.4.3. Propiedades de las potencias de exponente racional . . . 268
3.4.4. Los números irracionales . . . 269
3.4.5. La función exponencial . . . 270
3.4.6. Ejercicios propuestos . . . 280
3.4.7. Función Logaritmo . . . 280
3.4.8. Relación entre las diferentes funciones exponenciales . . . 282
3.5. Ejercicios resueltos . . . 282
3.6. Las funciones hiperbólicas . . . 284

3.7. Las funciones hiperbólicas inversas 287

II TOMO II **293**

4. La derivada y sus aplicaciones **295**
4.1. Introducción 295
4.2. Definición y fórmulas básicas de la derivada 298
4.2.1. Definiciones básicas 298
4.2.2. Fórmulas elementales 304
4.2.3. Las derivadas de las funciones trigonométricas 309
4.2.4. Las derivadas de orden superior 310
4.2.5. Ejercicios resueltos 311
4.2.6. Ejercicios propuestos 318
4.3. Propiedades de las funciones derivables 322
4.3.1. Teoremas principales 322
4.3.2. Derivadas de las inversas de las funciones trigonométricas 334
4.3.3. Ejercicios resueltos 338
4.3.4. Ejercicios propuestos 343
4.4. Aplicaciones I: La regla de L'Hôpital 347
4.5. Aplicaciones II: Gráficos de funciones 360
4.6. Aplicaciones III: Análisis de curvas en el plano 380
4.6.1. Elementos de Geometría Analítica 380
4.6.2. Análisis de curvas en coordenadas rectangulares 430
4.6.3. Análisis de curvas dadas por ecuaciones paramétricas 438
4.6.4. Curvas expresadas en coordenadas polares 450
4.7. Aplicaciones IV: problemas de máximo y mínimo 464
4.8. Aplicaciones V: Razón de cambio y diferenciales 482
4.8.1. Razones de cambio 482
4.8.2. Diferenciales 484
4.9. Aplicaciones VI: Física del movimiento 489

5. La integral indefinida: cálculo de primitivas **501**
5.1. La integral indefinida y sus propiedades 501
5.1.1. La integral indefinida 501
5.1.2. Fórmulas básicas de integración 503
5.1.3. Propiedades elementales de la integral indefinida 505
5.1.4. Ejercicios propuestos 512
5.2. Fórmulas de reducción 513
5.2.1. Ejercicios propuestos 519

5.3. Integración de funciones racionales 520
5.3.1. Descomposición de un polinomio en factores 520
5.3.2. Descomposición de una función racional en fracciones simples 521
5.3.3. Integración de funciones racionales 524
5.4. Integración de ciertas funciones trascendentes. 532
5.4.1. Integración de funciones 532
5.4.2. Integración de funciones trigonométricas inversas. 542
5.4.3. Integración de funciones hiperbólicas, exponenciales y logarítmicas. . 543
5.4.4. Ejercicios propuestos 550
5.5. Integración de algunas funciones algebraicas 552
5.5.1. Integración de funciones irracionales simples 552
5.5.2. Integración de $f(x) = x^p(ax^n + b)^q$ $p, q, n \in \mathbb{Q}$. 554
5.5.3. Integración de funciones racionales de x y $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ 557
5.5.4. Ejercicios propuestos 561

6. Integral de Riemann **563**
6.1. Introducción 563
6.2. Sumas de Riemann y el concepto de integral 569
6.2.1. Cálculo de integrales mediante sumas de Riemann particulares . . . 578
6.3. Propiedades de la Integral de Riemann 602
6.4. Teorema Fundamental de Cálculo 619

7. Aplicaciones de la integral **629**
7.1. Cálculo de áreas 629
7.1.1. Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares 629
7.1.2. Cálculo de áreas en coordenadas polares 631
7.1.3. Cálculo de áreas usando ecuaciones paramétricas 636
7.2. Cálculo de longitudes de curvas 656
7.2.1. Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas rectangulares 656
7.2.2. Cálculo de longitudes de curvas dadas por ecuaciones paramétricas . 658
7.2.3. Cálculo de longitudes de curvas en coordenadas polares 660
7.3. Volúmenes y áreas de superficies de sólidos de revolución 668
7.3.1. Método de los discos 668
7.3.2. Método de las cortezas o cilindros 669
7.3.3. Áreas de superficies de revolución 673
7.4. Integrales elípticas e integración numérica 683
7.4.1. Integrales elípticas 683
7.4.2. Dos métodos numéricos de integración 686

III TOMO III **697**

8. Integrales impropias y series **699**
8.1. Integrales impropias . . . 699
8.1.1. Integrales impropias de primera clase . . . 699
8.1.2. Propiedades de las integrales impropias de primera clase . . . 702
8.1.3. Integrales impropias de segunda clase . . . 707
8.1.4. Convergencia absoluta . . . 713
8.1.5. Otros criterios . . . 714
8.1.6. La función Gama . . . 716
8.1.7. La función Beta . . . 717
8.2. Series Numéricas . . . 740
8.2.1. Conceptos generales . . . 740
8.2.2. Series de términos positivos . . . 742
8.2.3. Series de términos alternados: criterio de Leibniz . . . 748
8.2.4. Convergencia absoluta y condicional de series . . . 750
8.2.5. Multiplicación de series de términos positivos . . . 753
8.2.6. Multiplicación de series en general . . . 755
8.2.7. Criterios más específicos . . . 759
8.3. Series de potencias . . . 775
8.3.1. Series de Funciones . . . 775
8.3.2. Propiedades de las series uniformemente convergentes . . . 779
8.3.3. Series de potencias . . . 781
8.4. Teorema de Taylor . . . 800
8.4.1. Cálculo de polinomios y series de Taylor para funciones elementales 803

9. Series de Fourier **821**
9.1. Introducción . . . 821
9.2. Preliminares . . . 823
9.2.1. Funciones pares e impares . . . 823
9.2.2. Funciones periódicas . . . 826
9.2.3. Funciones continuas y derivables a tramos . . . 828
9.2.4. Fórmulas trigonométricas . . . 830
9.2.5. Funciones ortogonales y la serie de Fourier 831
9.2.6. La serie de Fourier como la mejor aproximación en media cuadrática 833
9.3. Series de Fourier para funciones periódicas . . . 834
9.4. Desigualdad de Bessel . . . 838
9.5. Fórmula de Dirichlet . . . 840
9.6. Un resultado de convergencia . . . 844

9.7. Series de Fourier de senos y cosenos 855
9.7.1. Fórmula de Parseval 857
9.7.2. Integración de series de Fourier 857
9.7.3. Derivación de series de Fourier 861
9.7.4. Serie de Fourier de funciones periódicas de período cualquiera 863
9.8. Series de Fourier de funciones a valores complejos 866
9.8.1. 866
9.8.2. La serie de Fourier compleja 869
9.8.3. Ejercicios resueltos 873
9.8.4. Serie de Fourier de un producto de funciones 874

Índice de figuras

1.1. Valor absoluto 35

2.1. Interpretación geométrica del límite 75
2.2. Sistema de coordenadas rectangulares 118
2.3. Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ 118
2.4. Gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ 119
2.5. Gráfico de $f(x) = x - [x]$ 119
2.6. Gráfico de f y su inversa f^{-1} 120
2.7. Gráfico de g 125
2.8. Gráficos de $y = x$, $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$ 127
2.9. Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$ 129
2.10. Una rama de la cisoide 132
2.11. Una rama de la estrofoide 133
2.12. Gráfico de f invertible 139
2.13. 141
2.14. Vecindad de x_0 143
2.15. Límites infinitos en una vecindad de x_0. 144
2.16. Comportamiento de algunas funciones cerca de puntos singulares. 146
2.17. 146
2.18. Gráfico de $h(x) = -\dfrac{1}{x-2}$ 147
2.19. Gráfico de $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ 149
2.20. Límites cuando $x \to \pm\infty$ de $\dfrac{1}{x}$. 151
2.21. Asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$ 151
2.22. Existencia del límite sin que la función esté definida en el punto 155
2.23. Interpretación geométrica del límite 156
2.24. Gráfico de $y = x^2 + x - 6$ 167

2.25. Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-6}$ . . . 168
2.26. Gráfico de $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2+x-6}$ . . . 169
2.27. Gráfico de $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^3-x}$ . . . 170
2.28. Gráfico de $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2}$ . . . 171
2.29. Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$ . . . 173
2.30. Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{2x+1}$ . . . 174
2.31. Interpretación geométrica de la continuidad . . . 179
2.32. Casos de discontinuidades removibles . . . 181
2.33. Teorema de Bolzano - Weierstrass . . . 182
2.34. Teorema de Weierstrass . . . 183
2.35. Continuidad de la inversa . . . 185
2.36. . . . 187
2.37. . . . 188
2.38. . . . 189
2.39. . . . 191
2.40. La función f no puede ser contínua . . . 196
2.41. La función f no puede ser contínua . . . 197

3.1. Distancia entre dos puntos . . . 204
3.2. Circunferencia unitaria . . . 205
3.3. Dos sentidos en la medida de un ángulo . . . 206
3.4. Representación del seno y coseno en el círculo unitario . . . 207
3.5. Relaciones de paridad en las funciones trigonométricas . . . 209
3.6. Hexágono regular . . . 210
3.7. Octágono regular . . . 210
3.8. Dodecágono regular . . . 211
3.9. La función $y = \operatorname{sen} x$ . . . 212
3.10. La función $y = \cos x$ . . . 213
3.11. La función $y = \tan x$ . . . 214
3.12. La función $y = \operatorname{cotan} x$ . . . 215
3.13. La función $y = \sec x$ . . . 216
3.14. La función $y = \operatorname{cosec} x$ . . . 217
3.15. Interpretación geométrica . . . 217
3.16. Diagrama de Cauchy . . . 218
3.17. Función sinusoidal $f(x) = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$ . . . 235

3.18. 236
3.19. Efecto del coeficiente ω en la función $\operatorname{sen}(\omega x)$ 237
3.20. Efecto del coeficiente α en la función $\alpha \operatorname{sen} x$ 238
3.21. Efecto de la traslación en $\pm\pi$ de la variable independiente en la función $\operatorname{sen} x$ 238
3.22. 241
3.23. 243
3.24. Triángulo 247
3.25. Distancia a un punto inaccesible 248
3.26. Distancia entre dos puntos inaccesibles 249
3.27. Torre de pie accesible 250
3.28. Torre de pie inaccesible 250
3.29. Altura de una montaña 251
3.30. 253
3.31. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Observar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ 254
3.32. Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ 256
3.33. $y = \tan x$ 257
3.34. Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ 258
3.35. Gráfico de $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ 259
3.36. Gráfico de $h(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ 259
3.37. La función $\operatorname{sen} x$ y su inversa 263
3.38. $y = \operatorname{sen}(x)$ 264
3.39. $y = \operatorname{signo}(\operatorname{sen} x)$ 264
3.40. Gráfico de a^x. 273
3.41. Gráfico de $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ 277
3.42. Gráfico de 2^x y 2^{-x}. 279
3.43. Gráfico de $\log_a(x)$. 281
3.44. Funciones hiperbólicas 287
3.45. Funciones hiperbólicas inversas 289

4.1. Interpretación geométrica de la derivada 300
4.2. Recta tangente 301
4.3. Recta normal 302
4.4. 323
4.5. Teorema de Rolle 324
4.6. Interpretación geométrica del teorema del valor medio 325
4.7. Función con derivada positiva 326

4.8. Mínimo de una función . . . 327
4.9. Significado geométrico del signo de la derivada . . . 328
4.10. Funciones convexas (a) y funciones cóncavas (b) . . . 329
4.11. Puntos de inflexión . . . 332
4.12. Gráfico de $f(x) = \text{arcsen} x$ . . . 335
4.13. Gráfico de $f(x) = \text{arc}\cos x$ . . . 336
4.14. Gráfico de $f(x) = \arctan x$ . . . 336
4.15. Gráfico de $f(x) = \text{arccotan}\, x$ . . . 337
4.16. Gráfico de $f(x) = \text{arcsec}\, x$ . . . 338
4.17. Gráfico de $f(x) = \text{arccosec}\, x$ . . . 338
4.18. Gráfico de $\sqrt{4-x^2}$ . . . 361
4.19. Gráfico de $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ . . . 362
4.20. Crecimiento de la curva . . . 362
4.21. Concavidad de la curva . . . 363
4.22. Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ . . . 363
4.23. Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ . . . 364
4.24. Crecimiento de la función . . . 368
4.25. Concavidad de la función . . . 369
4.26. Gráfico de $\dfrac{x^3}{x^2-x-2}$ . . . 370
4.27. Crecimiento de la función . . . 371
4.28. Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$ . . . 372
4.29. Crecimiento de la función . . . 372
4.30. Gráfico de $f(x) = 2\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\, x + 3$ . . . 373
4.31. Crecimiento de la función . . . 374
4.32. Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}^3 \dfrac{x}{2}} + \dfrac{1}{\cos^3 \dfrac{x}{2}}$ . . . 375
4.33. Distancia entre dos puntos . . . 381
4.34. Razón Dada . . . 381
4.35. Recta que pasa por el origen . . . 383
4.36. Recta que no pasa por el origen . . . 383
4.37. Recta . . . 384
4.38. Ángulo formado por dos rectas . . . 385
4.39. Recta que pasa por dos puntos . . . 385
4.40. Circunferencias . . . 387
4.41. Elipse . . . 388
4.42. Elipses . . . 390

4.43. Hipérbola . . . 391
4.44. Hipérbolas Conjugadas . . . 392
4.45. Parábola . . . 394
4.46. $y^2 = 13x$ . . . 395
4.47. $y^2 = -13x$ . . . 395
4.48. $x^2 = 13y$ . . . 396
4.49. $x^2 = -13y$ . . . 396
4.50. Traslación de ejes . . . 399
4.51. Rotación de ejes . . . 402
4.52. Cisoide . . . 408
4.53. Lemniscata de Bernoulli . . . 410
4.54. . . . 411
4.55. . . . 412
4.56. Distancia desde un punto a una recta . . . 412
4.57. Simetrales de un triángulo . . . 414
4.58. . . . 416
4.59. . . . 417
4.60. . . . 418
4.61. . . . 419
4.62. Reflejo de la luz en la parábola . . . 426
4.63. . . . 432
4.64. . . . 438
4.65. . . . 438
4.66. Coordenadas polares de un punto en el plano . . . 440
4.67. Lemniscata de Gerono . . . 446
4.68. Astroide . . . 448
4.69. Elipse . . . 449
4.70. Cicloide . . . 449
4.71. Coordenadas polares de un punto en el plano . . . 450
4.72. . . . 454
4.73. . . . 457
4.74. . . . 458
4.75. . . . 458
4.76. . . . 459
4.77. . . . 459
4.78. . . . 460
4.79. . . . 460
4.80. . . . 460
4.81. . . . 461
4.82. . . . 461

4.83. . . . 462
4.84. . . . 462
4.85. . . . 464
4.86. . . . 467
4.87. . . . 468
4.88. . . . 470
4.89. . . . 471
4.90. . . . 472
4.91. . . . 474
4.92. . . . 475
4.93. . . . 476
4.94. . . . 477
4.95. . . . 479
4.96. . . . 479
4.97. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . . . 486

6.1. Partición del intervalo . . . 569

7.1. Bifolio recto, $a = 1$ . . . 636
7.2. Lemniscata de Gerono . . . 638
7.3. Circunferencia de radio r . . . 639
7.4. Gráfico de una elipse . . . 641
7.5. Área comprendida entre $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$, $y = e^{-|x|}$ . . . 642
7.6. Gráfico del área comprendida entre $y = |\operatorname{sen} x|$, el eje X, con $x \in [0, 4\pi]$ . . . 642
7.7. Gráfico del área comprendida entre seno y coseno entre 0 y π . . . 643
7.8. Gráfico del área comprendida entre $y = \operatorname{sen} x$ y $y = |\cos x|$, con x entre 0 y π 644
7.9. Gráfico del área comprendida entre $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, y las rectas $x = -1$ y $x = 3$ . . . 645
7.10. Gráfico del area encerrada entre el eje X e $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ . . . 646
7.11. Gráfico del área acotada por por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. . . . 648
7.12. Gráfico del area entre $y = \cosh x$ e $y = 2$ . . . 649
7.13. Astroide . . . 650
7.14. Cicloide, $a = 1$ . . . 654
7.15. Deltoide . . . 655
7.16. Gráfico de Datos . . . 687
7.17. Regla de Simpson . . . 688
7.18. Gráfico de $|f^{IV}(\theta)|$ . . . 692

9.1. . . . 825

9.2. Extensión periódica a la recta real de $f(x) = \cosh x$ definido en el intervalo $[-2, 2]$. 827
9.3. Una función continua a tramos 828
9.4. 830
9.5. La función signo 836
9.6. Los cuatro primeros armónicos de $f(x) = 1$ 840
9.7. Onda parabólica 850
9.8. $f(x) = x \cos x$ 851
9.9. Función exponencial en $]-\pi, \pi]$ 854
9.10. Extensiones periódicas 864

Parte I

TOMO I

Capítulo 1

Los números reales

En este capítulo daremos, de manera muy sucinta, las propiedades de los números reales que constituyen la base sobre la cual se construye el cálculo diferencial e integral. Las propiedades aritméticas de estos números han formado parte de la enseñanza básica y media. Algo menos, posiblemente, se ha visto del orden y nada de su propiedad más trascendente - su continuidad - la que está reflejada en el Axioma del Supremo. La actual presentación de los números reales fue formalizada durante el siglo 19, dos siglos más tarde de la creación del cálculo. Como afirma el filósofo L. Geymonat:

"El desarrollo de la teoría de los números reales contribuyó a que el análisis infinitesimal dejara de ser la técnica imprecisa e intuitiva que habían forjado sus descubridores del siglo 17, para erigirse en auténtica ciencia y, lo que es más, en una de la más rigurosas y perfectas construcciones del espíritu científico modermo".

1.1. La aritmética de los números reales: axiomas de cuerpo

Aceptaremos la existencia de un conjunto no vacío $\mathbb{R}$, que llamaremos conjunto de los **números reales**. Sobre él se ha definido una relación de igualdad y dos operaciones algebraicas.

La relación de igualdad "="satisface las propiedades de:

(I_1) **Reflexividad**: $a = a$

(I_2) **Simetría**: si $a = b$, entonces $b = a$

(I_3) **Transitividad**: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Las dos operaciones definidas sobre $\mathbb{R}$ son la **suma** $(+)$ y la **multiplicación** $(\cdot)$.

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \\ \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

Estas operaciones satisfacen las reglas siguientes, llamadas **axiomas de cuerpo**.

(C_1) Ley **asociativa** para la suma: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

(C_2) Existencia de un **elemento identidad** para la suma: $a+0=0+a=a$

(C_3) Existencia de **inversos** para la suma: $a+(-a)=(-a)+a=0$.

(C_4) Ley **conmutativa** para la suma: $a+b=b+a$.

(C_5) Ley **asociativa** para la multiplicación: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

(C_6) Existencia de un **elemento identidad** para la multiplicación: $a\cdot 1=1\cdot a=a;\ 1\neq 0$.

(C_7) Existencia de **inversos** para la multiplicación: $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$, para $a\neq 0$.

(C_8) Ley **conmutativa** para la multiplicación: $a\cdot b=b\cdot a$

(C_9) Ley **distributiva**: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

Estas operaciones son **compatibles con la relación de igualdad**, es decir, si $a=b$ entonces $a+c=b+c$ y $a\cdot c=b\cdot c$.

A partir de estos axiomas y las reglas de la lógica formal se pueden obtener todas las otras propiedades de la aritmética usual que Ud. ha aprendido durante la enseñanza básica y media. Los siguientes teoremas, que no se demostrarán, serán enunciados con el propósito de recordar las propiedades más importantes que se derivan de los axiomas de cuerpo .

Teorema 1.1.1 Dado $a\in\mathbb{R}$ se cumple : $0\cdot a=0$

Teorema 1.1.2 Dados $a,b\in\mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:

(i) $-(-a)=a$.

(ii) $(-a)\cdot b=-(ab)$.

(iii) $a\cdot(-b)=-(ab)$.

(iv) $(-a)(-b)=ab$.

Teorema 1.1.3 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$, se tienen las siguientes propiedades:

(i) $(a^{-1})^{-1} = a$.

(ii) $a^{-1} \cdot b = (a \cdot b^{-1})^{-1}$.

(iii) $a \cdot b^{-1} = (a^{-1} \cdot b)^{-1}$.

(iv) $a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$.

Teorema 1.1.4 Leyes de cancelación. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple :

(i) $a + b = a + c \iff b = c$.

(ii) $ab = ac$, $a \neq 0 \iff b = c$.

Teorema 1.1.5 Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple: $ab = 0 \iff (a = 0) \vee (b = 0)$.

Definición 1.1.6 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, escribiremos $a - b$ para simbolizar el número $a + (-b)$ y lo llamaremos la **diferencia** de a y b.

Teorema 1.1.7 Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tienen las siguientes propiedades:

(i) $a - (-b) = a + b$

(ii) $a - b = 0 \iff a = b$

(iii) $a - (b + a) = a - b - a$.

Demostración:

(i) Por definición 1.1.6

$$\begin{aligned} a - (-b) &= a + (-(-b)) \\ &= a + b \text{ por Teorema 1.1.2 (i).} \end{aligned}$$

Las afirmaciones (ii) y (iii) se dejan de ejercicio.

Definición 1.1.8 Dados $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, escribiremos $\dfrac{a}{b}$, ó, $a : b$ para simbolizar el número $a \cdot b^{-1}$ y lo llamaremos **el cuociente entre** a **y** b, ó, a **dividido por** b**.**

Teorema 1.1.9 Dados $a, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:

(i) $\dfrac{a}{1} = a.$

(ii) Si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{a} = a^{-1}.$

(iii) Si $a \neq 0$, entonces $\dfrac{a}{a} = 1.$

(iv) Si $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, entonces $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \iff a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2.$

(v) Si $a_2 \neq 0$, $b \neq 0$, entonces $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{a_1 \cdot b}{a_2 \cdot b}$

(vi) Si $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, entonces $\dfrac{a_1}{a_2} \cdot \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2}$

(vii) Si $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, entonces $\dfrac{a_1}{a_2} \pm \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{a_1 \cdot b_2 \pm b_1 \cdot a_2}{a_2 \cdot b_2}$

(viii) Si $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$, entonces $\dfrac{a_1}{a_2} : \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1}.$

Resolución de ecuaciones algebraicas de primer grado.

La ecuación de primer grado,

$$ax + b = c, \qquad a \neq 0, \tag{1.1}$$

tiene una única solución dada por:

$$\boxed{x = \frac{c - b}{a}}$$

Fórmulas básicas de factorización

1. $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
2. $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$
3. $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
4. $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + x^{n-4}y^3 + \ldots\ldots + y^{n-1});\ n \in \mathbb{N}$

5. Si n es par: $(x^n - y^n) = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \ldots\ldots - y^{n-1})$

6. - Si n es impar: $(x^n + y^n) = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \ldots\ldots + y^{n-1})$
   - Si n es par, la expresión $(x^n + y^n)$ no tiene factores lineales con coeficientes reales.

7. $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

8. $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

9. $(x + y + z + \ldots\ldots)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + 2(xy + xz + yz + \ldots)$

10. **Fórmula del binomio:**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k.$$

donde n, k son números naturales y $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ejercicios de repaso

1. Usando la notación $x^2 = x \cdot x$, demuestre que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

   Solución:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= (a+b)a + (a+b)b\\ &= aa + ba + ab + bb\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2.\end{aligned}$$

2. **Un caso particular de igualdad de polinomios**
   Dados los números reales a, b, c; demuestre que: $ax^2 + bx + c = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $a = b = c = 0$.

   Solución:

   Supongamos $a = b = c = 0$. Entonces usando la propiedad de la multiplicación por cero, tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0x^2 + 0b + c = 0,$$

   Cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, supongamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1.2}$$

Haciendo $x = 0$ en (1.2), tenemos:

$$a0 + b0 + c = 0,$$

de lo que podemos deducir: $c = 0$.

Si $x \neq 0$, entonces

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0 \ \text{ ; por lo tanto } \ ax + b = 0.$$

Haciendo sucesivamente $x = 1$ y $x = -1$ en $ax + b = 0$, obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -a + b &= 0. \end{aligned}$$

Lo que implica $a = b = 0$.

3. Dados los números reales a, b, c, a', b', c'; demuestre que:
$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, para todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $a = a', b = b', c = c'$.

Solución: $ax^2+bx+c = a'x^2+b'x+c'$ es equivalente a $(a-a')x^2+(b-b')x+(c+c') = 0$, lo que a su vez por el ejercicio (2), es equivalente a $a = a', b = b', c = c'$.

4. Encuentre a, b de modo que para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq 2$:

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

Solución:

Siguiendo las reglas de la sumas de cuocientes dadas por el teorema 1.1.9, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{(x-1)(x-2)} &= \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(a+b)x+(-2a-b)}{(x-1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Por tanto, usando la ley de cancelación, obtenemos la igualdad de los numeradores:

$$(a+b)x + (-2a-b) = 3x + 1.$$

En virtud del ejercicio (3), se tienen las igualdades:

$$\begin{aligned} a+b &= 3 \\ -2a-b &= 1, \end{aligned}$$

que nos dan los valores buscados de a, b: $a = -4, b = 7$. Se deja al lector el trabajo de comprobar que verdaderamente estos valores satisfacen la condición pedida.

5. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que la expresión:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

sea independiente de cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Solución: Supongamos que, cualquiera sea x, la expresión sea igual a una constante k, diferente de cero. Es decir,

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} = k,$$

Por definición de cuociente tenemos:

$$ax^2+bx+c = ka'x^2+kb'x+kc'.$$

Como esta igualdad se cumple cualquiera sea x, según ejercicio (3) concluimos:

$$a = ka', \quad b = kb', \quad c = kc'.$$

Esto nos dice que la condición buscada es : **los coeficientes de las mismas potencias de x deben ser proporcionales**.

Para completar el ejercicio debemos demostrar que la condición es suficiente.

En efecto, si: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, entonces también se cumple: $\frac{ax^2}{a'x^2} = \frac{bx}{b'x} = \frac{c}{c'} = k$, por teorema 1.1.9. De estas tres igualdades se obtiene :

$$ax^2+bx+c = ka'x^2+kb'x+kc' = k(a'x^2+b'x+c').$$

Por tanto, la expresión

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

es independiente de x.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que $\dfrac{a-x}{b-y} = \dfrac{x-a}{y-b}$ y exprese esta regla en palabras.

2. Demuestre que $\dfrac{a-x}{b-y} = -\dfrac{x-a}{b-y}$ y exprese esta regla en palabras.

3. Demuestre que

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)} = 1.$$

4. Demuestre que

$$\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1\right)\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x-y}.$$

5. Demuestre que la siguiente expresión se anula cuando $x = \dfrac{a+b}{2}$:

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}.$$

6. Simplifique la expresión

$$\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x}}} + \frac{x^2-2}{1-\dfrac{1}{x^2-\dfrac{1}{x}}}$$

7. Encuentre a, b de modo que para todo $x \in \mathbb{R}, x \neq -4, x \neq 3$:

$$\frac{6x-2}{x^2+x-12} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-3}.$$

8. Factorice los siguientes polinomios en factores lineales y cuadráticos con coeficientes en $\mathbb{R}$.

   a) $x^2-1, \quad x^3-1, \quad x^4-1, \quad x^3+1, \quad x^3+8.$

   b) x^4+1. Indicación: sume y reste $2x^2$.

   c) x^4+4. Indicación: sume y reste $4x^2$.

   d) x^4+x^2+1. Indicación: sume y reste x^2.

   e) x^4-x^2+1. Indicación: sume y reste $2x^2$.

   f) $x^6-1, \quad x^6+1.$

1.2. Comparación de los números reales: axiomas de orden

1.2.1. Los axiomas de orden

Siguiendo la presentación axiomática, aceptaremos la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$, llamado conjunto de los **números reales positivos,** denotado por $\mathbb{R}^+$, que satisface las propiedades siguientes:

(O_1) $\mathbb{R}^+$ **es cerrado para la suma**, es decir, si a, b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces $a + b$ pertenecen a $\mathbb{R}^+$.

(O_2) $\mathbb{R}^+$ **es cerrado para la multiplicación,** es decir, si a, b pertenecen a $\mathbb{R}^+$, entonces $a \cdot b$ pertenece a $\mathbb{R}^+$.

(O_3) **Ley de Tricotomía**: Para todo número real a se cumple una y sólo una de las afirmaciones:

(i) $a = 0$

(ii) a pertenece al conjunto $\mathbb{R}^+$

(iii) $-a$ pertenece al conjunto $\mathbb{R}^+$.

Observación 1.2.1 El axioma O_3 se llama **propiedad de tricotomía de los números reales**

Definición 1.2.2 (i) $a < b$ si y sólo si $b - a \in \mathbb{R}^+$

(ii) $a > b$ si y sólo si $a - b \in \mathbb{R}^+$

Teorema 1.2.3 Dados los números reales a, b se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(i) $a = b$

(ii) $a < b$

(iii) $a > b$

Demostración: Aplicando el axioma (O_3) o propiedad de Tricotomía al número $a-b$, se tiene una y sólo una de las afirmaciones.

(i) $a - b = 0$

(ii) $a - b \in \mathbb{R}^+$

(iii) $-(a-b) \in \mathbb{R}^+$

Las cuales se traducen en $a = b$, $a > b$, $a < b$ respectivamente usando las propiedades de la subsección 1.1 y la definición 1.2.2. □

Teorema 1.2.4 Dado un número real a se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(i) $a = 0$

(ii) $a > 0$

(iii) $a < 0$

Demostración: Es consecuencia directa del teorema 1.2.3 tomando $b = 0$. □

Teorema 1.2.5 La relación "<"tiene las propiedades siguientes:

(i) No es reflexiva. Para todo $a \in \mathbb{R}$, no es verdad que $a < a$

(ii) Es asimétrica. Si $a < b$, entonces no puede tenerse $b < a$

(iii) Es transitiva. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demostración:

(i) Si para algún $a \in \mathbb{R}$, $a < a$, entonces $a - a \in \mathbb{R}^+$, lo cual implicaría que $0 \in \mathbb{R}^+$, que contradice (O_3).

(ii) Si $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$, lo que por tricotomía excluye que $a - b \in \mathbb{R}^+$, por tanto es imposible que $b < a$.

(iii) Si $a < b$, entonces $b-a \in \mathbb{R}^+$. Si $b < c$, entonces $c-b \in \mathbb{R}^+$ por (O_1), $(b-a)+(c-b) \in \mathbb{R}^+$, o lo que es lo mismo $c - a \in \mathbb{R}^+$, por tanto $a < c$. □

Definición 1.2.6 Llamaremos conjunto de los **números reales negativos** al conjunto $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$.

Observemos que $0 \notin \mathbb{R}^-$, lo que pone de manifiesto que el cero no es positivo ni negativo. Además $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, pero por el axioma (O_3) todo número real pertenece a uno y sólo a uno de los conjuntos: $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \{0\}$. Así los números reales quedan particionados como $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

Por teorema 1.2.3 y teorema 1.2.4 (iii), se tiene que todo número negativo es menor que cualquier número positivo y el cero es la frontera entre los dos tipos de números.

Definición 1.2.7 (i) $a \leq b$ si y sólo si $(a < b) \vee (a = b)$

(ii) $a \geq b$ si y sólo si $(a > b) \vee (a = b)$

Teorema 1.2.8 La relación "$\leq$" es:

(i) Reflexiva: $a \leq a$

(ii) Antisimétrica: Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$

(iii) Transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

Demostración:

(i) Como $a = a$, entonces $a \leq a$

(ii) Si $a \leq b$, entonces $(a < b)$ ó $(a = b)$ y si $b \leq a$, entonces $(b < a)$ o $(a = b)$. Por tanto, por teorema 1.2.4(ii) sólo es posible $a = b$.

(iii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$ tenemos cuatro posibilidades:

$a < b$ y $b < c$. En este caso la transitividad se obtiene del teorema 1.2.4(ii).

$a < b$ y $b = c$. En este caso $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b = 0$, por tanto $(b - a) + (c - b) = c - a \in \mathbb{R}^+$ y tenemos $a < c$.

$a = b$ y $b < c$. Para este caso la demostración es semejante a la anterior.

$a = b$ y $b = c$. La conclusión se sigue de la transitividad de la igualdad y la definición de la relación "$\leq$". □

Teorema 1.2.9 $a \leq b$ si y sólo si $a + c \leq b + c$

Demostración: Si $a \leq b$ entonces $a < b$ ó $a = b$.
Si $a < b$, entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (b - a) + 0 \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (b - a) + (c - c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow a + c < b + c \\ &\Rightarrow a + c \leq b + c \end{aligned}$$

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$, por la compatibilidad de la igualdad con la suma. □

Teorema 1.2.10 (i) Si $a \leq b$ y c es un número positivo, entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$

(ii) Si $a \leq b$ y c es un número negativo, entonces $a \cdot c \geq b \cdot c$.

Demostración:

(i) Si $a \leq b$ entonces $a < b \quad$ ó $\quad a = b$. Si $a < b$, se tiene $b - a \in \mathbb{R}^+$ y como $c \in \mathbb{R}^+$ entonces por (O_2) $(b - a) \cdot c \in \mathbb{R}^+$, lo cual implica $a \cdot c < b \cdot c$. Si $a = b$, entonces por la compatibilidad de la igualdad con el producto $a \cdot c = b \cdot c$. En consecuencia, $a \cdot c \leq b \cdot c$.

(ii) Se deja como ejercicio.

Teorema 1.2.11 (i) Si $a > 0$, entonces $-a < 0$

(ii) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$

(iii) Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$

(iv) Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$

Demostración:

(i) Si $a > 0 \implies a \in \mathbb{R}^+ \implies -a \in \mathbb{R}^-$

(ii) Si $a < 0 \implies -a \in \mathbb{R}^+ \implies -a > 0$

(iii) Sea $a > 0$, supongamos $a^{-1} < 0$, entonces por teorema 1.2.10 (i) $a \cdot a > 0$. Por teorema 1.2.10(ii)

$$\begin{array}{lcl} (a^{-1} \cdot a) \cdot a & < & 0 \\ 1 \cdot a & < & 0 \\ a & < & 0 \end{array}$$

Lo que contradice nuestra hipótesis. Por tanto $a^{-1} > 0$.

(iv) Se usan los mismos argumentos que en (iii). □

Teorema 1.2.12 $a \cdot b > 0$ si y sólo si ($a > 0$ y $b > 0$) ó ($a < 0$ y $b < 0$).

Demostración: ($\Rightarrow$) Si $a \cdot b > 0$, sabemos por teorema 1.1.5 que $a \neq 0, b \neq 0$. Si $a > 0$, entonces usando teorema 1.2.10, $a^{-1} \cdot (a \cdot b) > 0$. Lo que implica $(a^{-1} \cdot a) \cdot b > 0$ y por tanto $b > 0$.

De manera similar si $a < 0$, se concluye que $b < 0$ con lo cual tenemos nuestra implicancia.

($\Leftarrow$) Si $a > 0$ y $b > 0$, por axioma (O_2) $a \cdot b > 0$. Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $-a > 0$ y $-b > 0$, por axioma (O_2) $(-a) \cdot (-b) > 0$; por teorema 1.1.2 (iv) $a \cdot b > 0$. □

Teorema 1.2.13 $a \cdot b < 0$ si y sólo si ($a < 0$ y $b > 0$) o ($a > 0$ y $b < 0$)

Demostración: Se deja como ejercicio.

Teorema 1.2.14 El cuadrado de un número real no nulo es positivo: Si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, entonces $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Demostración: Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $a > 0$. Por axioma (O_2), $a \cdot a > 0$,
es decir, $a^2 > 0$.
Si $a \in \mathbb{R}^-$, entonces $a < 0$. Por teorema 1.2.12, $a \cdot a > 0$, así nuevamente $a^2 > 0$. □

Teorema 1.2.15 $1 \in \mathbb{R}^+$.

Demostración: Por axioma (C_6), $1 \neq 0$,

$$1 = 1 \cdot 1$$
$$1 = 1^2$$

El teorema anterior implica que $1 > 0$. □

Teorema 1.2.16 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, entonces $a < \dfrac{a+b}{2} < b$

Demostración: Si $a < b$, entonces sumando a en ambos miembros de la desigualdad se tiene $a + a < b + a$, por tanto:

$$a(1+1) < b + a \Rightarrow$$
$$2a < b + a$$

Aplicando el mismo razonamiento, pero ahora sumando b en ambos miembros de la desigualdad $a < b$, obtenemos que $b + a < 2b$.

En virtud de la transitividad de la relación "<"se obtiene que

$$2a < b + a < 2b$$

dividiendo todo por $2 > 0$, se tiene lo que queríamos demostrar, $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. □

El teorema 1.2.16 puede leerse diciendo que *entre dos números reales a, b distintos siempre existe un tercer número c.* Como a, c son distintos, puede aplicarse la conclusión a ellos y obtener un cuarto número real d, y así sucesivamente. Como este proceso puede extenderse indefinidamente, lo que obtenemos es que *entre dos números reales distintos existen infinitos números reales.* Esta importante propiedad se llama *densidad* de los números reales.

Definición 1.2.17 Decimos que un conjunto A de números reales es **denso** si y sólo si entre dos elementos distintos x, y de A existe un elemento $z \in A$ tal que $x < z < y$.

1.2.2. Resolución de ecuaciones de grado mayor que uno

Resolución de una ecuación algebraica de segundo grado

Dada la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0; \qquad a \neq 0 \tag{1.3}$$

se tiene que

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación (1.3) tiene dos raíces o soluciones reales distintas, dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación (1.3) tiene una única raíz real dada por:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (1.3) tiene raíces complejas conjugadas. En este caso diremos que el polinomio cuadrático no es factorizable en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.18 1. Resuelva en $\mathbb{R}$ la ecuación.

$$x^2 + x = 1$$

Solución: Se debe llevar a la forma $ax^2 + bx + c = 0$ entonces queda.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Su discriminante $b^2 - 4ac$ vale:

$$1 - 4(1)(-1) = 5$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos raíces reales distintas

$$x = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2. Resuelva en $\mathbb{R}$, la ecuación:

$$x^2 + x = -1$$

Solución: $x^2 + x + 1 = 0$

Su discriminante $b^2 - 4ac$ vale

$$1 - 4(1)(1) = -3 < 0.$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$.

3. $x^2 - 2x + 1 = 0$

Su discriminante $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$.
Entonces, tiene una única raíz real : $x = 1$.

4. Resolver en $\mathbb{R}$ la ecuación:

$$x^3 - 8 = 0$$

Factorizando el polinomio $x^3 - 8$.

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= (x-2)(x^2+2x+4) \\ x^3 - 8 &= 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x-2 & = & 0 \\ \text{ó} & & \\ x^2+2x+4 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ \text{ó} \\ x^2+2x+4 = 0 \end{array} \right.$$

La ecuación $x^2 + 2x + 4$ tiene discriminante:

$$b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 4 = 4 - 16 < 0.$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene raíces reales. Así, la ecuación $x^3 - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real $x = 2$.

Resolución de ecuaciones algebraicas de grado mayor o igual a 3

La solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado pueden ser resueltas con reglas análogas, aunque mucho más complicadas que las de segundo grado. Estas fórmulas fueron encontradas por los algebristas italianos del siglo 16. Para la ecuación de tercer grado existe la fórmula de Cardano-Tartaglia. Cardano (1501-1576), Tartaglia (1500 - 1557). La ecuación general de cuarto grado fue resuelta por Ferrari (1522 - 1565). En el año 1824 el matemático noruego Abel (1802 - 1829), demostró que para el caso general de una ecuación algebraica completa de grado mayor o igual a 5,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\ ,\ a_i \in \mathbb{R},$$

no existe ninguna expresión en términos de radicales de los coeficientes que sea raíz de la ecuación.
El lector interesado en conocer más detalles matemáticos - históricos de este tema puede consultar el libro de A.D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros: *La matemática su contenido, métodos y significado*, tomo I, pág.315.
Ciertos casos particulares pueden resolverse con algunos artificios, como mostraremos en los siguientes casos.
Resolución de ecuaciones recíprocas cúbicas Estas ecuaciones tienen una de las formas siguientes:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \qquad \text{ó} \qquad ax^3 - bx^2 + bx - a = 0. \tag{1.4}$$

Al factorizar según los coeficientes se obtendrá como raíz 1 o -1. Enseguida se resuelve la ecuación cuadrática correspondiente.

Ejemplo 1.2.19 1. La ecuación $x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0$, se resuelve factorizando:

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 6x + 1 &= (x^3 + 1) + 6x(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 6x(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 6x) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0 &\iff (x + 1) = 0 \text{ ó } (x^2 + 5x + 1) = 0. \\ &\iff x = -1 \text{ ó } x = \frac{-5 \mp \sqrt{21}}{2}. \end{aligned}$$

2. La ecuación $x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0$, se resuelve de manera análoga.

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 6x - 1 &= (x^3 - 1) - 6x(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 6x(x - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1 - 6x) \end{aligned}$$

Luego,

$$x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = 0 \iff (x-1) = 0 \text{ ó } (x^2 - 5x + 1) = 0.$$
$$\iff x = 1 \text{ ó } x = \frac{-5 \mp \sqrt{21}}{2}.$$

Para encontrar una raíz de la ecuación general de tercer grado

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

debemos hacer el cambio de variable $y = x - \dfrac{a}{3}$, que transforma la ecuación original en una de la forma $x^3 + px + q = 0$, donde $p = b - \dfrac{a^2}{3}$ y $q = c - \dfrac{ab}{3} + \dfrac{2a^3}{27}$. Se demuestra con cálculos algebraicos directos que

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{1.5}$$

verifica que $x^3 + px + q = 0$. Que dicha raíz sea real o compleja depende del signo de $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$. La ecuación (1.5) se llama fórmula de Cardano-Tartaglia.

Ejemplo 1.2.20 La ecuación $x^3 + 9x - 2 = 0$ tiene una raíz real de la forma:

$$x = \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{7}} + \sqrt[3]{1 - 2\sqrt{7}}.$$

Algunos casos accesibles de ecuaciones de cuarto grado se verán en los ejercicios resueltos.

1.2.3. Desigualdades e inecuaciones

La diferencia entre una desigualdad es la misma que entre una igualdad o identidad y una ecuación. Es decir, una desigualdad es una relación de orden que tiene un rango de validez y una importancia de cierta trascendencia en alguna rama de la matematica. Por ejemplo, el cuadrado de un binomio es una igualdad que s cumple para todo número real y de ella se deduce una desigualdad válida para todo número real:

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

De esta se puede obtener otra desigualdad:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \text{si } a > 0.$$

En cambio una ecuación ó inecuación es una relación más circunstancial. Por esto, en rigor, una desigualdad se demuestra y una inecuación se resuelve.

Definición 1.2.21 1. Llamaremos **inecuación** a cualquier expresión relacionada con los símbolos $<$, $>$, $\leq$,$\geq$ y que contenga una incógnita está en grado 1, se llama inecuación de primer grado. si está en grado n se llama de grado n. Dos inecuaciones se dicen equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

2. Llamaremos **desigualdad** a cualquier expresión relacionada con los símbolos $<$, $>$, $\leq \geq$ que tenga una validez general.

Para resolver una inecuación los pasos previos obligatorios son:

1. Reducir términos semejantes.

2. Factorizar el respectivo polinomio cuando el grado es mayor o igual a dos.

En principio para resolver inecuaciones de grado igual o superior a dos se debe aplicar los teoremas 1.2.12 y 1.2.13 analizando las distintas posibilidades de signo de los factores. A este método le llamaremos **axiomático**. Pero, en general este método resulta largo si se aplica al pie de la letra. A continuación expondremos la forma más rápida de resolver dichas inecuaciones, llamado **método reducido**.

1. **Resolución de una inecuación de primer grado**

   Después de reducir los términos semejantes, una inecuación de primer grado puede escribirse como:

   $$0 \leq ax + b \tag{1.6}$$

   Usando el teorema (1.2.9), se tiene que

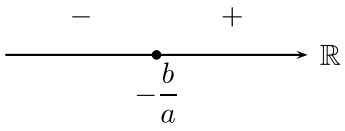
   $$-b \leq ax \tag{1.7}$$

   Para despejar completamente la variable x, se debe multiplicar la inecuación (1.7) por el inverso multiplicativo de a.
   Por lo tanto, en virtud del teorema (1.2.10)se tiene que:

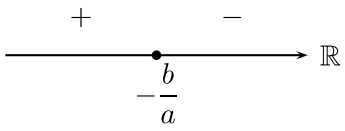
$$0 \leq ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{b}{a} & \text{si } a > 0 \\ \\ x \leq -\dfrac{b}{a} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Signo de $ax + b$

Si $a > 0$:



Si $a < 0$:



2. **Resolución de una inecuación de segundo grado general.**

   Dados los números a, b, c, encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad:

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Solución:

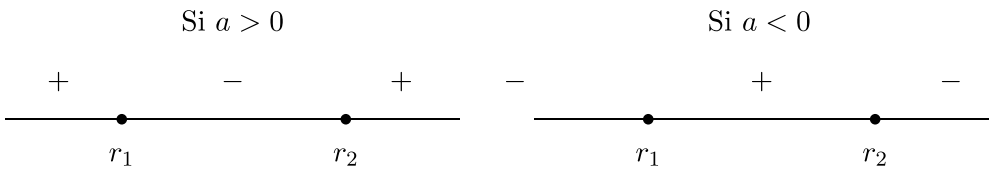
Primer caso: Supongamos que el trinomio puede escribirse en la forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2),$$

Donde $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $r_1 < r_2$. (Raíces reales y distintas). Si $a > 0$, entonces el trinomio es positivo si los dos factores en x tienen el mismo signo, por lo tanto, la inecuación se cumple cuando x es menor que ambas raíces o cuando x es mayor que ambas raíces. Es decir, la solución al problema es:

$$x < r_1 \ \text{ ó } \ x > r_2.$$

Si $a < 0$, el trinomio es positivo cuando los dos factores en x tienen distintos signos. Por tanto, la inecuación se cumple para x comprendido entre r_1 y r_2.



Segundo caso: Si $r_1 = r_2 = r$, raíces reales e iguales , entonces

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)^2.$$

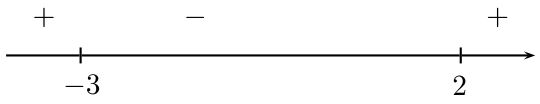
Como todo cuadrado es positivo o nulo, tenemos que la inecuación se cumple para todo $x \neq r$ si $a > 0$ y no se cumple nunca cuando $a < 0$.

Tercer caso: Si el trinomio no es factorizable en factores de primer grado con coeficientes reales, es decir, sus raíces son complejas conjugadas. Lo primero que debemos observar es que la expresión no se anula nunca y tampoco cambia de signo, esto último se justificará en sección de continuidad. Por tanto el trinomio es siempre positivo o siempre es negativo. Como el cuadrado de un número grande crece mucho más que el número, es el coeficiente a que determina el signo. Si $a > 0$, la inecuación se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$; si $a < 0$ no existen números reales que satisfagan la inecuación.

Ejemplo 1.2.22 *a)* Resolver la inecuación $x^2 + x - 6 > 0$.

Solución:

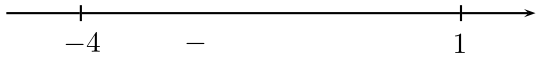
Como $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, los números que satisfacen la inecuación son los x tales que $x < -3$ ó $x > 2$.



b) Resolver la inecuación $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Solución:

$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, el método reducido implica que la inecuación se cumple para $-4 < x < 1$.



c) Resolver la inecuación $x^2 + 2x + 2 < 0$.

Solución:

$x^2 + 2x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales y su coeficiente $a = 1$ es positivo, por tanto el trinomio sólo toma valores positivos y el problema propuesto no tiene solución.

3. **Resolución de una inecuación de tercer grado factorizada.** Dados los números a, b, c, encuentre todos los números reales x que satisfacen la inecuación:

$$(x - a)(x - b)(x - c) > 0.$$

Solución:

Supongamos que $a < b < c$.

Si $x < a$, los tres factores son negativos y, por tanto, su producto es negativo.

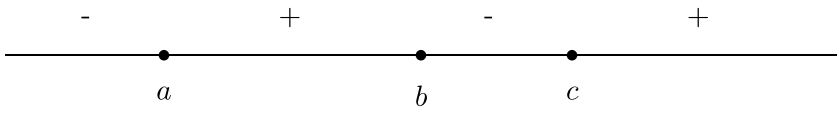
Si $x = a$, entonces el producto es nulo.

Si $a < x < b$, entonces el producto es positivo.

Si $x = b$, entonces el producto es nulo. Si $b < x < c$, entonces el producto es negativo. Si $x = c$, entonces el producto es nulo. Si $x > c$, entonces el producto es positivo.

Del análisis anterior podemos concluir que la desigualdad se cumple cuando $a < x < b$ ó $c < x$.

Observe que es importante ordenar las raíces a, b y c de menor a mayor, pues así es más rápido analizar los signos de los factores.



4. **Resolución de inecuaciones en forma de cuocientes de términos de primer grado**

Resolver la inecuación

$$\frac{ax+b}{a'x+b'} > 0.$$

Solución:

El cuociente es positivo si y sólo si ambos factores tienen el mismo signo, por lo que la inecuación del enunciado es equivalente a

$$(ax+b)(a'x+b') > 0.$$

Otra manera de transformar la inecuación fraccionaria en un producto, es multiplicar la inecuación por $(a'x+b')^2$, que por ser un cuadrado es siempre positivo salvo para $x = -\dfrac{b'}{a'}$.

Así, debemos resolver la inecuación:

$$(ax+b)(a'x+b') > 0$$

usando el método del ejercicio resuelto 2.

$$(ax+b)(a'x+b') = aa'\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x+\frac{b'}{a'}\right) > 0.$$

Si $aa' < 0$, entonces los valores de x buscados estan comprendidos entre $-\dfrac{b}{a}$ y $-\dfrac{b'}{a'}$. Si $aa' > 0$, entonces los valores de x que satisfacen la inecuación están en el complemento del conjunto comprendido entre $-\dfrac{b}{a}$ y $-\dfrac{b'}{a'}$.

5. **Inecuación que contienen la variable en el denominador de una expresión** Si una inecuación contiene a la variable en algún demoninador de un cuociente, conviene reducir todos los términos en un único cuociente de modo que en uno de los lados se tenga un cero y, posteriormente multiplicar la inecuación por el cuadrado del denominador.

Ejemplo 1.2.23 Resolver la inecuación

$$\frac{7}{x-2} - \frac{4}{x-1} \leq 0.$$

Solución:

$$\frac{7}{x-2} - \frac{4}{x-1} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}.$$

Entonces, la inecuación puede escribirse como:

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)} \leq 0; \qquad x \neq 2,\ x \neq 1.$$

multiplicándola por el cuadrado del denominador, se tiene una forma equivalente:

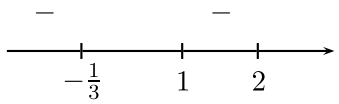
$$(3x+1)(x-2)(x-1) \leq 0.$$

Ordenando las raíces:

$$3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)(x-2) \leq 0.$$

Según el método reducido, la inecuación tiene como conjunto solución:

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{3} \text{ ó } 1 < x < 2\right\}.$$



Ejercicios resueltos

1. Demuestre que si $x \leq y$, $a \leq b$ entonces $x + a \leq b + y$.

   Solución: Como $x \leq y$ y $a \in \mathbb{R}$ por teorema 1.2.9 $x + a \leq y + a$.

   Por otro lado, como $a \leq b$ e $y \in \mathbb{R}$ por teorema 1.2.9 $a + y \leq b + y$.

   Por teorema 1.2.8 (iii), (transitividad de $\leq$), concluimos que $x + a \leq b + y$.

2. Demuestre que si $0 \leq x \leq y$ y $0 \leq a \leq b$, entonces $ax \leq by$.

   Solución: Procediendo análogamente al ejercicio resuelto 1, por teorema 1.2.10 (i) $ax \leq ay$ y $ay \leq by$. Por transitividad (teorema 1.2.8 (iii)) concluimos que $ax \leq by$.

3. Demuestre que, si $0 < a < b$, entonces $b^{-1} < a^{-1}$.

   Solución: Primero observemos que $a^{-1} - b^{-1} = (ab)^{-1}(b - a))$ (ver ejercicio 2.1.**??**). Luego, como

   $$\begin{aligned} a > 0\,,\, b > 0 \quad &\Longrightarrow \quad ab > 0 \quad \text{por teorema 1.2.12} \\ &\Longrightarrow \quad (ab)^{-1} > 0 \quad \text{por teorema 1.2.11} \end{aligned}$$

   Como $a < b \implies b - a > 0$ (por definición 1.2.2), luego $(ab)^{-1}(b - a) > 0$ por teorema 1.2.12. Por lo tanto, $a^{-1} - b^{-1} > 0 \implies b^{-1} < a^{-1}$.

4. Demuestre que, si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

   Solución: Como $b - a$ y $b + a$ son positivos por hipótesis, entonces $(b - a)(b + a) = b^2 - a^2 > 0$ por teorema 1.2.12, luego $a^2 < b^2$.

5. Demuestre que si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a = 0$.

   Solución: Supongamos por contradicción que $a \neq 0$. Luego como $a \geq 0$ y $a \neq 0$, entonces $a > 0$ por definición 1.2.7. Usando el teorema 1.2.16 con $a = 0$ y $b = a$ tenemos que existe

   $c = \dfrac{a + b}{2} = \dfrac{0 + a}{2} = \dfrac{a}{2}$ tal que $0 < \dfrac{a}{2} < a$. Ahora si tomamos $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$ concluimos que $\varepsilon < a$, lo que contradice la hipótesis. Luego, la suposición inicial es falsa y $a = 0$.

6. Demuestre que, si $x > 0$, entonces $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Solución: Previamente observemos que:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad &\iff \quad x^2 + 1 \geq 2x \\ &\iff \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\iff \quad (x-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, por teorema (1.2.14) sabemos que $(x-1)^2 \geq 0$ y por el ejercicio de repaso 1, $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Por teorema 1.2.9, $x^2 + 1 \geq 2x$, como $x > 0 \implies x^{-1} > 0$ y multiplicando por x^{-1} obtenemos $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

7. Demuestre que, si a, b, c son no negativos y no todos iguales, entonces

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) > 9abc.$$

Solución:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc &= a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) - 6abc \\ &= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2. \end{aligned}$$

Como a, b, c no son todos iguales, al menos uno de los términos $b-c$, $c-a$, $a-b$ es distinto de cero y como todo cuadrado es no negativo y $a, b, c \geq 0$, entonces resulta la desigualdad buscada.

8. Determine el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + x > 2\}$.

Solución:

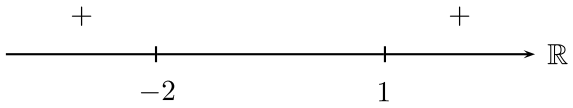
- **Método axiomático**

$$\begin{aligned} x^2 + x > 2 \quad &\iff \quad x^2 + x - 2 > 0 \quad \text{por teorema 1.2.9} \\ &\iff \quad (x+2)(x-1) > 0 \\ &\iff \quad [(x+2) > 0 \text{ y } (x-1) > 0] \text{ o } [(x+2) < 0 \text{ y } (x-1) < 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x+2 > 0 \text{ y } x-1 > 0 \quad &\iff \quad x > -2 \text{ y } x > 1 \quad \text{por teorema 1.2.9} \\ &\iff \quad x > 1 \\ \text{Si } x+2 < 0 \text{ y } x-1 < 0 \quad &\iff \quad x < -2 \text{ y } x < 1 \\ &\iff \quad x < -2 \end{aligned}$$

Por tanto,
$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 1 \text{ o } x < -2\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < -2\}$.

- **Método reducido**. Una vez factorizado el polinomio y ubicadas sus raíces en la recta real, se recorre $\mathbb{R}$ en el sentido de su orden obteniendose rápidamente el signo del polinomio en las distintos subintervalos de $\mathbb{R}$ determinados por sus raíces.



9. Determine el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (2x+1)/(x+2) < 1\}$.

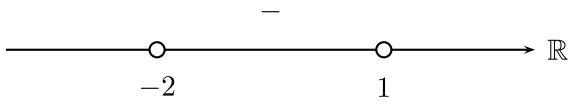
Solución: Claramente la expresión $(2x+1)/(x+2)$ no está definida para $x = -2$ luego $-2 \notin A$.

- **Método axiomático**

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} < 1 \quad &\iff \quad \frac{2x+1}{x+2} - 1 < 0, \quad \text{por teorema 1.2.9} \\ &\iff \quad \frac{x-1}{x+2} < 0 \\ &\iff \quad (x-1)(x+2) < 0 \\ \\ &\iff \quad [x-1 > 0 \text{ y } x+2 < 0] \\ &\text{o} \quad [x-1 < 0 \text{ y } x+2 > 0] \quad \text{por teorema 1.2.13} \end{aligned}$$

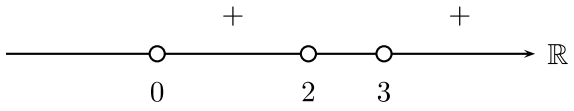
Si $x-1 > 0$ y $x+2 < 0 \iff x > 1$ y $x < -2$ (por teorema 1.2.9), sin embargo no existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaga ambas condiciones.
Si $x-1 < 0$ y $x+2 > 0 \iff x < 1$ y $x > -2$ (por teorema 1.2.9). Por tanto $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 < x < 1\}$.

- **Método reducido**



10. Resolver la desigualdad: $x(x^2 - 5x + 6) > 0$.
Solución:

$x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3)$, aplicando el método reducido, tenemos que la inecuación se satisface para los x tales que: $0 < x < 2$ ó $x > 3$.

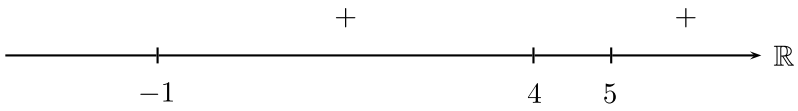


11. Resolver la inecuación: $(x-2)(x^2-6x+8)(x^2-4x-5)>0$.

Solución:

Como $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ y $x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}(x-2)(x^2-6x+8)(x^2-4x-5) &= (x-2)(x-2)(x-4)(x+1)(x-5)\\ &= (x-2)^2(x-4)(x+1)(x-5).\end{aligned}$$



El factor que aparece elevado al cuadrado no influye en el signo del producto, por tanto, nuevamente se puede aplicar el método reducido y obtenemos que la inecuación se satisface para los x tales que: $-1<x<4$ ó $x>5$ y $x\neq 2$..

12. Resolver $\dfrac{x-1}{x+2}>0$.

Solución: Como $a=a'=1$ tenemos $aa'>0$, por ejercicio resuelto 4 , los valores buscados son $x<-2$ ó $x>1$.

Compare con el ejercicio resuelto 9.

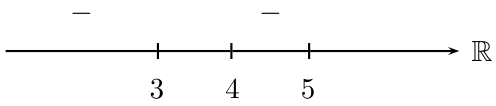
13. Resolver $\dfrac{x^2-8x+15}{x-4}<0$.

Solución:

Suponiendo $x\neq 4$, multiplicamos la inecuación por $(x-4)^2$ y la transformamos en:

$$(x^2-8x+15)(x-4)<0.$$

$(x^2-8x+15)(x-4)=(x-3)(x-4)(x-5)<0.$



Según el método reducido se obtiene que la inecuación se satisface para $x<3$ ó $4<x<5$.

14. Resolver $3+\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{1}{2x+1}$. **Solución:** Efectuando la suma del primer miembro $3+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{3x-2}{x-1}$, la inecuación queda como

$$\frac{3x-2}{x-1}>\frac{1}{2x+1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{3x-2}{x-1}-\frac{1}{2x+1} &= \frac{(3x-2)(2x+1)-(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\\ &= \frac{6x^2-2x-1}{(x-1)(2x+1)}>0.\end{aligned}$$

Multiplicando la inecuación por $(x-1)^2(2x+1)^2$ tenemos:

$$(6x^2-2x-1)(x-1)(2x+1)>0.$$

Ahora, debemos resolver la ecuación cuadrática

$$6x^2-2x-1=0\Longleftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{28}}{12}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{6}$$

Llamando $r_1=\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}$ y $r_2=\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}$

La desigualdad que da escrita como

$$\frac{(x_r-1)(x-r_2)}{(x-1)(2x+1)}\geq 0$$

Amplificando por el cuadrado del denominado, queda:

$$(x_r-1)(x-r_2)(x-1)(2x+1)\geq 0. \tag{1.8}$$

Usando el método reducido tenemos que el conjunto solución es:

$$\{x\in\mathbb{R}: r_1\leq x\leq r_2\}\cup\{x\in\mathbb{R}: x<-1/2\}\cup\{x\in\mathbb{R}: x>1\}.$$

15. Resolver la inecuación $x^4 + 3x^2 - 4 \leq 0$.
Solución:
Para factorizar el polinomio debemos resolver la ecuación bicuadrática $x^4+3x^2-4 = 0$.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 &\iff (x^2-1)(x^2+4) = 0 \iff (x^2 - 1 = 0) \quad \text{ó} \quad (x^2+4) = 0 \\ &\iff x^2 - 1 = 0; \quad \text{ya que} \quad x^2 + 4) > 0. \\ &\iff (x-1)(x+1) = 0 \iff x = \mp 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 - 4 \leq 0 &\iff (x^2-1)(x^2+4) \leq 0 \iff x^2 - 1 = 0 \leq 0 \\ &\iff (x-1)(x+1) \leq 0 \iff -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

16. Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\leq \frac{2}{3-x} \qquad \text{y} \\ 6x - 5 &< 9x + 1. \end{aligned}$$

Solución:
$2x - 1 \leq \dfrac{2}{3-x}$ implica $2x - 1 - \dfrac{2}{3-x} \leq 0$. $\dfrac{(2x-1)(3-x)-2}{3-x} \leq 0$. Efectuando el producto y reduciendo términos semejantes, nos queda:

$$\frac{-2x^2 + 7x - 5}{3-x} \leq 0.$$

$$\frac{-(2x^2 - 7x + 5)}{-(-3+x)} \leq 0.$$

$$\frac{(2x^2 - 7x + 5)}{(x-3)} \leq 0.$$

Multiplicando la inecuación por $(x-3)^2$, con $x \neq 3$,

$$(2x^2 - 7x + 5)(x-3) \leq 0.$$

$$2\left(x^2 - \frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right)(x-3) \leq 0,$$

Factorizando el factor de segundo grado podemos obtener una expresión a la cual aplicar el método del ejercicio 3.

$$2\left((x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)\right)(x-3) \leq 0.$$

Utilizando el método reducido con tres factores tenemos que la solución de la primera inecuación es:

$$x \leq 1 \text{ ó } \frac{5}{2} \leq x < 3.$$

Para completar el ejercicio debemos encontrar la solución a la segunda inecuación e intersectar los conjuntos solución .

$$\begin{aligned} 6x - 5 &< 9x + 1 \\ 6x - 9x &< 1 + 5 \\ -3x &< 6 \\ x &> -2. \end{aligned}$$

La solución al sistema es:

$$-2 < x \leq 1 \text{ ó } \frac{5}{2} \leq x < 3.$$

17. Si $x \in \mathbb{R}^-$, resuelva la inecuación $(x-4)^2 \leq (2x+1)^2$.

Solución:

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &\leq (2x+1)^2 \\ (x-4)^2 - (2x+1)^2 &\leq 0 \\ [(x-4) + (2x+1)]\,[(x-4) - (2x+1)] &\leq 0 \\ (3x-3)(-x-5) &\leq 0 \\ (3x-3)(x+5) &\geq 0 \\ 3(x-1)(x+5) &\geq 0. \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$[x - 1 \geq 0 \text{ y } x + 5 \geq 0] \text{ ó } [x - 1 \leq 0 \text{ y } x + 5 \leq 0]$$

Esto es:

$$[x \geq 1 \text{ y } x \geq -5] \text{ ó } [x \leq 1 \text{ y } x \leq -5].$$

finalmente,

$$x \geq 1 \text{ ó } x \leq -5.$$

Teniendo en cuenta que sólo debemos encontrar soluciones negativas, tenemos que $x \leq -5$ satisface el enunciado.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que, si $a > 1$, entonces $a^2 > a$.
2. Demuestre que si $a < b$ y $c < d$, entonces $ad + bc < ac + bd$.
3. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2 + b^2 = 0$ si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$.
4. Demuestre que si $0 \leq a < b$, entonces $a^2 \leq ab < b^2$.
5. Demuestre que si a, b, c, d son números positivos tales que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, entonces
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$
6. Demuestre que si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces
$$\frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2} < \frac{ac+bd}{2}.$$
Indicación: Para comenzar observe que $\left(\dfrac{b-a}{2}\right)$, $\left(\dfrac{d-c}{2}\right)$ y su producto son números positivos.
7. Si a, b, c son números positivos, demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$ y que $(a+b)(b+c)(a+c) > 8abc$.
8. Demuestre que si $a, b > 0$, entonces
$$2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$
9. Use el ejercicio anterior para demostrar que si $a, b, c > 0$, entonces
$$4 \leq (a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$
y
$$9 \leq (a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}).$$
Además, demuestre que $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) > 6abc$.
10. Demuestre que
$$x^3 + \frac{1}{x^3} \geq x^2 + \frac{1}{x^2}$$
para todo $x > 0$. ¿ Cuándo se cumple la igualdad ?

11. Demuestre que si a, b, c son números reales fijos con $a > 0$, el menor valor del polinomio cuadrático $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ es $(ac - b^2)/a$. De saberse que $Q(x) \geq 0$ para todo número real x, ¿ qué podría concluirse de los coeficientes a, b, c ?

12. Demuestre que si $x < 0$, entonces $x + \dfrac{1}{x} \leq -2$.

13. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (x+1)(x-2) > 0\}$. R:$]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

14. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (x+1)(2-x) > 0\}$. R:$]-1, 2[$

15. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (4x-7)(x+2) < 0\}$. R:$]-2, 7/4[$

16. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ (3x-8)(3x+8) < 0\}$. R:$]-8/3, 8/3[$

17. Determine el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 2x^2 - x - 15 < 0\}$. R:$]-5/2, 3[$

18. Resuelva la inecuación $-6 + 7x - 2x^2 > 0$. R:$]-\infty, 3/2[\cup]2, +\infty[$

19. Resuelva la inecuación $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-2} > 0$. R:$]-2, 1[\cup]2, +\infty[$

20. Resuelva la inecuación $\dfrac{2-x}{x^2+3x+2} \geq 0$. R:$]-\infty, -2[\cup]-1, 2[$

21. Si $a > 0$ resuelva $\dfrac{x-a}{x+a} \geq 0$. R:$]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[$

22. Resuelva la inecuación $2x^3 - 3x^2 \geq 0$. R:$]3/2, +\infty[$

23. Resuelva la inecuación $\dfrac{x^2-4}{x} \leq 0$. R:$]-\infty, -2[\cup]0, 2[$

24. Resuelva la inecuación $4x^4 - 12x^2 + 9 < 0$. R:$-\sqrt{6}/2 < x < \sqrt{6}/2$

25. Resuelva la inecuación $\dfrac{x}{x+2} \geq 0$. R:$]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

26. Resuelva la inecuación $\dfrac{2}{x} - \dfrac{2-x}{x-1} \leq 1$. R:$x < 0$ ó $1 < x \leq 2$

27. Resuelva la inecuación $\dfrac{1-2x}{x+3} \leq -1$. R:$]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$

28. Resuelva la inecuación $\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leq -1$. R:$]-1, 2[\cup]2, 4[$

29. Resuelva la inecuación $\dfrac{x^3-9}{x-2} \geq 0$. R:$]-\infty, 2[\cup]\sqrt[3]{9}, +\infty[$

30. Resuelva la inecuación $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} \leq 0$. R: no tiene solución.

31. Determine el conjunto
$\{m \in \mathbb{R} \ : \ mx^2 + (m-1)x + (m-1) < 0 \ ; \ \forall \ x \in \mathbb{R}\}$. R:$m < -1/3$

32. Resuelva el sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{x+3} &\leq -1 \\ \frac{x}{3} - 4 &\leq \frac{x}{4} - 3 \end{aligned}$$

R: $x < -3$ ó $4 \leq x \leq 12$

33. Resuelva el sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &\leq 0 \\ x^2 - x &\leq 0 \end{aligned}$$

R: $0 \leq x \leq 1$

34. Resuelva el sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &\geq 0 \\ x^3 - x^2 + 2x &\geq 0 \end{aligned}$$

R: $x \geq 3$.

35. Demuestre el teorema 1.2.10 (ii).

36. Demuestre el teorema 1.2.11 (iv).

37. Demuestre el teorema 1.2.13.

1.3. Una distancia en R: el valor absoluto

Los axiomas de orden nos permiten comparar números reales y gracias a la densidad de $\mathbb{R}$ sabemos que si $a < b$, entre ellos podemos insertar una infinidad de números reales distintos. Esto puede hacer perder la perspectiva de cuán lejos o cercanos están estos números. Aun cuando el estar cerca o lejos es una cuestión relativa al problema concreto en que estamos involucrados, es útil tener un método para poder discernir en cada caso. Para ello se define una distancia en $\mathbb{R}$ eligiendo como punto de referencia, en principio, el cero. Esta idea la realiza el llamado *valor absoluto* de un número.

Definición 1.3.1 Llamaremos **valor absoluto** del número $a \in \mathbb{R}$, denotado por $\mid a \mid$ al número:

$$\mid a \mid = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Existen formas equivalentes de definir el valor absoluto. Por ejemplo,

$$|a| = \text{máx}\{a, -a\} \quad \text{ó} \quad |a| = \sqrt{a^2}.$$

La definición 1.4.1 nos dice en particular que $\mid 0 \mid = 0$, $\mid 4 \mid = 4$, $\mid -4 \mid = 4$. En general, podemos apreciar que el número a y su inverso aditivo $-a$ están a igual distancia del cero. Usando algunas consecuencias del orden de $\mathbb{R}$, sabemos que todo número negativo es menor que uno positivo. Así, podemos hacer el siguiente gráfico:

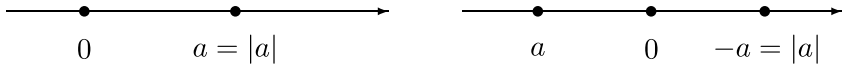


Figura 1.1: Valor absoluto

Todavía no hay ninguna razón, que pueda deducirse de los axiomas, para pensar a $\mathbb{R}$ como el continuo geométrico de una línea recta.

Teorema 1.3.2 (i) $|a| \geq 0$.

(ii) $|a| = |-a|$.

(iii) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(iv) $|a| = 0 \iff a = 0$.

(v) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

(vi) Si $b \geq 0$, $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$.

(vii) Si $b \geq 0$, $|a| \geq b \iff a \geq b$ ó $a \leq -b$.

(viii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular) .

Demostración:

(i) Si $a \in \mathbb{R}$, por tricotomía tenemos las posibilidades: $a > 0$ o $a = 0$ o $a < 0$. Analicemos cada una de ellas.

- Si $a > 0$ entonces $|a| = a > 0$
- Si $a = 0$ entonces $|0| = 0$
- Si $a < 0$ entonces $-a = |a| > 0$

Así en todos los casos $|a| \geq 0$

(ii) Nuevamente, y así se recomienda en toda demostración relativa al , separaremos los casos usando el axioma de tricotomía.

- Si $a > 0$ entonces $-a < 0$, por tanto: $|a| = a$ y $|-a| = -(-a) = a$, por teorema1.1.2. Así, en este caso se cumple $|a| = |-a|$
- Si $a = 0$ entonces $|0| = |-0| = 0$
- Si $a < 0$ entonces $-a > 0$, por tanto: $|a| = -a, |-a| = -a$ y así vemos que también se tiene en este caso, $|a| = |-a|$.

(iii) Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$. Además, siendo a positivo $(-a)$ es negativo o cero, por tanto $-|a| \leq a \leq |a|$.

Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$ y $-a > 0$. Por tanto $a < -a$ y tenemos que $-|a| = a < -a = |a|$, cumpliéndose también en este caso la propiedad.

(iv) ($\Leftarrow$) Si $a = 0$, por definición $|a| = |0| = 0$

($\Rightarrow$) $a \in \mathbb{R}$, por tricotomía $a > 0$ ó $a < 0$ o $a = 0$. Para tener la conclusión debemos descartar las posibilidades $a > 0$ y $a < 0$.

- Si $a > 0$ entonces $|a| = a > 0$, lo que contradice la hipótesis, por tanto no puede darse $a > 0$.
- Si $a < 0$ entonces $|a| = -a > 0$, también contradice la hipótesis.

Así, lo único posible es que $a = 0$.

(v) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, por tricotomía se tiene que $(a \cdot b > 0)$ ó $(a \cdot b = 0)$ ó $(a \cdot b < 0)$.

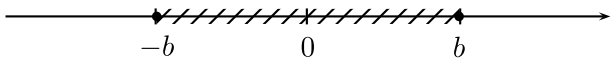
- Si $a \cdot b > 0$ entonces por teorema 1.2.12, $(a > 0$ y $b > 0)$ ó $(a < 0$ y $b < 0)$. Por definición de valor absoluto se tiene: $|a \cdot b| = a \cdot b$ y para la primera posibilidad $|a| = |a|$ y $|b| = b$, por lo que $|a| \cdot |b| = a \cdot b$, cumpliéndose el teorema. Si se da la segunda posibilidad, entonces $|a| = -a$ y $|b| = -b$ así $|a| \cdot |b| = (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. Nuevamente obtenemos la conclusión.
- Si $a \cdot b = 0$ entonces por teorema 1.1.5, $a = 0$ o $b = 0$, entonces $|a \cdot b| = 0 = |a| \cdot |b|$.
- Si $a \cdot b < 0$ se deja como ejercicio, pues es análoga al caso $a \cdot b > 0$.

(vi) ($\Rightarrow$)

- Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ y por hipótesis $|a| \leq b$ lo que implica que $a \leq b$. Como $b \geq 0$ entonces $-b \leq 0$ y por tanto $-b \leq a \leq b$.

- Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$ y por hipótesis $-a \leq b$ y como $-a \geq 0$ y $-b \leq 0$ se tiene $-b \leq a \leq -a \leq b$, es decir, $-b \leq a \leq b$.

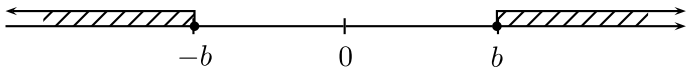
($\Leftarrow$)
- Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$. Por hipótesis $|a| \leq b$.
- Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$. Por hipótesis $-a \leq b$ y por tanto $|a| \leq b$.



Distancia al cero menor o igual a b.

(vii) ($\Rightarrow$) Supongamos $|a| \geq b$. Si $a \geq 0$ entonces $|a| = a$ y por tanto $a \geq b$. Si en cambio $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y en este caso $-a \geq b$, por teorema 1.2.10, $a \leq -b$.

($\Leftarrow$) Es análoga a la correspondiente implicación de (vi).



Distancia al cero mayor o igual a b.

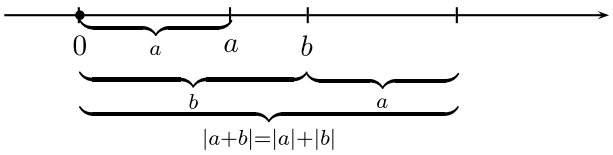
(viii) En virtud de (vi), demostrar (viii) es equivalente a demostrar: $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$, que es lo que haremos.

Por (iii)

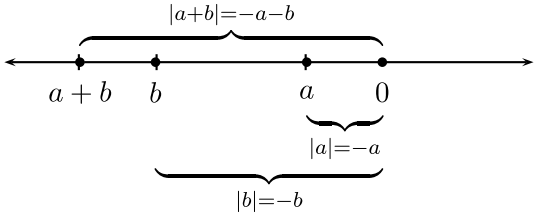
$$-|a| \leq a \leq |a|$$
$$-|b| \leq b \leq |b|$$

sumando miembro a miembro ambas desigualdades se obtiene (viii).

- Si a y b son positivos.

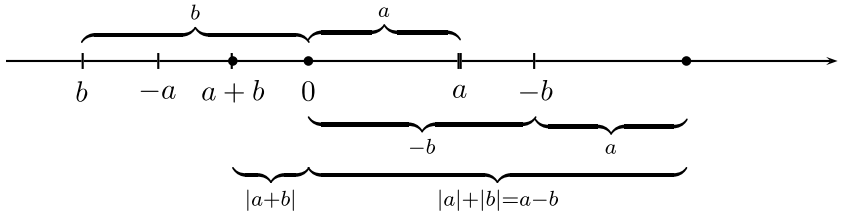


- Si a y b son negativos.



$|a + b|$ = distancia al cero de $a + b = -a - b$.

- Si a y b tienen distintos signos.
  $a > 0$, $b < 0$



$|a + b| < |a| + |b|$.

□

Ejercicios resueltos

1. Analice en qué casos la desigualdad triangular se transforma en una igualdad.

   Solución: (i) Si a y b son números positivos, $a + b$ es positivo, entonces tenemos:

   $$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

   (ii) Si a y b son números negativos, $a + b$ es negativo, entonces tenemos:

   $$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

   (iii) Si a y b tienen signos diferentes, la desigualdad es una desigualdad estricta. Por ejemplo, si $a = -4$ y $b = 2$, entonces $|a + b| = |(-4) + 2| = | - 2| = 2$, en cambio, $|a| + |b| = 4 + 2 = 6$

2. Demuestre que $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

   Solución: Aplicando la desigualdad triangular tenemos, $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$. Luego $|a|-|b| \leq |a-b|$. Análogamente $|b| = |b-a+a| \leq |b-a|+|a| = |a-b|+|a|$ por desigualdad triangular y teorema 1.3.2 (ii). Entonces $-|a - b| \leq |a| - |b|$. Por tanto, de estas dos desigualdades y el teorema 1.3.2 (vi) concluimos que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

   Finalmente, $|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + | - b| = |a| + |b|$ por desigualdad triangular y teorema 1.3.2 (ii).

3. Resuelva la ecuación $|x - 1| = 3$.

   Solución: Por definición de valor absoluto $|x - 1| = 3$ implica $x - 1 = \pm 3$. Si $x - 1 = 3$, tenemos $x = 4$.

   Si $x - 1 = -3$, tenemos $x = -2$.

4. Resuelva la ecuación $|3x-5|+3=0$.

   Solución: Como el valor absoluto no toma valores negativos, la ecuación propuesta no tiene solución.

5. Resuelva la ecuación $|x+2|=|x-4|$.

   Solución: Debemos analizar dos casos: **Primer caso**. Las cantidades entre barras tienen el mismo signo, entonces $x+2=x-4$, por tanto, $2=-4$. Como esto es imposible, en este caso no hay solución. **Segundo caso**. Las cantidades entre barras tienen distinto signo, entonces $x+2=-(x-4)=-x+4$, por tanto, $x=1$.

6. Resuelva la ecuación $|x^2-4x|=4|x-4|$.

   Solución:

$$\begin{aligned} |x^2-4x| &= 4|x-4| \\ |x(x-4)| &= 4|x-4| \\ |x||(x-4)| &= 4|x-4| \\ \text{Así, } |x| &= 4, \text{ si } |x-4|\neq 0 \end{aligned}$$

   Luego, $x=-4$ es una solución. La otra solución se obtiene cuando $|x-4|=0$, lo que da $x=4$.

7. Determine el conjunto $A=\{x\in\mathbb{R} \ : \ |2x+3|\leq 6\}$.

   Solución: Si $|2x+3|\leq 6$ por teorema 1.3.2 (vi) tenemos que $-6\leq 2x+3\leq 6 \iff -9\leq 2x\leq 3 \iff -\dfrac{9}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2}$.

   Por lo tanto, $A=\{x\in\mathbb{R} \ : \ -\dfrac{9}{2}\leq x\leq \dfrac{3}{2}\}$.

8. Resuelva la inecuación $|5x-8|>4$.

   Solución: Por teorema 1.3.2 (vii), tenemos que:

$$\begin{aligned} 5x-8>4 \quad &\text{o} \quad 5x-8<-4 \\ 5x>12 \quad &\text{o} \quad 5x<4 \\ x>\frac{12}{5} \quad &\text{o} \quad x<\frac{4}{5} \end{aligned}$$

9. Resuelva la inecuación $|x-4|\geq|2x-1|$.

   Solución: Como las expresiones entre barras cambian de signo cuando $x=4$ y cuando $x=\dfrac{1}{2}$, analizaremos las distintas posibilidades que esto implica.

Si $x \leq \frac{1}{2}$, ambas expresiones son negativas, entonces la inecuación queda como

$$-(x-4) \geq -(2x-1),$$

que da los valores $x \geq -3$. Por tanto, tenemos que $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Si $\frac{1}{2} < x < 4$, las expresiones entre barras tienen distintos signos y nos queda la inecuación:

$$2x - 1 \leq 4 - x,$$

que tiene solución $x \leq \frac{5}{3}$. Junto a la suposición bajo la cual estamos trabajando , da la solución $\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{3}$.

Si $x > 4$, ambas expresiones son positivas y la inecuación toma la forma:

$$x - 4 \geq 2x - 1.$$

Lo que implica $-3 \geq x$ que es incompatible con $x > 4$, por tanto, en este caso no hay solución.

En síntesis, la inecuación dada tiene por solución :$-3 \leq x \leq \frac{5}{3}$.

10. Determine el conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-1| \leq |x|\}$.

Solución: Como toda inecuación que contiene más de un valor absoluto, la manera más rápida de resolverla es encontrando los puntos de cambio de signo de las expresiones entre barras. Luego, se ordenan estos puntos sobre la recta real y se estudia la inecuación sobre cada subintervalo.
Los puntos de cambio de signo de $x-1$ es 1 y x cambia de signo en cero. Así, tenemos tres subintervalos:

- Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $x - 1 < 0$, por lo que $|x-1| = -(x-1) = 1 - x$. En este caso la inecuación queda escrita como:

  $$1 - x < -x \Longleftrightarrow 1 < 0.$$

  Este resultado contradictorio, nos dice que la inecuación no tiene solución en los reales negativos.

- Si $0 \leq x < 1$, entonces $|x| = x$ y $x - 1 < 0$, por lo que $|x-1| = -(x-1) = 1-x$. En este caso la inecuación queda escrita como:

$$1 - x < x \iff 1 < 2x \iff \frac{1}{2} < x.$$

- Si $1 \leq x$, entonces $|x| = x$ y $x - 1 > 0$, por lo que $|x - 1| = x - 1$. En este caso la inecuación queda escrita como:

$$x - 1 < x \iff -1 < 0.$$

Como la última inecuación se satisface independientemente de los valores de x, la inecuación se satisface para todo $x \geq 1$.

En virtud del análisis realizado, tenemos que

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

11. Resuelva la inecuación $\left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 4$.

Solución: Si $x \neq 0$, $|x + \frac{1}{x}| = \frac{|x^2+1|}{|x|} = \frac{x^2+1}{|x|}$, pues $x^2 + 1$ es positivo para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, la inecuación enunciada se puede escribir como $\frac{x^2+1}{|x|} \geq 4$. Multiplicando la inecuación por $|x|$, obtenemos:

$$x^2 + 1 \geq 4|x|,$$

lo que da origen a dos inecuaciones:

a) $x^2 - 4x + 1 \geq 0$, si $x > 0$.

b) $x^2 + 4x + 1 \geq 0$, si $x < 0$.

Ambas deben ser resueltas con el método del ejercicio 2 de la sección 2.3.

12. Si a, b, c son números dados tales que $a < b < c$. Encuentre los distintos valores que puede tomar $f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|$.

Solución:

- Si $x \leq a$, todas las expresiones entre barras son negativas o nulas, por tanto,

$$f(x) = -(x - a) - (x - b) - (x - c) = -3x + a + b + c.$$

- Si $a < x \leq b$,

$$f(x) = x - a - (x - b) - (x - c) = -x - a + b + c.$$

- Si $b < x \leq c$,

$$f(x) = x - a + x - b - (x - c) = x - a - b + c.$$

- Si $x > c$,

$$f(x) = x - a + x - b + x - c = 3x - a - b - c.$$

13. Escriba $f(x) = |x+1| + |x-1| - 2|x|$ sin que aparezcan los signos del valor absoluto .

Solución: Siguiendo un procedimiento similar al del ejercicio 12, obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ 2 - 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

14. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{2x - 1}$ para $2 \leq x \leq 3$. Encuentre una constante M de modo que $|f(x)| \leq M$ para todo x tal que $2 \leq x \leq 3$.

Solución: Como $|f(x)| = \dfrac{|2x^2 - 3x - 1|}{|2x - 1|}$. Por la desigualdad triangular

$$|2x^2 - 3x - 1| \leq 2|x^2| + 3|x| + 1 \leq 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$$

ya que $|x| \leq 3$. Por otro lado,
$|2x - 1| \geq 2|x| - 1 \geq 2 \cdot 2 - 1 = 3$, ya que $|x| \geq 2$. Luego $\dfrac{1}{|2x-1|} \leq \dfrac{1}{3}$ para $x \geq 2$. Por lo tanto, $|f(x)| \leq \dfrac{28}{3}$.

Luego, podemos escoger $M = \dfrac{28}{3}$. Observemos que cualquier $M > \dfrac{28}{3}$ resuelve el problema, y es probable que $\dfrac{28}{3}$ no sea la elección mínima posible para M.

15. Resuelva $\left|\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x + 1}\right| \leq 1$.

Solución: $\left|\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x+1}\right| = \left|\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-1)}\right| = \left|\dfrac{x-3}{x-1}\right|$, cuando $x \neq 1$. Por tanto la inecuación se redude a:

$$|x-3| \leq |x-1|, \text{ la que es equivalente a } |x-3| \leq |x-1|.$$

Analizaremos los distintos casos: Si $x \leq 1$, ambas expresiones entre barras son negativas, por lo cual tenemos:

$$-(x-3) \leq -(x-1).$$

Esto implica $3 \leq 1$, como esto es imposible, no hay solución en este caso.

Si $1 < x \leq 3$, las expresiones entre barras tienen signos distintos, por tanto:

$$-x+3 \leq x-1.$$

Lo que nos da $2 \leq x$ que junto a la suposición $1 < x \leq 3$ nos da $2 \leq x \leq 3$. El último caso por analizar es $x > 3$, que conduce a $-3 \leq -1$, que se cumple siempre. Así, la solución es $x \geq 2$.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que $|a| = \text{máx}\{a, -a\} = \sqrt{a^2}$.
2. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:
   a) $|a^2| = a^2$
   b) $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$
   c) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ si $b \neq 0$
   d) $|a+b| = |a| + |b|$ si y solo si $ab \geq 0$
   e) $a|b| \leq |ab|$.
3. Demuestre que, y está entre x y z si y sólo si $|x-y| + |y-z| = |x-z|$.
4. Demuestre que si $a < x < b$ y $a < y < b$, entonces $|x-y| < b-a$.

   En los siguientes ejercicios encuentre los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes inecuaciones:

5. $|4x-5| = 13$ R: $x = 9/2 \;\; x = -2$.

6. $|4x-5| \leq 13$ R: $-2 \leq x \leq 9/2$.

7. $|x^2-1| = 3$ R: $x = \pm 2$.

8. $|x^2-1| \leq 3$ R: $-2 \leq x \leq 2$.

9. $|x-1| = |x+1|$ R: $x = 0$.

10. $|x-1| > |x+1|$ R: $x < -1$.

11. $2|x| + |x-1| = 2$ R: $x = -1/3 \;\; x = 1$.

12. $|x| + |x+1| < 2$ R: $-3/2 \leq x \leq -1$.

13. $\left|\dfrac{x^2-1}{x+1}\right| \leq 3$. R: $-2 \leq x \leq 4,\; x \neq -1$.

14. $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}\right| \leq 3$. R: $-4 \leq x \leq 2,\; x \neq 1$.

15. $\left|\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}\right| \leq 5$. R: $x \leq 2/3$ ó $x \geq 3/2,\; x \neq 3$.

16. $\left|\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-11x+30}\right| < 2$. R: $x < 3$ ó $x > 11$.

17. $\left|\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-11x+30}\right| = 2$. R: $x = 3, x = 11$.

18. $\left|\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-11x+30}\right| > 2$. R: $3 < x < 11 \;\; x \neq 5, x \neq 6$.

19. Si $f(x) = |x-2| + |1-2x|$. Encuentre una expresión para $f(x)$ que no contenga valores absolutos.

20. Si $x = 8a + 4b - 3$, $y = 5a + 13b + 4$
$20,84 < a < 20,85$ y $-5,64 < b < -5,63$. Encuentre números K; M tales que:

$$|x+y| < K \;\text{ y }\; |x-y| < M.$$

21. Encuentre el valor máximo de y de modo que para todo x se cumpla:

$$|x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n| \geq y,$$

con $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. ¿Cuándo se cumple la igualdad ?

22. Demuestre que si $|x| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$.

23. Si $d(x, y) = |x - y|$ representa la "distancia entre x e y". Demuestre que

    a) $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

    b) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

    c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

    d) Encuentre el conjunto $A = \{y \in \mathbb{R} \ : \ d(y, \frac{1}{2}) \leq 3\}$.

    e) Encuentre el conjunto $B = \{y \in \mathbb{R} \ : \ d(y, -4) < 5\}$.

    f) Dados x_0, $r \in \mathbb{R}$, encuentre el conjunto $C = \{y \in \mathbb{R} \ : \ d(y, x_0) < r\}$.

1.4. La continuidad de R: el Axioma del Supremo

Con el Axioma del Supremo se completa el conjunto de axiomas que caracterizan totalmente a $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{R}$ es el único conjunto que verifica los axiomas de cuerpo, de Orden y el Axioma del Supremo.

Las consecuencias de mayor trascendencia del Axioma del Supremo son la existencia de números irracionales y la propiedad arquimediana de los números reales.

De los axiomas de cuerpo solamente puede deducirse, en primera instancia, la existencia de al menos dos números distintos el **0** y el **1**. La suma de **unos** da origen a los números naturales. La resta de números naturales da origen a los números enteros y finalmente la división de enteros genera la aparición de los números racionales. En síntesis, para tener el conjunto de los números racionales bastan los axiomas de cuerpo y orden. Pero, estos números no son suficientes para la construcción del cálculo diferencial e integral cuyos conceptos básicos necesitan la continuidad de los números reales . Esta propiedad de $\mathbb{R}$ la proporciona el **Axioma del Supremo**. En particular, para tener una idea intuitiva de esto, solamente podemos pensar $\mathbb{R}$ como un continuo geométrico: la recta númerica, lo que se obtiene una vez que al conjunto de los números racionales se le agregan los números irracionales que pueden ser concebidos como supremos de ciertos conjuntos de números racionales.

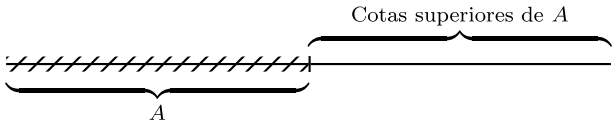
Definición 1.4.1 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es una **cota superior** de A si y sólo si y es un número real y para cada $x \in A, x \leq y$.

Ejemplo 1.4.2

1. El conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ es acotado superiormente por cualquier número mayor o igual a 10.

2. El conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$ es acotado superiormente por cualquier número mayor o igual a 3.

3. El conjunto $\{x^2 + 1, -1 \leq x \leq 1\}$ es acotado superiormente por cualquier número mayor o igual a 2.



Una observación importante es que si un conjunto tiene una cota superior entonces existen infinitas cotas superiores del conjunto. Por lo tanto, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.4.3 Si A es un conjunto de números reales, el número y es el **supremo** de A si y sólo si y es una cota superior de A y para cada z que es cota superior de A se tiene $y \leq z$. Es decir el supremo es la menor de las cotas superiores .

La definición de supremo, salvo en casos elementales, no es fácil de usar, para fines más prácticos suele usarse la siguiente caracterización del supremo.

Teorema 1.4.4 Caracterización del supremo
Si A es un conjunto de números reales entonces y es el supremo de A si y sólo si y es una cota superior de A y para cada número real positivo ε existe un x en A tal que $y - \varepsilon < x$.

Demostración:

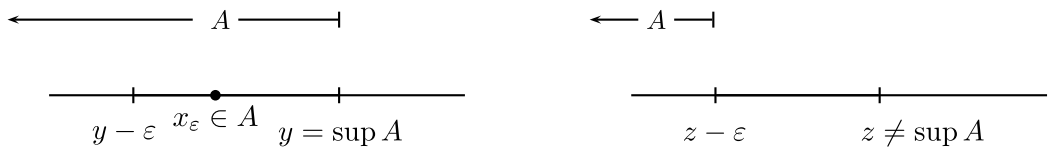
($\Rightarrow$) Sea y el supremo de A. Entonces por definición y es una cota superior.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Supongamos por contradicción que no existe $x \in A$ tal que $y - \varepsilon < x$, en tal caso, esto es equivalente a afirmar

que $x \leq y - \varepsilon$, para todo x en A, por tanto $y - \varepsilon$ es una cota superior de A pero $y - \varepsilon < y$, lo que contradice la hipótesis que y es el supremo de A. Así debe existir al menos un $x \in A$ mayor que $y - \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis y es una cota superior. Para que y sea el supremo de A, debe ser la menor de las cotas superiores .

Supongamos que existe una cota superior de A, z menor que y. Entonces $z < y$ y $x < z$ para todo $x \in A$. Como $z < y$ entonces $y - z > 0$. Aplicando la hipótesis con $\varepsilon = y - z$, tenemos que existe $x \in A, x > y - (y - z)$. Es decir, existe $x \in A$ tal que $x > z$. Pero esto contradice que z es cota superior de A. La contradicción proviene de suponer la existencia de una cota superior de A menor que y. Así, y es la menor cota superior de A y, por tanto, su supremo . □



Teorema 1.4.5 Un conjunto de números reales puede tener a lo más un supremo.

Demostración: Supongamos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tenga dos supremos: $y, z; y \neq z$. Más precisamente supongamos $z < y$. Como en la demostración del teorema 1.4.4 se tiene $y - z > 0$. Tomando este número positivo como un ε particular, por definición de supremo podemos concluir que existe $x \in A$ tal que $x > y - (y - z)$, lo que implica que $x > z$, que contradice que z sea supremo de A. Por tanto, existe a lo más un supremo de un conjunto de números reales. □

Es interesante observar que el conjunto vacío es acotado superiormente por cualquier número real. Esto se obtiene usando reducción al absurdo. Luego, no existe un número real que sea el supremo del vacío.

Axioma del Supremo : Si un conjunto no vacío de números reales tiene una cota superior, entonces tiene supremo en $\mathbb{R}$.

Cada una de las definiciones y conclusiones relativas a cotas superiores y supremos tiene un paralelo en la definición de cota inferior e ínfimo. Las demostraciones de los teoremas son totalmente similares a las ya demostradas, por lo que se deja como ejercicio.

Definición 1.4.6 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es una **cota inferior** de A si y sólo si y es un número real y para cada x en A, $x \geq y$.

Definición 1.4.7 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es el **ínfimo** de A si sólo si y es una cota inferior de A y para cada z que es una cota inferior de A, $y \geq z$. Es decir, el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores .

Teorema 1.4.8 Si A es un conjunto de números reales, entonces y es el ínfimo de A si y sólo si y es una cota inferior de A y para cada número real positivo ε existe un x en A tal que $x < y + \varepsilon$.

Demostración: Ejercicio.

Teorema 1.4.9 Un conjunto de números reales puede tener a lo más un ínfimo .

Demostración: Ejercicio.

Observemos que el conjunto vacío es acotado inferiormente por cualquier número real. Luego, no existe un número real que sea el ínfimo del conjunto vacío.

Teorema 1.4.10 Si un conjunto no vacío de números reales tiene una cota inferior , entonces tiene ínfimo en $\mathbb{R}$.

Demostración: Ejercicio.

Definición 1.4.11 Si A es un conjunto de números reales, entonces p es el **primer elemento** (respectivamente u es el **último elemento**) de A si y sólo si p es un elemento de A y para cada x en A, $p \leq x$ (respectivamente $u \in A$, $x \leq u$).

Teorema 1.4.12 Un conjunto de números reales tiene a lo más un único primer elemento (respectivamente último).

Teorema 1.4.13 Todo conjunto de números reales que tiene primer (respectivamente último) elemento tiene ínfimo (respectivamente supremo).

Supremo e ínfimo de conjuntos finitos
Si A es un conjunto finito de $\mathbb{R}$, entonces podemos contar sus elementos y escribirlo como

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, \ldots a_n\}.$$

Además, podemos ordenarlos y conocer el mayor o último elemento del conjunto que podemos simbolizar como $\max A = \max\{a_i : i = 1, \ldots, n\}$. Análogamente su menor o primer elemento es $\min A = \min\{a_i : i = 1, \ldots, n\}$. En virtud del teorema 1.4.13, el conjunto A tiene supremo e ínfimo. Es decir, **todo conjunto finito tiene supremo e ínfimo** . Además,

$$\begin{aligned} \sup A &= \max A \\ \inf A &= \min A \end{aligned}$$

Así, los conjuntos finitos no son muy interesantes desde el punto de vista de sus supremo e ínfimo.

Corolario 1.4.14 Si un conjunto contiene una cota superior (respectivamente inferior) entonces ésta es su supremo (respectivamente ínfimo). □

El recíproco del teorema 1.4.13 es falso. Pues, existen conjuntos de números reales que poseen ínfimo y supremo sin tener primer y/o último elemento. Por ejemplo, el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

tiene supremo, pero no último elemento y también tiene ínfimo , sin tener primer elemento. Ver ejercicio. Este ejemplo, además, nos muestra claramente que supremos o ínfimos no son necesariamente elementos del conjunto. Pero si pertenecen al conjunto, son a la vez último o primer elemento según el caso. Esto puede visualizarse en el conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Los casos más importantes de aplicación del Axioma del Supremo son aquellos para los cuales el supremo (ínfimo) no pertenece al conjunto. Este es el caso en que surgen los números irracionales como supremos o ínfimos de ciertos conjuntos de números racionales.

Definición 1.4.15 Llamaremos **intervalos acotados** a cualquiera de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} &=]a, b[\\
\{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\} &=]a, b] \\
\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\} &= [a, b[\\
\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} &= [a, b],
\end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son números fijos tales que $a < b$.

Definición 1.4.16 Llamaremos **intervalos no acotados** a cualquiera de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\} &=]a, +\infty[\\
\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x\} &= [a, +\infty[\\
\{x \in \mathbb{R} \ : \ x < b\} &=]-\infty, b[\\
\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq b\} &=]-\infty, b],
\end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son números fijos.

Teorema 1.4.17 Principio de Arquímedes $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente.

Demostración: Supongamos por contradicción que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente.

Por Axioma del Supremo, existe $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. Por tanto $n \leq s$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando teorema 1.4.4 con $\varepsilon = 1$, tenemos la existencia de $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1 < n^*$, o lo que es lo mismo $s < n^* + 1$. Pero $n^* \in \mathbb{N}$, así $n^* + 1 \in \mathbb{N}$ y es mayor que el supremo de $\mathbb{N}$. Lo cual no puede ser, luego $\mathbb{N}$ no puede ser acotado superiormente. □

Observación 1.4.18 Una forma equivalente de enunciar el Principio de Arquímedes es:

Dado un número real a, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$. Puesto que si no existiera tal n, tendríamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ $n \leq a$, y a sería una cota superior de $\mathbb{N}$.

Teorema 1.4.19 Dado un número real pequeño, positivo, $\varepsilon < 1$, siempre existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Demostración: Como $0 < \varepsilon < 1$ tenemos que $0 < \dfrac{1}{\varepsilon}$, luego por el Principio de Arquímedes existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$. Es decir, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. □

La propiedad arquimediana de los números reales, refleja algo así como el sentido común llevado al mundo de las magnitudes. Cuando se quiere medir el largo de un segmento llevando sobre él un segmento unidad, siempre es posible dejar un resto (si es que lo hay) inferior a la unidad. O lo que es lo mismo, es posible llevar el segmento unidad una cantidad suficiente de veces sobre el segmento a medir, de modo que se termina por sobrepasarlo. Esta situación con los símbolos que hemos introducido puede escribirse como: dado b (segmento a medir) y a (segmento unidad), siempre existe un número natural n tal que $n \cdot a > b$. Si en particular tenemos $a = 1$, entonces dado b siempre existe n tal que $n > b$. Son diferentes maneras de expresar una misma propiedad.

Con este principio, estamos excluyendo magnitudes infinitamente pequeñas (o grandes) en comparación con otras. Como veremos más adelante, esta propiedad juega un rol fundamental en nuestra aritmética y en la geometría euclidiana.

Por cierto existen situaciones no arquimedianas, la más simple de todas es tratar de medir un segmento con longitud positiva mediante puntos. Otras más complejas pueden verse en el libro de Fraenkel, página 123.

El siguiente párrafo puede ser omitido.

Potencias de exponente racional

El objetivo de este párrafo es mostrar que la existencia de raíces es una consecuencia del Axioma del Supremo y con ello aparecen los números irracionales más elementales. Todas las raíces de números naturales que no son cuadrado de otro número natural son irracionales. En la época de Platón se conocía la naturaleza irracional de $\sqrt{2}$ hasta $\sqrt{17}$.

Para extender las potencias a exponente racional debemos, en primer lugar, considerar los números racionales no enteros, de la forma $\dfrac{1}{q}, q \in \mathbb{N}$.

Definición 1.4.20 (i) Si $a \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{N}$, denotaremos por $a^{\frac{1}{q}}$ ó $\sqrt[q]{a}$ al único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^q = a$

(ii) Si $a \in \mathbb{R}^-$, $q \in \mathbb{N}$, q impar, denotaremos por $a^{\frac{1}{q}}$ ó $\sqrt[q]{a}$ al único $y \in \mathbb{R}^-$ tal que $y^q = a$

(iii) Si $a = 0$ se define $0^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{0} = 0$.

El número $\sqrt[q]{a}$ se lee *raíz q-ésima de a o la potencia* $\dfrac{1}{q}$ *de a.*

Teorema 1.4.21 1. Si $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ entonces

$$(x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K \quad \text{y} \quad (x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K,$$

donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x.

2. Si $x < 0$, $n \in \mathbb{N}$ impar, $0 < \varepsilon \leq 1$, entonces

$$(x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K \quad \text{y} \quad (x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K,$$

donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x.

El siguiente teorema justifica la definición 3.4.5.

Teorema 1.4.22 Existencia de raíces.

(i) Si $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un único $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^n = a$.

(ii) Si $a < 0$ y $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces existe un único $x \in \mathbb{R}^-$ tal que $x^n = a$.

Demostración:

(i) Sea

$$A = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0 \ , \ y^n \leq a\}.$$

A es no vacío, pues $0 \in A$. Demostremos ahora que A es acotado superiormente. Si $a \geq 1$, entonces si A no es acotado superiormente, debe existir $y \in A$ tal que $a < y$ lo que implica en este caso que $a < y^n$. Pero esto contradice el hecho que $y \in A$. Por tanto, para $a \geq 1$, A debe ser acotado superiormente. Ahora, si $0 < a < 1$, como $y^n \leq a$, se tiene que $y^n \leq 1$, lo que implica que $y \leq 1$ usando ejercicio resuelto 1. Como lo anterior vale para cualquier $y \in A$, 1 es una cota superior para A cuando $0 < a < 1$. Por lo tanto, si $a > 0$, A es acotado superiormente.

Luego el axioma del Supremo nos asegura la existencia en $\mathbb{R}$ de $\sup A$. Sea $x = \sup A$. Nótese que por la definición de x, él es único. Demostremos a continuación que $x^n = a$. Si nuestra afirmación anterior fuera falsa tendríamos por tricotomía

que $x^n > a$ o $x^n < a$. Analicemos ambos casos.

Caso $x^n < a$:

Por teorema 1.4.21, para $0 < \varepsilon \leq 1$ se tiene que $(x+\varepsilon)^n \leq x^n + \varepsilon K$, donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x. Como $a - x^n > 0$ por hipótesis, por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe de $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \text{mín}\{1\ ,\ \dfrac{a-x^n}{K}\}$. Luego:

$$x^n + \varepsilon K \leq \frac{a-x^n}{K} K = a - x^n.$$

Por tanto, $(x+\varepsilon)^n \leq a$ y $x + \varepsilon\ \in A$. Lo que contradice que x es una cota superior de A.

Caso $a < x^n$:

Por teorema 1.4.21, para $0 < \varepsilon \leq 1$ se tiene que $(x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K$, donde K es una constante positiva que sólo depende de n y x. Como $x^n - a > 0$ por hipótesis, la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ nos asegura la tal existencia de $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \text{mín}\{1, \dfrac{x^n - a}{K}\}$. Como $x = \sup A$, para $\varepsilon > 0$ debe existir $y_0\ \in A$ tal que $x < y_0 + \varepsilon$. La expresión anterior implica que $x - \varepsilon < y_0$. Luego:

$$y_0^n > (x-\varepsilon)^n \geq x^n - \varepsilon K > x^n - \frac{(x^n - a)}{K} K = x^n - x^n + a = a.$$

Lo que contradice el hecho que $y_0 \in A$.

De analizar los dos casos y en ambos llegar a contradicciones, concluimos que $x^n = a$. □

Ejercicios resueltos

Analice la existencia de cotas inferiores, superiores, mayor y menor elemento, supremos e ínfimo para los siguientes conjuntos, donde a, b son números fijos.

1. $A_1 = \{ax + b; -2 \leq x \leq 3\}$

   Solución: Si $a > 0$, entonces

   $$-2 \leq x \leq 3$$

   $$-2a \leq 3a$$

   $$-2a + b \leq ax + b \leq 3a + b, \text{para todo } -2 \leq x \leq 3.$$

Por tanto, $-2a+b$ es una cota inferior y $3a+b$ es una cota superior de A_1. Además, estas cotas pertenecen al conjunto , por lo que son el menor y mayor elemento, respectivamente y también el ínfimo y el supremo de A_1. Si $a<0$, entonces

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$3a \leq x \leq -2a.$$

Por tanto, los roles de $-2a+b$ y $3a+b$ se inverten y se tiene que:

$$\text{ínf}\, A_1 = 3a+b, \quad \sup A_1 = -2a+b.$$

2. $A_2 = \{ax+b; -2 < x \leq 3\}$

   Solución: Si $a>0$, se tiene como en el caso anterior:

   $$-2a+b < ax+b \leq 3a+b, \text{para todo } -2 < x \leq 3.$$

   La única diferencia con el respectivo caso anterior es que $-2a+b$ no pertenece al conjunto, por lo cual

   aunque sigue siendo cota inferior e ínfimo de A_2, no es el menor elemento. Más aún , A_2, no tiene el menor elemento. En efecto, supongamos que x^* es el menor elemento de A_2. Entonces, $-2 < x^*$ y $-2a+b < -2x^*+b < -2x+b$, para todo $-2 < x \leq 3$. Pero, la propiedad de densidad de los números reales asegura la existencia de un z^* tal que

   $$-2 < z^* < x^*,$$

   lo que a su vez implica

   $$-2z^*+b < -2x^*+b.$$

   Pero, esto contradice el hecho que x^* s el menor elemento de A_2.

3. $A_3 = \{ax+b; -2 \leq x < 3\}$

   Solución: Usando los mismos argumentos se obtiene:

   $$\sup A_3 = 3a+b, \text{ínf}\, A_3 = -2a+b, \text{ si } a>0.$$

   $$\text{ínf}\, A_3 = 3a+b, \sup A_3 = -2a+b, \text{ si } a<0.$$

   Si $a>0$, A_3 no tiene mayor elemento; si $a<0$, A_3 no tiene menor elemento.

4. $A_4 = \{ax+b; -2 < x < 3\}$

   Solución:

   El ínfimo y el supremo son los mismos que en los casos anteriores, pero A_4 no tiene menor ni mayor elemento.

5. Demuestre que el conjunto $A_5 = \{ax + b, x \in \mathbb{R}\}$ no es acotado ni superior ni inferiormente.

   Solución: Supongamos que A_5 es acotado superiormente y que $a > 0$. Entonces, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que:

   $$ax + b \leq M, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R},$$

   lo que implica,

   $$x \leq \frac{M - b}{a}, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Pero, esto nos dice que $\dfrac{M - b}{a}$ es una cota superior de $\mathbb{R}$, lo cual es una contradicción. De la misma forma se demuestra que A_5 no es acotado inferiormente.

6. Encuentre cotas superiores e inferiores para el conjunto $\{x^2 + x - 2; \ -2 \leq x \leq 1\}$.

   Solución:
   Considerando que $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, podemos deducir que el trinomio es negativo para $-2 < x < 1$, se anula en $x = -2$ y $x = 1$ y para los restantes valores de x es positivo. Por tanto, los elementos del conjunto dado no son positivos y cero es una cota superior. Para encontrar una cota inferior, observemos que la ecuación

   $$x^2 + x - 2 = z$$

   no tiene solución en $\mathbb{R}$ si

   $$1 + 4(2 + z) < 0.$$

   Esto quiere decir que para todo $z < -2,25$ no existe x tal que $x^2 + x - 2 = z$. Por tanto, cualquier número menor o igual que $-2,25$ es una cota inferior de nuestro conjunto.

   Ahora veamos si $-2,25$ pertenece al conjunto. Para ello debemos resolver la ecuación $x^2+x-2 = -2,25$, que tiene por solución $x = -0,5$. Así, $-2,25$ es el menor elemento del conjunto y por tanto, su ínfimo .

7. Dada la expresión $f(x) = \dfrac{6(x^2 + 2x - 1)}{-2x^2 - 3}$,

   a) ¿ Para qué valores de x tiene sentido $f(x)$?

   b) Demuestre que $f(x)$ está acotada superiormente por 3 e inferiormente por -4.

   c) ¿ Cómo elegir x para que $f(x) = 3$?

   d) ¿ Cómo elegir x para que $f(x) = -4$?

   e) ¿ Cuál es el supremo y el ínfimo del conjunto $\{f(x); \ x \in \mathbb{R}\}$?

Solución:

a) Para que la expresión $f(x)$ tenga sentido es necesario excluir los valores de x que anulan el denominador. $-2x^2-3=0$ es equivalente a $2x^2+3=0$, pero como todo número al cuadrado es positivo o nulo, $2x^2+3$ no se anula para ningún valor de x. Por tanto, $f(x)$ vale para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Para poder demostrar que $f(x)$ es acotada superiormente por 3, supondremos que esto es verdad, así podremos encontrar una expresión para iniciar la demostración.

$$\frac{6(x^2+2x-1)}{-2x^2-3} = \frac{6(1-2x-x^2)}{2x^2+3}$$

$$\begin{aligned} \frac{6(1-2x-x^2)}{2x^2+3} &< 3 \\ 6-12x-6x^2 &< 6x^2+9 \\ 0 &< 12x^2+12x+3 \\ 0 &< 3(4x^2+4x+1) \\ 0 &< 3(2x+1)^2 \end{aligned}$$

Como la última desigualdad es siempre válida, en rigor ésta debe ser el punto de partida de la verdadera demostración.

Para demostrar que $f(x)$ es acotada inferiormente por -4, supondremos que en borrador hicimos el procedimiento ya mostrado y ahora haremos la demostración :

$$\begin{aligned} 0 &< 2(x-3)^2 \\ 0 &< 2(x^2-6x+9) \\ 0 &< 2x^2-12x+18 \\ -8x^2-12 &< 6-12x-6x^2 \\ -4(2x^2+3) &< 6-12x-6x^2 \\ -4 &< \frac{6(1-2x-x^2)}{2x^2+3} \end{aligned}$$

c) La ecuación $f(x)=3$ es equivalente a $2x+1=0$, lo que nos da $x=-\frac{1}{2}$. La ecuación $f(x)=-4$, tiene solución $x=3$. Es decir, $f(3)=-4$ y $f(-\frac{1}{2})=3$. Por lo tanto, -4 y 3 pertenecen al conjunto $\{f(x);\ x \in \mathbb{R}\}$ y en virtud del corolario 1.4.14 estos números son , respectivamente, el ínfimo y el supremo .

8. Demuestre que en los conjuntos finitos último elemento y supremo coinciden.

   Solución: Sea F un subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Sea $u \in F$ el mayor de todos los elementos de F. Como el conjunto es finito, basta comparar los elementos de F todos con todos y hallar tal u. Luego $x \leq u$ para todo $x \in F$. Por tanto, u es el último elemento . Por otro lado, u es cota superior de F y si consideramos otra cota superior c de F ella satisface que $x \leq c$ para todo $x \in F$. En particular $u \in F$, luego $u \leq c$. Por tanto, u es la menor cota superior . Luego $u = \sup F$.

9. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío, definimos por $-A$ al conjunto $\{-x \ : \ x \in A\}$. Demuestre que si A es acotado inferiormente, entonces $-A$ es acotado superiormente e $\text{ínf}\, A = -\sup(-A)$.

   Solución: Si A es acotado inferiormente, sea c una cota inferior de A, entonces $c \leq x$ para todo $x \in A$. Luego $-x \leq -c$ para todo $x \in A$. Esto implica que $-c$ es una cota superior de $-A$, y por axioma del supremo, existe el supremo de $-A$. Sea $a = \sup(-A)$ y $b = \text{ínf}\, A$, como b es la mayor cota inferior de A, $b \leq x$ para todo $x \in A$. Luego $-x \leq -b$ para todo $x \in A$, lo que implica que $-b$ es cota superior de $-A$. Si c es una cota superior de $-A$, $-x \leq c$, para todo $x \in A$, lo que implica que $-c \leq x$ para todo $x \in A$. Por tanto, $-c$ es una cota inferior de A y como

   $b = \text{ínf}\, A$, debemos tener que $-c \leq b$. Lo anterior implica que $-b \leq c$; y siendo c una cota superior arbitraria de $-A$, concluimos que $-b$ es el supremo de $-A$. Como el supremo de un conjunto es único, por teorema 1.4.5, $-b = a$, como queríamos demostrar.

10. Demuestre que $\sup \mathbb{R}^- = \text{ínf}\, \mathbb{R}^+ = 0$.

    Solución: Como $\mathbb{R}^+ = -\mathbb{R}^-$, por ejercicio resuelto 2, tenemos que $\sup \mathbb{R}^- = \text{ínf}\, \mathbb{R}^+$. Demostremos que $\sup \mathbb{R}^- = 0$. Supongamos que no es así, como 0 es una cota superior de $\mathbb{R}^-$, entonces $\sup \mathbb{R}^- < 0$. Del teorema 1.2.16 tenemos que $x = \dfrac{\sup \mathbb{R}^-}{2}$ satisface que $\sup \mathbb{R}^- < x < 0$. Luego, $x \in \mathbb{R}^-$ y $\sup \mathbb{R}^- < x$, lo que contradice la definición de $\sup \mathbb{R}^-$. Por tanto, $\sup \mathbb{R}^- = 0$ como queríamos demostrar.

11. Demuestre que $\text{ínf} \left\{ \dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} = 0$.

    Solución:: 0 es cota inferior del conjunto pues, $0 < \dfrac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $I > 0$, entonces por el teorema 1.4.19 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \dfrac{1}{n} < I$. Lo cual es una contradicción con la definición de I. Por tanto, $I = 0$.

12. Sean a y b números reales. Demuestre que si para todo $\varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$, entonces $a \leq b$.

Solución: Como $a - b < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, $a - b$ es cota inferior de $\mathbb{R}^+$. Por el ejercicio anterior, $\inf \mathbb{R}^+ = 0$. Por lo tanto, $a - b \leq 0$ y luego $a \leq b$.

13. Demuestre que $\mathbb{R}$ no es acotado superior ni inferiormente.

Solución: Supongamos que $\mathbb{R}$ es acotado superiormente, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Luego, como $M + 1 \in \mathbb{R}$ tendríamos que $M + 1 \leq M$, lo que implica que $1 \leq 0$; pero esto es una contradicción con el teorema 1.2.15. Por tanto, $\mathbb{R}$ no puede estar acotado superiormente.

Ahora si $\mathbb{R}$ fuera acotado inferiormente, entonces por ejercicio resuelto 2 $-\mathbb{R}$ estaría acotado superiormente y como $-\mathbb{R} = \mathbb{R}$, tendríamos que $\mathbb{R}$ es acotado superiormente. Por tanto, $\mathbb{R}$ no puede estar acotado inferiormente.

14. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, considere los siguientes conjuntos definidos en 1.4.16:

$$\begin{aligned} A_1 &=]a, b[\quad A_2 = [a, b[\\ A_3 &=]a, b] \quad A_4 = [a, b]. \end{aligned}$$

Demuestre que :

- $\sup A_1 = \sup A_2 = \sup A_3 = \sup A_4 = b$
- $\inf A_1 = \inf A_2 = \inf A_3 = \inf A_4 = a$.

Solución: Es fácil ver que b es cota superior de A_1, A_2, A_3 y A_4 por la definición de los conjuntos. Ahora, usando el teorema 1.4.4, veamos que b es el supremo de estos conjuntos. Consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por teorema 1.2.16, tenemos que

$$b - \varepsilon < \frac{(b - \varepsilon) + b}{2} < b$$

luego, si $x = \dfrac{(b - \varepsilon) + b}{2}$ tenemos que $x \in A_i$ con $i = 1, \ldots, 4$; puesto que $x < b$. Además, $b - \varepsilon < x$. Luego, $b = \sup A_i$ con $i = 1, \ldots, 4$. Notemos que si $\varepsilon \geq b - a$ cualquier $x \in A_i$ con $i = 1, \ldots, 4$ satisface la propiedad del teorema 1.4.4 para b como candidato a supremo.

Como $-A_1 = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -b < x < -a\}$, entonces por lo demostrado en el párrafo anterior $\sup -A_1 = -a$, luego por lo demostrado en ejercicio resuelto 2 concluimos que $\inf A_1 = a$. Análogamente $\inf A_2 = \inf A_3 = \inf A_4 = a$.

Veamos ahora que A_1 a pesar de tener ínfimo no tiene primer elemento. Si este existiera y fuera p, entonces, $p \in A_1$ y $p \leq x$; $x \in A_1$. Sin embargo, sabemos que siendo $a < p$ se tiene que $a < \dfrac{a + p}{2} < p$, y luego $\dfrac{a + p}{2} \in A_1$ y $\dfrac{a + p}{2} < p$. Pero esto

es una contradicción con el hecho que p es el primer elemento de A_1. Por tanto, A_1 no tiene primer elemento.

De modo análogo, A_3 no tiene primer elemento y A_1, A_2 no tienen último elemento .

15. Dado $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$, definimos $a + A = \{a + x \ : \ x \in A\}$. Demuestre que si A es acotado superiormente, entonces $a + A$ es acotado superiormente y $\sup(a + A) = a + \sup A$.

Solución: Sea $u = \sup A$, entonces, $x \leq u$ para cualquier $x \in A$, y $a+x \leq a+u$. Por tanto, $a+u$ es una cota superior de $a+A$; por consiguiente, se tiene $\sup(a+A) \leq a+u$. Si v es cualquier cota superior del conjunto $a + A$, entonces $a + x \leq v$ para todo $x \in A$. Entonces, $x \leq v - a$ para todo $x \in A$, lo cual implica que $u = \sup A \leq v - a$. Así $a + u \leq v$ y como $a + u$ es una cota superior de $a + A$, se concluye que

$$\sup(a + A) = a + u = a + \sup A.$$

Usando ejercicio resuelto 2, puede probarse una proposición análoga para ínfimos. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{ínf}(a + A) &= -\sup[-(a + A)] \\ &= -\sup[-a + (-A)] \\ &= -[-a + \sup(-A)] \\ &= a - \sup(-A) \\ &= a + \text{ínf } A. \end{aligned}$$

Para que lo anterior tenga sentido, A debe ser un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente. Además debe demostrarse que $-(a + A) = -a + (-A)$, lo cual es inmediato.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre, sin usar ejercicio resuelto 14, que:

   a) $\sup[-5, 2[) = 2$ y $\text{ínf}[-5, 2[= -5$.

   b) $\sup\{x \in \mathbb{R} \ : \ -x^2 + 3x - 2 > 0\} = 2$ y $\text{ínf}\{x \in \mathbb{R} \ : \ -x^2 + 3x - 2 > 0\} = 1$.

   c) $\sup\{-x^2 + 3x - 2 \ : \ x \in \mathbb{R}\} = \dfrac{1}{4}$.

2. Si a y $b \in \mathbb{R}$, demuestre que:

   a) $(a \pm b)^2 \geq 0$.

   b) $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$.

   c) Si además, $a^2 + b^2 = 1$, entonces $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

3. Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 4\}$

   a) Encuentre cotas superiores e inferiores para A y su complemento A^c.

   b) Encuentre el $\sup A$, $\text{ínf}\, A$, $\sup A^c$, $\text{ínf}\, A^c$ si es que existen.

   Encuentre cotas superiores e inferiores para los siguientes conjuntos:

4. $\{x^2 + 1;\ -1 \leq x \leq 1\}$.

5. $\{x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}\}$.

6. $\left\{\dfrac{1}{x^2+1};\ -1 \leq x \leq 1\right\}$.

7. $\left\{\dfrac{1}{x^2+1};\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

   En los siguientes tres ejercicios, complete los cuadrados de binomio para analizar la situación.

8. $\{1 - x - x^2;\ -2 \leq x \leq 1\}$.

9. $\{x^2 + x - 1;\ x \in \mathbb{R}\}$.

10. $\{1 - x - x^2;\ x \in \mathbb{R}\}$.

11. Si $x = 3b - a + 2,\ y = 3a - b + 7$ y los números a y b están acotados como sigue: $2,50 < a < 2,51\ \ ;\ \ 4,33 < b < 4,34$. Encuentre cotas superiores e inferiores para $x,\ y,\ x + y,\ x - y,\ xy,\ \dfrac{x}{y}$. Compare x e y.

12. Dados los números reales a, b, demuestre que:

    a) $\sup\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$.

    b) $\text{ínf}\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

13. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces consideremos los conjuntos:
$A + B = \{a + b \ : \ a \in A,\, b \in B\}$.

$\lambda A = \{\lambda a \ : \ a \in A\}$.

$AB = \{ab \ : \ a \in A,\, b \in B\}$.

   a) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Muestre que si $\lambda \geq 0$, entonces $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ y $\text{ínf}(\lambda A) = \lambda\, \text{ínf}\, A$. Busque contraejemplos para mostrar que no se tienen tales igualdades cuando $\lambda < 0$.

   b) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Demuestre que:
$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ y $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$.
¿Cuándo $\sup(AB) = (\sup A)(\sup B)$ e $\text{ínf}(AB) = (\text{ínf}\, A)(\text{ínf}\, B)$? En tal caso demuestre que se satisfacen dichas igualdades.

   c) Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $A \subset B$ y B acotado. Muestre que A es acotado y que $\text{ínf}\, B \leq \text{ínf}\, A \leq \sup A \leq \sup B$.

   d) Sean A, B subconjuntos no vacíos y acotados de $\mathbb{R}$. Muestre que

$$\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\} \quad \text{y} \quad \text{ínf}(A \cup B) = \text{mín}\{\text{ínf}\, A, \text{ínf}\, B\}.$$

14. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con recorrido acotado. Demuestre que si $A_0 \subset A$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{ínf}\{f(x) \ : \ x \in A\} &\leq \text{ínf}\{f(x) \ : \ x \in A_0\} \leq \sup\{f(x) \ : \ x \in A_0\} \\ &\leq \sup\{f(x) \ : \ x \in A\}. \end{aligned}$$

15. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones con recorrido acotado. Demuestre que:

$$\begin{aligned} \text{ínf}\{f(x) \ : \ x \in A\} + \text{ínf}\{g(x) \ : \ x \in A\} &\leq \text{ínf}\{f(x) + g(x) \ : \ x \in A\} \\ &\leq \text{ínf}\{f(x) \ : \ x \in A\} + \\ &\quad + \sup\{g(x) \ : \ x \in A\} \\ &\leq \sup\{f(x) + g(x) \ : \ x \in A\} \\ &\leq \sup\{f(x) \ : \ x \in A\} + \\ &\quad + \sup\{g(x) \ : \ x \in A\} \end{aligned}$$

16. Demuestre teorema 1.4.8.

17. Demuestre teorema 1.4.9.

18. Demuestre teorema 1.4.10.
19. Demuestre teorema 1.4.12.
20. Demuestre teorema 1.4.13.

Bibliografía del Primer Capítulo

[AA85] M.A. Laurentiev y otros A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Alianza Universidad, 1985.

[Apo65] T. Apostol. *Calculus.* Reverté, 1965.

[BS89] R. Bartle and D. Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable.* Editorial Limusa, 1989.

[dp60] Réunion de professeurs. *Exercises de trigonométrie.* Ligel, París, 1960.

[Gra91] F. Granero. *Cálculo.* McGraw - Hill. Madrid, 1991.

[GU02] J. Guajardo and J. Urrea. *Cuarenta problemas resueltos de cálculo integral.* Trabajo de Titulación, Fac de Ciencias, 2002.

[Kit86] J. Kitchen. *Cálculo.* McGraw - Hill, 1986.

[KKVM] I. D. Kudriávtsev, A.D. Kutásov, V.I.Chejlov, and M.I.Shsbunin. *Problemas de Análisis Matemático.* Ed. Mir Moscú.

[Kur61] K. Kuratowski. *Introduction to calculus.* Pergamon Press, 1961.

[Lar53] H. Larsen. *Tables, Formulas and curves.* 1953.

[Lim89] E. Lima. *Análise real.* IMPA, 1989.

[Max59] E. A. Maxwell. *An analytical calculus.* Cambridge University Press, 1959.

[Rot59] R. Rothe. *Matématica superior. Tomos I y II.* Editorial Labor, 1959.

[San] Colección H.E.C. Santiago, editor. *Elementos de trigonometría.*

[Spi70] M. Spivak. *Calculus.* Reverté, 1970.

Capítulo 2

Límites y continuidad

2.1. Límites de funciones numéricas de variable discreta.

2.1.1. Las variables discretas y el conjunto $\mathbb{N}$

Si una magnitud varía mediantes saltos, como por ejemplo el número de personas que llegan a la caja de un banco en intervalos de tiempos fijos, el número de nacimientos o muertes medido día a día, se dice que es discreta. Otra forma de concebir algo discreto es algo que al ser fraccionado pierde su esencia. Por ejemplo: la mitad de una mesa no es una mesa y la tercera parte de 34 nacimientos no son 11,333....nacimientos. En cambio, existen otras magnitudes que permiten, al menos abstractamente, infinitas posibilidades de división. Las más típica de las magnitudes continuas son el tiempo y la temperatura.

Las variables discretas, en general, aparecen al contar objetos, sucesos o fenómenos y, por tanto, el modelo matemático básico de una variable discreta es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.

En una relación funcional de variable independiente y dependiente, cuando la variable independiente es discreta necesariamente la variable dependiente también lo es, este tipo de asignación se les llama **sucesiones**. Una sucesión es una abstracción de un proceso cuyas etapas se pueden contar y extender indefinidamente.

Definición 2.1.1 Se llama **sucesión de números reales** a una función definida sobre $\mathbb{N}$ con valores en $\mathbb{R}$, es decir, una regla que pone en correspondencia de manera única los elementos de $\mathbb{N}$ con números reales.En otras palabras, una sucesión es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que a cada n le asigna $f(n) = a_n$. También suele denotarse como $\{a_n\}$ y a a_n se le llama el término general de la sucesión.

Antes de entrar en el estudio de las sucesiones enunciaremos algunas de las propiedades más relevantes del conjunto de los números naturales.

Teorema 2.1.2 Principio de Inducción Sea $n \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una propiedad verificada por n. Si se cumple lo siguiente:

(i) $P(1)$ es verdadera.

(ii) El hecho que $P(n)$ es verdadera implica que $P(n+1)$ es verdadera.

Entonces, la propiedad $P(n)$ se satisface para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 2.1.3 Principio del Buen Orden
$\mathbb{N}$ es un conjunto bien ordenado, esto significa que todo subconjunto A no vacío de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

El Principio de Inducción es el método más seguro, a veces el único, para demostrar propiedades de los números naturales. Existe un teorema paralelo a éste, que nos da la posibilidad de garantizar que ciertas funciones sobre los números naturales están bien definidas, tal es el *Teorema de Recurrencia*, que vamos a enunciar para cultura de los lectores, pero que no demostraremos aquí.

Teorema 2.1.4 Teorema de Recurrencia
Si x es un número real y G una función sobre $\mathbb{R}$ con valores reales, entonces existe una única F tal que:

(i) F es una función sobre $\mathbb{N}$.

(ii) $F(1) = x$.

(iii) Para cada n, $F(n+1) = G(F(n))$.

Ejemplo 2.1.5 Una forma de definir sucesiones es usando el Teorema de Recurrencia.

a) Dados los números reales x, d, una progresión aritmética es la sucesión definida por recurrencia de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n + d \end{aligned}$$

En este caso, la función G es $G(z) = z + d$ donde d es una constante real.

b) Dados los números reales x, r, se define una **progresión geométrica** de la siguiente manera recursiva:

$$\begin{aligned} a_1 &= x \\ a_{n+1} &= a_n \cdot r\,; \end{aligned}$$

En este caso, la función G es $G(z) = rz$ donde r es una constante real.

c) La definición por recurrencia puede involucrar explícitamente a más de un término ya conocido, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 3a_{n-1}. \end{aligned}$$

Esto se obtiene al considerar
$F(n+1) = G(F(n-1), F(n))$ y $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \qquad G(x, y) = 3x + 2y.$

El teorema de Recurrencia no sólo se usa para definir sucesiones, las siguientes dos definiciones son otros casos, muy conocidos, en que se usa este útil teorema.

Definición 2.1.6 Dado $x \in \mathbb{R}$, se define $x_1 = x$ y $x_{n+1} = x^n x$.

Tomando x fijo y $G(y) = yx$, el teorema nos asegura la existencia de una única función F sobre $\mathbb{N}$ tal que $F(1) = x$ y $F(n+1) = G(F(n)) = F(n)x$. Por convención $F(n)$ la escribimos como x^n.

Definición 2.1.7 Se define el símbolo $n!$ mediante el siguiente esquema recursivo:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ (n+1)! &= n!(n+1) \end{aligned}$$

Definición 2.1.8 Diremos que una sucesión es:

(i) **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$, para todo n.

(ii) **creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo n.

(iii) **estrictamente decreciente** si $a_n > a_{n+1}$, para todo n.

(iv) **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo n.

(v) **monótona** si satisface cualquiera de las condiciones anteriores.

Ejemplo 2.1.9 1. La sucesión idéntica, $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es estrictamente creciente. En efecto, del orden de $\mathbb{R}$, sabemos que $0 < 1$, lo que implica $n < n + 1$.

2. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$, es decreciente, ya que $n < n + 1$, implica $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$.

3. La sucesión constante $a_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ es la única que es creciente y decreciente a la vez.

4. La sucesión cuyo término general está definido por $a_n = n^2$, es creciente. En efecto, usando las propiedades de las potencias tenemos que:

$$n < n + 1 \implies n^2 < (n + 1)^2.$$

5. Como la multiplicación de desigualdad por un número negativo invierte el orden, toda sucesión creciente da origen a una decreciente y viceversa.

6. La sucesión $a_n = (-1)^n$, para todo n; no es creciente ni decreciente.

Una vez conocido el crecimiento de una variable discreta, surge la pregunta si el crecimiento es indefinido o no. Para diferenciar el tipo de crecimiento se introduce el concepto de acotamiento para una sucesión.

Definición 2.1.10 Diremos que una sucesión es **acotada** si existe un número positivo M tal que $|a_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En palabras, una sucesión es acotada si el recorrido de la ella es acotado.

Ejemplo 2.1.11 1. La sucesión idéntica, $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, no es acotada superiormente como consecuencia del Principio de Arquímedes.

2. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$, es acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1.

3. La sucesión constante $a_n = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, dado que, en este caso, el recorrido se reduce al conjunto $\{c\}$, esta sucesión es acotada.

4. La sucesión $a_n = (-1)^n$, para todo n; tiene por recorrido $\{-1, 1\}$. Por ser conjunto finito es acotado.

5. La sucesión $a_n = n^2$, no es acotada superiormente ya que $n \geq 1$ implica $n < n^2$. Si la sucesión fuera acotada superiormente implicaría que la sucesión idéntica es acotada superiormente, lo que ya vimos no es posible.

2.1.2. Sucesiones monótonas no acotadas

Para dar una idea de una magnitud que crece o decrece indefinidamente necesitamos ampliar el conjunto $\mathbb{R}$ introduciendo los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ y sus relaciones aritméticas y de orden. Se define el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ como $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ con las siguientes reglas aritméticas y de orden:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$. Se preservan las propiedades fundamentales de las desigualdades.
2. $(+\infty) + a = +\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. $(-\infty) + a = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. $(+\infty) \cdot a = +\infty$, si $a > 0$.
5. $(+\infty) \cdot a = -\infty$, si $a < 0$.
6. $(-\infty) \cdot a = -\infty$, si $a > 0$.
7. $(-\infty) \cdot a = +\infty$, si $a < 0$.
8. $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
9. $(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$
10. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

Es importante enfatizar que las operaciones con estos símbolos que no están explícitamente definidas no tienen sentido, es decir, cuando ellas aparecen no se puede concluir nada. Por esta razón suele llamárseles **formas indeterminadas**. Ejemplos de formas indeterminadas son: $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $(-\infty) \cdot 0$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Definición 2.1.12 (i) Diremos que una sucesión diverge a $+\infty$, si para cada número M existe un número natural N tal que $a_n > M$ para todo $n \geq N$. Esto lo denotaremos simbólicamente por

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

(ii) Diremos que una sucesión diverge a $-\infty$, si para cada número negativo m existe un número natural N tal que $a_n < m$, para todo $n \geq N$. En tal caso, escribiremos:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty.$$

Ejemplo 2.1.13 1. $\lim_{n\to+\infty} n = \infty$

2. $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$

3. Toda sucesión creciente no acotada superiormente diverge a $+\infty$.

4. Toda sucesión decreciente no acotada inferiormente diverge a $-\infty$.

Ahora veremos algunas propiedades de las sucesiones divergentes a $+\infty$ ó $-\infty$:

Teorema 2.1.14 (i) Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y si la sucesión $\{b_n\}$ es acotada inferiormente, entonces $\lim_{n\to+\infty}\{a_n + b_n\} = +\infty$.

(ii) Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y si $b_n \geq c > 0$, para todo n, entonces $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

(iii) Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y $a_n \leq b_n$, entonces $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Demostración:

(i) $\{b_n\}$ acotada inferiormente implica que existe r tal que $r < b_n$, para todo n. Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, dado $M > 0$, existe N tal que $a_n > M - r$, cuando $n \geq N$. Como $a_n + b_n > a_n + r > M$; cuando $n \geq N$ lo que nos dice que $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

(ii) Dado $M > 0$, tenemos que existe N tal que $a_n > \dfrac{M}{c}$, cuando $n \geq N$. Multiplicando esta desigualdad por $b_n \geq c$, obtenemos $a_n b_n \geq M$. Por tanto $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = +\infty$.

(iii) Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Dado $M > 0$, existe N tal que $a_n > M$, para todo $n \geq N$. Pero $b_n \geq a_n$, entonces $b_n \geq M$, para todo $n \geq N$. Así $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. □

Observación 2.1.15 1. Las acotaciones para la sucesión b_n, en (2.1.14) partes (i) y (ii), son necesarias para evitar formas indeterminadas.

2. Caso particular de (ii) es que si dos sucesiones divergen a $+\infty$, la suma de ellas diverge a $+\infty$. Caso particular de (iii) es que el producto de dos sucesiones que divergen a $+\infty$, diverge a $+\infty$.

Ejemplo 2.1.16 1. Para cualquier constante real c, $\lim_{n\to+\infty}(n + c) = +\infty$.

2. $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

3. Si $k \geq 1$, entonces $\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$.

4. Si $c > 0$, entonces $\lim_{n\to+\infty} nc = +\infty$, aplicando (iii)del teorema 2.1.14. ¿Qué sucede en los casos $c < 0$ y $c = 0$?

2.1.3. Sucesiones monótonas acotadas

Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona creciente y acotada, se cumplen las siguientes afirmaciones:

- $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$
- $|a_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando el Axioma del supremo (ínfimo), tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= \text{ínf}\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \\ S &= \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De manera análoga, si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada, concluimos que:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \\ I &= \text{ínf}\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta estas consideraciones, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.17 Si $\{a_n\}$ es una sucesión monótona creciente ó decreciente y acotada, diremos que el límite de ella es su supremo ó ínfimo,respectivamente. Lo que se escribe en la forma:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \text{si} \qquad a_n \nearrow \tag{2.1}$$

ó

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \text{ínf}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \text{si} \qquad a_n \searrow \tag{2.2}$$

Ejemplo 2.1.18 1. La sucesión constante con término general $a_n = c$, para todo n, tiene límite $L = c$. Pues, c es el ínfimo y el supremo del conjunto $\{c\}$. De ahora en adelante, escribiremos:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} c = c}$$

2. La sucesión decreciente y acotada inferiormente, $a_n = \dfrac{1}{n}$, tiene ínfimo 0. Demostrado en el ejercicio resuelto 11 de la subsección 1.4. Por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

3. A la sucesión $a_n = (-1)^n$, aunque es acotada, no se puede aplicar la definición 2.1.17 porque no es una sucesión monótona.

Ejemplo 2.1.19 1. Consideremos la sucesión definida por recurrencia

$$\begin{aligned} a_1 &= -6 \\ a_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} + 3, \text{ si } n \geq 2 \end{aligned}$$

Esta sucesión es tal que: $a_2 = \frac{1}{2}(-6) + 3 = 0$, $a_3 = \frac{0}{2} + 3 = 3$, $a_4 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$.

Podemos intuir que esta sucesión es creciente, pero debemos demostrarlo. Lo haremos usando inducción. La propiedad $P(1)$ toma la forma: $a_1 \leq a_2$. Calculando a_1 y a_2, podemos verificar rápidamente que $a_1 = -6 < 0 = a_2$.
Ahora supongamos que se satisface la propiedad $P(n)$ que en nuestro caso toma la forma: $a_n < a_{n+1}$; entonces, debemos demostrar que $a_{n+1} < a_{n+2}$. En efecto:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3 < \frac{1}{2}a_{n+1} + 3 = a_{n+2} \quad \text{(por hipótesis de inducción).}$$

Usando nuevamente el principio de inducción, demostraremos que esta sucesión es acotada por 10:

$a_1 = -3 < 10$. Supongamos que $a_n < 10$, entonces $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3 < \frac{1}{2}\,10 + 3 = 8 < 10$. Por tanto, tenemos que $|a_n| < 10$.

Por ser creciente y acotada, tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{\, a_n : n \in \mathbb{N} \,\} = L$$

donde L es un número real tal que $a_4 = 4,5 < L < 10$. Usando que la sucesión es creciente, se puede afinar la acotación inferior de L, puesto que es el supremo de todos los números a_n. ¿Cómo afinar la acotación superior de L?

¿Qué significa que una sucesión converja a su supremo? Si recordamos la caracterización del supremo vista en la sección 1.4, teorema 1.4.4, y suponemos que a_n converge a $L = \sup\{\ a_n : n \in \mathbb{N}\ \}$, entonces se cumple que: Para cada real positivo ε existe un a_N, tal que $L - \varepsilon < a_N$. Como la sucesión es estrictamente creciente,

$$a_N < a_n\ ,\ \text{si}\ \ n > N.$$

en palabras , esto nos dice que a partir del N todos los elementos de la sucesión están en el intervalo $]L-\varepsilon\ ,\ L[$. Esta idea puede expresarse también diciendo que: si L es límite de la sucesión, sólo una cantidad finita de a_n están fuera del intervalo $]L-\varepsilon\ ,\ L[$.

Ejemplo 2.1.20 Sea $a_n = -\dfrac{1}{n}$ sucesión es estrictamente creciente y acotada superiormente por 0. por tanto, ella converge a 0. Si nos damos $\varepsilon = 0,001$, ¿cuántos elementos de la sucesión están fuera del intervalo $]-0,001\ ,\ 0[$? Para calcular dicha cantidad resolvemos la inecuación en n:

$$-0,001 < a_n < 0 \iff -0,001 < -\frac{1}{n} < 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{n} < 0,001 \Longleftrightarrow n > 1000.$$

Para $\varepsilon = 0,001$ los primeros mil a_n quedan afuera del intervalo considerado. Así, vemos que para $\varepsilon = 0,001$, el N que satisface la caracterización del supremo es $N = 1000$. La simplicidad del ejemplo permite ver rápidamente la dependencia que tiene N de ε. Ya que si

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0,1 &\implies N = 10 \\ \varepsilon = 0,0001 &\implies N = 10000 \\ \varepsilon = 0,05 &\implies N = 50 \end{aligned}$$

Todo lo que hemos hecho para sucesiones crecientes y acotadas vale para sucesiones decrecientes y acotadas, cambiando lo evidente. Así, en el siguiente ejemplo la sucesión es decreciente y acotada, por tanto converge a su ínfimo.

Ejemplo 2.1.21 Si $a_n = 1 + \dfrac{5}{n+1}$, la sucesión $\{a_n\}$ converge a $L = 1$ que es su ínfimo. Veamos la demostración de esta afirmación.
Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar N tal que si $n > N$, entonces

$$a_n - 1 = 1 + \frac{5}{n+1} - 1 = \frac{5}{n+1}$$

debe ser menor que ε.

Imponiendo la condición, despejamos n.

Para que $\dfrac{5}{n+1} < \varepsilon$ es necesario y suficiente que $\dfrac{5}{\varepsilon} - 1 < n$.

Así, usando la propiedad arquimediana, dado el número $\frac{5}{\varepsilon} - 1$ existe un N tal que $N > \frac{5}{\varepsilon} - 1$, de modo que si $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} n &> \frac{5}{\varepsilon} - 1 \\ n + 1 &> \frac{5}{\varepsilon} \\ \frac{n+1}{5} &> \frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{5}{n+1} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Una aplicación de estas ideas es demostrar que todo número irracional es límite, en particular ínfimo o supremo, de alguna sucesión de números racionales.

Ejemplo 2.1.22 Consideremos la sucesión definida recursivamente:

$$\begin{aligned} x_0 &= c, \quad c > 0 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \end{aligned}$$

El punto inicial x_0 lo excluiremos de la sucesión.

- La sucesión es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
  Para demostrar esto usaremos la desigualdad $u + \frac{1}{u} \geq 2$ si $u > 0$. Tomando $u = \frac{x_n}{\sqrt{a}}$ tenemos que para todo n,
  $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right) \leq \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}.$$
- La sucesión es monótona decreciente.
  Aplicando la acotación demostrada en el ítem anterior obtenemos:
  $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{x_n}{2} \cdot 2 = x_n$$

Con lo que sabemos hasta el momento solo podemos asegurar que:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L \geq \sqrt{a}.$$

Más adelante, demostraremos que $L = \sqrt{a}$. Así, cuando $\sqrt{a}$ es un número irracional esta sucesión de números racionales nos permite calcular $\sqrt{a}$ con el grado de exactitud que nosotros queramos.

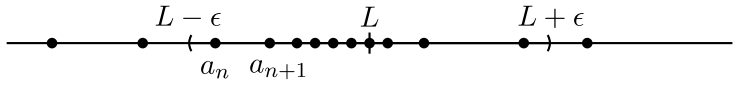


Figura 2.1: Interpretación geométrica del límite

2.1.4. Sucesiones convergentes no monótonas

Ahora abordaremos el estudio de sucesiones generales, en el sentido que no son crecientes ni decrecientes, como por ejemplo $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. A pesar de no ser monótona es claro que a medida que n crece x_n se acerca a cero por la derecha y por la izquierda. Como nos interesa que la "mayoría" de los términos de la sucesión esté suficientemente cerca, estamos obligados a usar el valor absoluto, por ser esta la distancia de $\mathbb{R}$. Pero, en este caso el límite no es supremo ni ínfimo del recorrido de la sucesión.

Definición 2.1.23 Diremos que un número L, es el **límite de una sucesión** $\{a_n\}$ si dado un número positivo ε existe un número natural N tal que si $n \geq N$, se cumple que

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

es decir, $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$, para todo $n \geq N$.

En este caso, escribimos: $L = \lim_{n \to +\infty} a_n$ ó $a_n \to L$ cuando $n \to +\infty$ y también suele decirse que la sucesión $\{a_n\}$ **converge** hacia L.

Interpretación geométrica del límite. Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente a L entonces, graficando la sucesión, se debe observar que a partir de algún n los a_n comienzan a acercarse al punto L.

Dado un ε a partir de n suficientemente grande, todos los valores de la sucesión se encuentran en la franja $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Ejemplo 2.1.24

1. La convergencia de las sucesiones monótonas es un caso particular de esta definición.

2. La sucesión $a_n = (-1)^n$, aunque es acotada, no tiene límite. Cualquier número candidato a límite, en particular los valores 1, -1, no cumple con la condición, pues la distancia entre dos términos sucesivos $|a_n - a_{n+1}| = 2$; por tanto, tomando cualquier $0 < \varepsilon < 2$, es imposible que se satisfaga la definición 2.1.23.

3. $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

Definición 2.1.25 Si una sucesión no converge, entonces diremos que **diverge**. Es decir, una sucesión $\{a_n\}$ diverge si:
Dado $L \in \mathbb{R}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo n existe otro número natural m, $m \geq n$ de modo que,

$$|a_m - L| \geq \varepsilon.$$

En palabras simples la definición dice que ningún número real L puede ser límite de la sucesión. Esto incluye los límites $\pm\infty$ y el caso de sucesiones que oscilan.

Ejemplo 2.1.26

Teorema 2.1.27 Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, L entonces el límite es único.

Demostración: Usando el método por contradicción, supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ converge además hacia otro número $\overline{L}$.

Usando definición 2.1.23, con L y $\overline{L}$, tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que si $n \geq N$, $|a_n - L| < \varepsilon$ existe $\overline{N}$ tal que si $n \geq \overline{N}$, $|a_n - \overline{L}| < \varepsilon$.

Por tanto, usando la desigualdad triangular del valor absoluto, tenemos:

$$|L - \overline{L}| = |L - \overline{L} + a_n - a_n| = |(L - a_n) - (\overline{L} - a_n)| \leq |L - a_n| + |\overline{L} - a_n| < 2\varepsilon.$$

Por ser $| L - \overline{L} | < 2\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, usando la propiedad demostrada en el ejercicio resuelto 5 de la subsección 1.2.2 tenemos que $L = \overline{L}$. Por tanto, si existe el límite, éste es único. □

Teorema 2.1.28 Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración: Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente hacia L. Aplicando la definición 2.1.23 con $\varepsilon = 1$, podemos asegurar la existencia de un número N tal que, si $n \geq N$, $|a_n - L| < 1$.

Por una propiedad del valor absoluto,

$$|a_n| - |L| \leq |a_n - L| < 1$$

$$|a_n| \leq |L| + 1, \text{ si } n \geq N.$$

Los términos no incluidos en la última afirmación son $\{a_1, \ldots, a_{N-1}\}$ que constituyen un conjunto finito y, por tanto, es acotado. Es decir,

$$|a_n| \leq M \quad \text{, para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para $M = \sup\{|a_1|, \ldots, |a_n|, |L| + 1\}$. Así tenemos que $\{a_n\}$ es acotada. □

Las operaciones aritméticas de $\mathbb{R}$ y el concepto de límite El siguiente teorema nos dice cómo se conserva la propiedad de convergencia a través de las operaciones aritméticas.

Teorema 2.1.29 Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n$.

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$; cuando $b_n \neq 0$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n \neq 0$.

Demostración:

(i) Sean $L_1 = \lim_{n\to+\infty} a_n$, $L_2 = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existen números naturales N_1, N_2 tales que:

$$|a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ; para todo } n \geq N_1$$

$$|b_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ; para todo } n \geq N_2.$$

Entonces, si $N \geq \sup\{N_1, N_2\}$

$$|(a_n+b_n)-(L_1+L_2)| = |(a_n-L_1)+(b_n-L_2)| \leq |a_n-L_1|+|b_n-L_2| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ ; para todo } n \geq N.$$

Por tanto, la sucesión $\{a_n + b_n\}$ converge a $L_1 + L_2$.

(ii) Debemos estudiar la distancia entre a_nb_n y L_1L_2, es decir, estimar el número $|a_nb_n - L_1L_2|$. Para ello, observemos que

$$\begin{aligned} a_nb_n - L_1L_2 &= a_nb_n - a_nL_2 + a_nL_2 - L_1L_2 \\ &= a_n(b_n - L_2) + L_2(a_n - L_1) \end{aligned}$$

como la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, ella es acotada, así existe $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$, para todo n.

$$\begin{aligned} |a_nb_n - L_1L_2| &\leq |a_n||b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \\ &\leq M|b_n - L_2| + |L_2||a_n - L_1| \end{aligned}$$

Con un argumento como el usado en (i), dado un número positivo η, existe N tal que si $n \geq N$, entonces

$$|b_n - L_2| < \eta$$

$$|a_n - L_1| < \eta.$$

Entonces $|a_n b_n - L_1 L_2| \leq M\eta + |L_2|\eta = (M + |L_2|)\eta$ para $n \geq N$. Si en particular elegimos $\eta = \dfrac{\varepsilon}{M + |L_2|}$, entonces $|a_n b_n - L_1 L_2| < \varepsilon$; para $n \geq N$.

(iii) Como $\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b_n}$; y acabamos de demostrar la convergencia de un producto de sucesiones convergentes, basta que demostremos la convergencia de $\{\dfrac{1}{b_n}\}$ hacia $\dfrac{1}{L_2}$, cuando $L_2 \neq 0$.

La condición $L_2 \neq 0$ implica que cuando n crece, los b_n no pueden ser cero. En efecto, si $L_2 \neq 0$ entonces $\dfrac{1}{2}|L_2| > 0$. Por lo cual podemos tomar en particular $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|L_2|$ y por definición 2.1.23, existe N tal que si $n \geq N$ entonces $|b_n - L_2| < \dfrac{1}{2}|L_2|$. De aquí, tenemos que $|L_2| - |b_n| \leq |b_n - L_2| < \dfrac{1}{2}|L_2|$ y por tanto $|b_n| > \dfrac{1}{2}|L_2|$.

Ahora analicemos la diferencia

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}| = |\frac{L_2 - b_n}{b_n \cdot L_2}| = \frac{|L_2 - b_n|}{|b_n||L_2|}.$$

Pero para n grande, $|L_2 - b_n| < \eta$ y $\dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{2}{|L_2|}$, así:

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}| < \frac{2\eta}{|L_2|} \ \text{; si hacemos } \ \eta = \frac{1}{2}\varepsilon \mid L_2 \mid,$$

obtenemos que $|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{n}| < \varepsilon$.

Con este resultado y (iii) tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot \frac{1}{b_n}) = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}. \end{aligned} \quad .$$

□

Corolario 2.1.30 Como casos particulares del teorema 2.1.29 tenemos los siguientes resultados:

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}(c \cdot a_n) = c \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$; $c =$cte.

(ii) $\lim_{n\to+\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(iii) $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty}[a_n + (-b_n)] = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty}(-b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Observación 2.1.31 En la aplicación del teorema 2.1.29 se debe verificar previamente el cumplimiento de la hipótesis que las sucesiones involucradas sean convergentes, pues en caso contrario las conclusiones pueden ser falsas.

Sean las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $a_n = n$, $b_n = n$, entonces en este caso no puede usarse la fórmula (i) del teorema 2.1.29. Pues $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) \neq \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty + (-\infty)$ pero $a_n - b_n = 0$ y $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty}(0) = 0$.

Ejemplo 2.1.32 1. Encontrar $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}$. Hemos visto que las sucesiones $\{n\}$ y $\{n+1\}$ no son convergentes, por tanto no podemos aplicar la propiedad (iv) del teorema 2.1.29, pero sí podemos transformar la expresión del término general de modo que podamos aplicar algunas de las afirmaciones de dicho teorema. Dividiendo el numerador y el denominador por n, obtenemos:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}.$$

Por (i) $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$. Por (iv) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+1}) = \dfrac{\lim_{n\to+\infty} 1}{\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})} = 1$.

2. Calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+2n^2-4}{n^4+2}$. Nuevamente en este caso para aplicar el teorema 2.1.29 debemos transformar la expresión, dividiendo numerador y denominador por n elevado a la mayor potencia, en este caso, n^4.

$$a_n = \frac{n^3+2n^2-4}{n^4+2} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^4}}{1+\frac{2}{n^4}}.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, por (ii) sabemos que $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n})^r = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^r} = 0$. Por tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n^3+2n^2-4}{n^4+2}) = \frac{\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^4})}{\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n^4})} = \frac{0}{1} = 0$$

Para usar el teorema 2.1.29 es necesario, como se puede observar en los dos ejemplos anteriores, tener un mínimo de sucesiones convergentes de referencia. Para ello es bueno tener, aparte de la definición, algunos recursos técnicos para obtener convergencia como los que dan los siguientes teoremas:

Teorema 2.1.33 Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente, entonces $\{|a_n|\}$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\lim_{n\to+\infty} a_n|$.

Demostración: Sea $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$; entonces para n suficientemente grande, $|a_n - L| < \varepsilon$. Usando propiedades del valor absoluto tenemos:

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon$$

lo cual nos dice que $\{|a_n|\}$ converge y que $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |L|$. □

El siguiente teorema generaliza el ejemplo 2 de 2.1.18.

Teorema 2.1.34 Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, (o bien $-\infty$), entonces $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$.

Demostración: Supongamos $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ y sea $\varepsilon > 0$. Aplicando la definición 2.1.12 a $M = \frac{1}{\varepsilon}$, tenemos que existe N tal que si $n \geq N$ entonces $a_n > M > 0$, o lo que es lo mismo,

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon \quad , \quad \text{para todo} \quad n \geq N.$$

Es decir, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, tomando $-m = \frac{1}{\varepsilon}$ y con argumentos análogos se obtiene la conclusión. □

Observación 2.1.35

- El recíproco del teorema 2.1.34 es falso: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ converge a 0, pero $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$ no diverge a $+\infty$. ni a $-\infty$.
- Debido al teorema 2.1.34, $\frac{1}{\pm\infty}$, no es una forma indeterminada.

El orden de $\mathbb{R}$ y el concepto de límite

Teorema 2.1.36 (i) Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente tal que $a_n \geq 0$ para todo n. Entonces, $\lim_{n\to+\infty} a_n \geq 0$.

(ii) Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones convergentes tales que $a_n \leq b_n$, para todo n. Entonces, $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Demostración:

(i) Sea $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$ y supongamos por contradicción que $L < 0$. Entonces $-L > 0$. Usando la definición de límite con $\varepsilon = -L$, tenemos que para n suficientemente grande

$$|a_n - L| < -L$$

En particular $a_n - L < -L$ y por tanto $a_n < 0$, para n grande lo que contradice la hipótesis.

(ii) Es consecuencia inmediata de (i) tomemos la sucesión $c_n = b_n - a_n$. Como $a_n \leq b_n$ entonces $c_n \geq 0$ y por (i) $\lim_{n\to+\infty} c_n \geq 0$. Pero $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n$ por teorema 2.1.29. Así:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n \geq 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} b_n \geq \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

□

Observación 2.1.37 Este teorema no puede ser enunciado solo con la relación $>$; por ejemplo: $a_n = \dfrac{1}{n} > 0$, para todo n; pero $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Es decir, la relación $\leq$ o $\geq$ pasa bien a través del límite, pero no ocurre lo mismo con $>$ o $<$.

Teorema 2.1.38 Cálculo de límites por acotamiento
Si $a_n \leq c_n \leq b_n$ y si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$, entonces la sucesión $\{c_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Demostración: Sea $L = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, para n suficientemente grande:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{y;} \quad |b_n - L| < \varepsilon.$$

Como $a_n \leq c_n \leq b_n$, tenemos que $a_n - L \leq c_n - L \leq b_n - L$. Además que, $-\varepsilon < a_n - L$ y $b_n - L < \varepsilon$, por tanto, $-\varepsilon < c_n - L < \varepsilon$, lo que implica que $|c_n - L| < \varepsilon$, para n suficientemente grande.

Así, $\lim_{n\to+\infty} c_n = L$. □

Corolario 2.1.39 Si $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Demostración:

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-|a_n|) = 0 = \lim_{n\to+\infty}|a_n|$$

Por tanto, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

Ejemplo 2.1.40 Calcular $\lim_{n\to+\infty} a_n$, donde a_n está dado por:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \ldots\ldots + \frac{n+n}{n^2+n}.$$

Solución: Para calcular este límite no se puede usar el teorema de suma de límites debido a que el número de sumandos de a_n depende de n. Razón por la cual cuando n crece el número de sumando también crece. En casos como este el teorema 2.1.38 es de gran utilidad.
Acotando cada sumando inferiormente por el menor de todos ellos y acotando superiormente cada sumando por el mayor de todos nos queda:

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{n^2+n} + \frac{n+2}{n^2+n} + \ldots\ldots + \frac{n+n}{n^2+n} &< a_n < \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+1} + \ldots\ldots + \frac{n+n}{n^2+1} \\
\frac{(n+1)+(n+2)\ldots\ldots(n+n)}{n^2+n} &< a_n < \frac{(n+1)+(n+2)\ldots\ldots(n+n)}{n^2+1} \\
\frac{n^2+(1+2+\ldots+n)}{n^2+n} &< a_n < \frac{n^2+(1+2+\ldots+n)}{n^2+1} \\
\frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} &< a_n < \frac{n^2+\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} \\
\frac{3n^2+n}{2n^2+2n} &< a_n < \frac{3n^2+n}{2n^2+2} \\
\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2+2n} &\leq \lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2+2} \\
\frac{3}{2} &\leq \lim_{n\to+\infty} a_n \leq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \ldots\ldots + \frac{n+n}{n^2+n}\right) = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo 2.1.41 La sucesión definida en el ejemplo 2.1.19, parte 1, es creciente, acotada superiormente y converge a su supremo. Usando, la aritmética de límites y la unicidad del limite en la forma de recurrencia,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3.$$

Tomamos límite en ambos miembros y nos queda:

$$L = \frac{1}{2}L + 3.$$

Despejando L, obtenemos que $L = 6$.

Límites de referencia

Ejemplo 2.1.42 $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |r| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad r = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad r > 1 \\ \text{no existe} & \text{si} \quad r \leq -1 \end{cases}$

Demostración:

- Si $r > 1$, entonces r puede escribirse

$$r = 1 + h \quad ; \quad h > 0.$$

$$r^n = (1+h)^n \tag{2.3}$$

Usando el teorema del binomio se tiene que

$$(1+h)^n = 1 + nh + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n}_{\text{suma de terminos positivos}}$$

Por lo tanto:

$$(1+h)^n > 1 + nh. \tag{2.4}$$

De 2.3 y 2.4 se concluye.

$$r^n > 1 + nh; \;\; h > 0.$$

En virtud del teorema 2.1.14 parte (iv) tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} r^n > \lim_{n\to+\infty}(1+nh) = +\infty.$$

Por lo tanto,

$$\text{Si } r > 1,$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r^n = +\infty}$$

- Si $|r| < 1$.
  Por propiedad del valor absoluto tenemos que:

  $$|r^n| = |r|^n < 1$$

  Lo que implica que

  $$\frac{1}{|r|^n} > 1$$

  Así,

  $$\frac{1}{|r^n|} = \left(\frac{1}{|r|}\right)^n > 1$$

  Por lo anteriormente demostrado

  $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|r^n|} = +\infty.$$

  Usando el teorema 2.1.14 parte (a), podemos concluir que,

  $$\lim_{n\to+\infty} |r^n| = 0 \quad ; \quad \text{si } |r| < 1.$$

- Si $r = 1$, entonces $r^n = 1$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual en este caso, la sucesión $\{r^n\}$ se reduce a la sucesión constante y su límite es 1.

- Si $r = -1$ entonces

  $$r^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & ; \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

  Esto nos dice que si $r = -1$, la sucesión $\{r^n\} = \{(-1)^n\}$ oscila entre 1 y-1, razón por la cual la sucesión no tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$.

- Si $r < -1$, podemos escribir $r = (-1)|r|$ lo que implica $r^n = (-1)^n|r|^n$.

  Como $|r| > 1$ entonces $|r|^n \to +\infty$ y $(-1)^n$ oscila entre -1 y 1.
  Entonces la sucesión oscila entre $-\infty$ y $+\infty$, por lo tanto no tiene límite en $\overline{\mathbb{R}}$.

Observación 2.1.43 La desigualdad 2.4 en la demostración del ejemplo anterior se llama **desigualdad de Bernoulli** .

Ejemplo 2.1.44 La serie geométrica: Una importante aplicación del límite demostrado en el ejemplo 2.1.42 es el cálculo de la suma de una serie geométrica.
Antes de presentar el cálculo, recordaremos una de las paradojas de Zenón de Elea, filósofo griego del siglo V a.C,quien quiso dejar constancia de la imposibilidad -según él- de concebir abstractamente el movimiento. En particular, si el espacio fuera continuo, entonces cuando alguien va desde un punto A a un punto B, en algún instante está en $\frac{\overline{AB}}{2}$; al seguir avanzando, en otro instante está en la mitad de la mitad, es decir, en $\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}$. En el instante n, se encuentra en

$$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{2^2}+\ldots+\frac{\overline{AB}}{2^n}.$$

Este es un proceso que se extiende indefinidamente teniéndose una suma infinita de números positivos la cual, en la época de Zenón, se pensaba debía ser infinita. Por tanto, en teoría nunca se podía llegar al punto B, cosa que evidentemente contradice la realidad.

Si el proceso de avanzar por sucesivas mitades es una forma de reflejar el poder ir de A hasta B, entonces, ¿comó sumar una cantidad infinita de números positivos de modo que nos dé $\overline{AB}$? Evidentemente no debe ser una suma aritmética, pues por este camino llegamos a la misma conclusión de Zenón.

- Si $a_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ demostraremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=1$. En efecto, sea $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, entonces $a_n=u_1+\ldots+u_n$. La sucesión $\{u_n\}$ corresponde a una progresión geométrica que no contiene el término $u_0=1$.

  Consideremos la progresión geométrica de razón $r=\frac{1}{2}$, usando la fórmula de factorización: $1-x^{n+1}=(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n)$ sabemos que

  $$1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) &= \lim_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2-2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Pero a nosotros nos interesa $\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$, que podemos calcularlo escribiendo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-1=2-1=1.$$

Con esto se tiene lo que la experiencia nos dice: es posible llegar de A hasta B por este proceso de recorrer sucesivas mitades.

- **Caso general:** Dada la progresión geométrica:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= ra_{n-1} \;\;;\;\; n\geq 1, \end{aligned}$$

se llama **serie geométrica de razón** r a la sucesión definida por:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_n &= b_{n-1}+a_n. \end{aligned}$$

Analizaremos la existencia de $\lim_{n\to+\infty} b_n$.
Observemos que

$$b_n = 1+r+\ldots+r^n.$$

generalizando el cálculo del caso particular, tenemos que

$$1+r+\ldots+r^n=\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \;\;;\;\; \text{si } r\neq 1,$$

entonces $\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to+\infty}(1+r+\ldots+r^n)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-r}-\frac{r^{n+1}}{1-r}\right)$, como

$$\lim_{n\to+\infty} r^{n+1}=0 \iff |r|<1,$$

entonces $\lim_{n\to+\infty} b_n=\frac{1}{1-r}$ si y sólo si $|r|<1$.
Si $|\ r\ |=1$, entonces $b_n=1+1+\ldots+1$, sucesión que diverge a $+\infty$ ó
$b_n=1+(-1)+1+(-1)+\ldots$, sucesión que oscila entre 0 y 1, por tanto, tampoco converge.
Si $r>1$, entonces $\lim_{n\to+\infty} r^{n+1}=+\infty$ y b_n diverge.
Si $r<-1$, entonces $r^{n+1}=(-1)^{n+1}|r|^{n+1}$ oscila entre $-\infty$ y $+\infty$.

Ejemplo 2.1.45 Calcular el límite de

$$1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\ldots.$$

Como $|r|=|-\frac{1}{3}|<1$; su límite es : $\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=\dfrac{3}{4}$.

Ejemplo 2.1.46 Definición del número e

Este importante número irracional simboliza el límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

En este ejemplo demostraremos que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente y acotada superiormente.

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, en particular tenemos:

$$a_1=2,\ \ a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25,\ \ a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}=2,\overline{370}.$$

Demostraremos que la sucesión es creciente y acotada por lo tanto, converge a su supremo.

Usando el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} a_n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!}+\ldots+\frac{(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})}{n!}\ , \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})}{3!}+\ldots\\ &\quad+\frac{(1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{n-1}{n+1})}{n!}+\frac{(1-\frac{1}{n+1})\ldots(1-\frac{n}{n+1})}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Puede verse fácilmente que los sumandos de a_{n+1} son mayores o iguales que los respectivos sumandos que forman a_n. Por tanto, $a_n<a_{n+1}$. Para demostrar que la sucesión es acotada basta observar que

$$a_n<2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3\ ,$$

en virtud del ejemplo 2.1.44. Como la sucesión $\{a_n\}$ es acotada y creciente, existe

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Este importante número juega un papel muy importante en análisis y se puede demostrar que es irracional. Distintas aproximaciones de él se pueden obtener calculando a_n para valores grandes de n.

$$e = 2,71828182.....$$

Este ejemplo es una muestra de como el axioma del supremo permite obtener los números irrracionales a partir de sucesiones de números racionales.

2.2. Límites de referencia

Los siguientes límites son los mínimos que Ud. debe conocer y reconocer. Con ellos y los teoremas de operatoria de límites, la mayoría de los límites que Ud. encontrará serán abordables.

1. $\lim_{n\to+\infty} c = c \quad ; c$ constante
2. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
3. Si c es constante:

$$\lim_{n\to+\infty} cn = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad c = 0 \\ +\infty & \text{si} \quad c > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad c < 0 \end{cases}$$

4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$
5. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
6. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad$ si a es una constante positiva.
7. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
8. $\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |r| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad r = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad r > 1 \\ \text{no existe} & \text{si} \quad r \leq -1 \end{cases}$

9. $\lim_{n\to+\infty}(1+r+r^2+\cdots+r^n) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & ;\ \text{si } |r|<1 \\ \\ +\infty & :\ \text{si } r\geq 1 \\ \text{no existe} & :\ \text{si } r\leq -1 \end{cases}$

10. $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

2.2.1. Ejercicios resueltos

1. Calcule los siguientes límites:

   a) $a_n = \dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

   Solución:

   Usando la fórmula $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, el término general de la sucesión puede escribirse como:

   $$a_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$$

   Aplicando los teoremas sobre aritmética de límites, tenemos:

   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

   b) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

   Solución:

   En este caso no se puede usar el teorema 2.1.29, pues nos quedará una forma del tipo $+\infty-\infty$ de lo cual nada puede concluirse. En este caso conviene hacer la siguiente transformación del término general:

   $$a_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ \text{, luego}$$

   $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

   c) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

   Solución:

   Si calculamos en directo el límite de los factores, nos queda algo del tipo $+\infty\cdot 0$, que tampoco nos permite concluir nada. Así debemos transformar el término general:

Como $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,

dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{n}$, nos queda:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}.$$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

d) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Solución:

Usaremos el teorema 2.1.38. Para ello acotaremos superior e inferiormente el término general:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

2. Si $a_n \geq 0$ demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ converge a L. Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_n}$.

Solución:

En este caso el candidato a límite es $\sqrt{L}$. En primer lugar, observemos que $\sqrt{a_n}-\sqrt{L} = \dfrac{a_n - L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}$. En segundo lugar, como $\{a_n\}$ es convergente, ella es acotada inferiormente. Sea m una cota inferior positiva de $\{a_n\}$. Entonces,

$$0 \leq m \leq a_n \text{ implica } \sqrt{m} \leq \sqrt{a_n}.$$

Por otro lado,

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{L} = \sqrt{a_n} - \sqrt{L} \cdot \frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}} = \frac{a_n - L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}.$$

Por tanto,

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{m}+\sqrt{L}}.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que si $n > N$. Entonces $|a_n - L| < \varepsilon(\sqrt{m}+\sqrt{L})$, lo que implica que $(\sqrt{a_n} - \sqrt{L}) \leq \varepsilon$. Lo que nos permite concluir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

3. Demuestre que: Si $a > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

   Solución:

   Supongamos que $a > 1$ y sea $u_n = \sqrt[n]{a}$. Usando propiedades de las potencias de exponente fraccionario tenemos que: $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ implica $u_{n+1} < u_n$. Lo que nos dice que la sucesión $\{u_n\}$ es decreciente. Además, es acotada inferiormente por 1, pues para todo $n \geq 2$,

   $$u_1 = a > u_n > 1.$$

   Por propiedad de las sucesiones monótonas, existe

   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \text{ínf}\,\{u_n :\ n \in \mathbb{N}\} = L \geq 1.$$

   Para probar que $L = 1$, supongamos que $L > 1$, es decir, $L = 1 + h$, donde $h > 0$. Como $L = 1+h < \sqrt[n]{a}$ implica que $(1+h)^n < a$ y usando la desigualdad de Bernoulli (ver observación 2.1.43),

   $(1 + h)^n > 1 + nh$ tenemos que $1 + nh < a$, para cada n. Pero,

   $$+\infty = \lim_{n\to\infty} (1 + nh) < \lim_{n\to\infty} a = a.$$

   Lo que es una contradicción. Por tanto, $h = 0$ y $L = 1$. Si $0 < a < 1$, entonces $\dfrac{1}{a} \geq 1$ y por lo recién probado $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$, es decir,

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} 1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}} = 1,$$

   y de aquí $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

4. Demuestre que la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ converge a 1.

   Solución:

   Como cualquier raíz de un número mayor que uno es mayor que uno, podemos escribir:

   $\sqrt[n]{\sqrt{n}} = 1 + k_n$, donde $k_n \geq 0$ y depende de n. Entonces, usando la desigualdad de Bernoulli (ver observación 2.1.43) tenemos:

   $$\sqrt{n} = (1 + k_n)^n > 1 + nk_n > nk_n,$$

y por tanto, $k_n < \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

$$1 < \sqrt[n]{n} = (1+k_n)^2 = 1 + 2k_n + k_n^2 < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

Por el teorema 2.1.38, podemos concluir que : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

5. La siguiente sucesión definida por recurrencia es una manera de aproximar $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right). \end{aligned}$$

Demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Solución:

Observemos que

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = |\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2}| = |\frac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2a_n}| = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}$$

pues $a_n \geq 0$, para todo n. A su vez $(a_n - \sqrt{2})^2 = \dfrac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^4}{(2a_{n-1)^2}}$. Por inducción se puede demostrar que:

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{(1-\sqrt{2})^{2n}}{2^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

$$(1-\sqrt{2})^{2n} \to 0$$

$$\frac{1}{2^n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} < \frac{1}{2^n} \to 0$$

Así, existe N tal que si $n \geq N$,

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| < \varepsilon.$$

6. Dada la sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{c} \\ a_{n+1} &= \sqrt{c + a_n} \end{aligned}$$

a) Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente

b) Demuestre que si $L = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$, entonces $L + c = L^2$.

c) Demuestre por inducción que $\{a_n\}$ es acotada superiomente por L.

d) Demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$.

Solución:

a) $c > 0 \implies a_n \geq 0$; para todo n. Además, como las cantidades subradicales van creciendo, a_n crece con n,

b) $L^2 = \dfrac{1}{4}\left(1 + 2\sqrt{1+4c} + 1 + 4c\right) = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2} + c = L + c.$

c) $a_1 = \sqrt{c} < L$. Supongamos que $a_n < L$ y demostremos que $a_{n+1} < L$.

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + L} = \sqrt{L^2} = L.$$

Así, vemos que $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por L. Entonces, por propiedad de las sucesiones monotonas, existe $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup a_n = M \leq L$.

d) Como L existe, y

$$\begin{array}{rcll} a_{n+1} & = & \sqrt{c+a_n} & /()^2 \\ a_{n+1}^2 & = & c + a_n & \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1}^2) & = & \lim\limits_{n\to+\infty}(c+a_n) & \iff M^2 = c + M. \end{array}$$

despejando el valor de M tenemos

$$M = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}.$$

Como $M > 0$, $M = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} = L$. En particular, si $c = 2$, entonces $L = 2$.

7. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots,$$

y encontrar su límite, si es que existe.

Solución: Observemos que esta sucesión puede definirse por recurrencia del modo siguiente:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_n &= \sqrt{2a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Demostraremos que (a_n) es una sucesión acotada superiormente por 2 y es creciente. Procediendo por inducción tenemos: $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. Supongamos que $a_{n-1} \leq 2$, entonces $a_n = \sqrt{2a_{n-1}} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$.

Para analizar el crecimiento demostraremos que $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$. En efecto, $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_n}{\sqrt{2a_n}} = \sqrt{\dfrac{a_n}{2}}$. Como $a_n \leq 2$, tenemos que $\dfrac{a_n}{2} \leq 1$ y por lo tanto, $\sqrt{\dfrac{a_n}{2}} \leq 1$. Lo cual equivale a tener que, $a_n \leq a_{n+1}$.

Por propiedad de las sucesiones monótonas, existe $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Esto nos permite calcularlo usando la fórmula de recurrencia: $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, implica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}$, y por consiguiente, $L = \sqrt{2L}$, lo que nos lleva a resolver la ecuación $L^2 - 2L = 0$ que tiene por solución $L = 0$ o $L = 2$. Como la sucesión es creciente y $a_1 \geq 1$, podemos deducir que $L = 2$.

8. ¿ Cúal número es mayor, $1{,}000{,}000^{1{,}000{,}000}$ ó $1{,}000{,}001^{999{,}999}$?

Solución: Si $n = 10^6$, entonces debemos averiguar cuál es el máx $\left\{n^n, (n+1)^{n-1}\right\}$. Para ello estudiaremos el cuociente entre ambos números.

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} \cdot \frac{n+1}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Usando el resultado del ejercicio resuelto 2.1.46 de esta misma sección, tenemos: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$, para todo n. Así,

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < \frac{3}{10^6 + 1} < 1.$$

Por lo tanto, $(n+1)^{n-1} < n^n$. Es decir, $1{,}000{,}000^{1{,}000{,}000} > 1{,}000{,}001^{999{,}999}$.

9. Calcular

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+n)^{4n}}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} 4k^3\right)^n}.$$

Solución: Usando la fórmula de suma de cubos que se demuestra por inducción:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

tenemos: $\sum_{k=1}^{n} 4k^3 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Así,

$$\frac{(1+n)^{4n}}{(\sum_{k=1}^{n} 4k^3)^n} = \frac{(1+n)^{4n}}{(n^2(n+1)^2)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2.$$

El teorema 2.1.29, nos permite concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{4n}}{(\sum_{k=1}^{n} 4k^3)^n} = e^2.$$

10. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+a'n+b'}\right].$$

Solución: Multiplicando y dividiendo la expresión por la suma de las raíces, nos queda:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+a'n+b'} &= \frac{n^2+an+b-(n^2+a'n+b')}{\sqrt{n^2+an+b}+\sqrt{n^2+a'n+b'}} \\
&= \frac{(a-a')n+(b-b')}{\sqrt{n^2+an+b}+\sqrt{n^2+a'n+b'}} \\
&= \frac{(a-a')+\frac{(b-b')}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{a'}{n}+\frac{b'}{n^2}}}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+a'n+b'}\right] = \frac{a-a'}{2}.$$

11. Encontrar el límite de una sucesión que comienza con los números positivos a, b, y que en cada elemento es la media geométrica entre los dos anteriores.

Solución: Sean $a, b, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, \ldots,$. Entonces, tenemos: $u_1 = \sqrt{ab}, u_2 = \sqrt{u_1 b}, \ldots, u_{n-1} = \sqrt{u_{n-3}u_{n-2}}, u_n = \sqrt{u_{n-2}u_{n-1}}$. Multiplicando miembro a miembro las igualdades, nos queda:

$$\begin{aligned} u_1 u_2 \ldots\ldots u_n &= \sqrt{ab^2 u_1^2 u_2^2 \ldots\ldots u_{n-2}^2 u_{n-1}} \\ &= \sqrt{ab^2} u_1 u_2 \ldots\ldots \sqrt{u_{n-1}}. \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos: $\sqrt{u_{n-1}}\, u_n = \sqrt{a\, b^2}$ y tomando límite en esta última igualdad tenemos:

$$L^{1/2} \cdot L = (ab^2)^{1/2},$$

esto es $L^{3/2} = (ab^2)^{1/2}$. Así concluimos que la sucesión converge a $L = \sqrt[3]{ab^2}$.

12. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \right).$$

Solución: Usando la descomposición $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ tenemos que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{n(n+1)} = & \\ = \quad & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \\ & + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ = \quad & 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) \\ & - \frac{1}{n+1} \\ = \quad & 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

13. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} \right).$$

Solución: Como en el ejercicio 12 para calcular este límite se debe descomponer el término general de la suma en fracciones simples o parciales, quedando:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)} = \frac{1}{3k} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{6(k+3)}.$$

Por tanto la suma puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{3\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{6\cdot 4} \\ &+ \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{6\cdot 5} \\ &+ \frac{1}{3\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{6\cdot 6} \\ &+ \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{6\cdot 7} \\ &+ \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{1}{3\cdot n} - \frac{1}{2\cdot (n+1)} + \frac{1}{6\cdot (n+3)}.\end{aligned}$$

Podemos observar que el $\frac{1}{6\cdot 4}$ de la primera línea se compensa con el $\frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{2\cdot 4}$, que resulta de sustraer el $\frac{1}{2\cdot 4}$ de la tercera línea con el $\frac{1}{3\cdot 4}$ de la cuarta línea. Similarmente, el $\frac{1}{6\cdot 5}$ de la segunda línea se compensa con el $\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{2\cdot 5}$ que se obtiene de sustraer el $\frac{1}{2\cdot 5}$ de la cuarta línea al $\frac{1}{3\cdot 5}$ de la quinta línea. Sucesivamente tenemos:

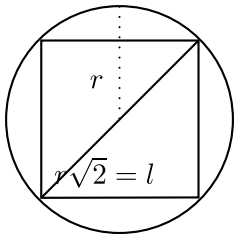
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{3\cdot 1} - \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3} * \\ &+ \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{6(n+3)} \\ &= \frac{12-9+6-6+4}{36} + \frac{1-3}{6(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)} \\ &= \frac{7}{36} - \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{6(n+2)} + \frac{1}{6(n+3)}\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+3)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{6(n+2)}+\frac{1}{6(n+3)}\right)=\frac{7}{36}.$$

14. Dentro de un círculo de radio r se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe un círculo y así sucesivamente. Calcule las sumas de la áreas de los círculos y los cuadrados así obtenidos y suponiendo que el proceso se prolonga indefinidamente.

Solución:



El lado l del primer cuadrado inscrito, usando el teorema de Pitágoras es: $l=r\sqrt{2}$. Si denotamos por A_i el área del círculo i y por a_i el área del cuadrado i, tenemos:

$$A_1=\pi r^2; a_1=2r^2; A_2=\pi\frac{r^2}{2}; a_2=r^2; A_3=\pi\frac{r^2}{4}; a_3=\frac{r^2}{2};\ldots.$$

Por lo tanto, la suma de las áreas de los círculos es:

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=\pi r^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\ldots\right),$$

la que puede ser calculada usando la fórmula de la suma de una serie geométrica que en este caso nos da $2\pi r^2$. Análogamente, la suma total de las áreas de los cuadrados es

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=r^2\left(2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\ldots\right),$$

la cual da $4r^2$.

15. **La sucesión de Fibonacci** . Esta sucesión fue propuesta por Leonardo Fibocacci también conocido como Leonardo de Pisa (1170? - 1250?). Considere la sucesión de números que comienza con 0 y 1; para obtener un número se suman los dos precedentes. Es decir:

$u_0=0;\ u_1=1;\ u_2=0+1=1;\ u_3=1+1=2;\ u_4=1+2=3;\ldots u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$.

a) Demuestre que la sucesión formada por las razones de dos términos consecutivos $x_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ satisface la relación

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}.$$

b) Demuestre que las razones de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, $x_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$, converge y calcule su límite.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{1}{\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}} = \frac{1}{\dfrac{u_{n+1}+u_n}{u_{n+1}}} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{u_n}{u_{n+1}}} = \frac{1}{1+x_n} \end{aligned}$$

b) Como paso previo demostraremos, usando inducción, que $u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 + (-1)^n$, con $n \geq 2$. Si $n = 2$ se tiene $u_3u_1 = 2 \cdot 1 = 2$. reemplazando $n = 2$ en el segundo miembro de la igualdad que queremos demostrar, obtenemos: $u_2^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$. Por lo tanto, la igualdad es válida para $n = 2$. Ahora supongamos que $u_{k+1}u_{k-1} = u_k^2 + (-1)^k$ para todo $k \leq n$ y consideremos

$$\begin{aligned} u_{n+2}u_n &= (u_{n+1}+u_n)u_n \\ &= (u_{n+1}+u_{n-1}+u_{n-2})u_n \\ &= ((u_n+u_{n-1})+u_{n-1}+u_{n-2})u_n \\ &= u_n^2 + 2u_{n-1}u_n + u_{n-2}u_n \\ &= u_n^2 + 2u_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 + (-1)^{n-1}; \quad \text{usando la hipótesis de inducción ;} \\ &= (u_n+u_{n-1})^2 + (-1)^{n-1} \\ &= u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Para analizar la existencia del límite veamos la diferencia entre dos términos

consecutivos

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_{n+2}} \\ &= \frac{u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}u_{n+2}} \end{aligned}$$

Así vemos que la sucesión no es creciente ni decreciente, pero como

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}},$$

la distancia entre los términos de la sucesión tiende a cero, la sucesión tiene un límite que llamaremos L . Según el item anterior,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{1+x_n} \Longrightarrow \\ \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty} x_n} \Longleftrightarrow L = \frac{1}{1+L}\ , \ \Longleftrightarrow L^2 + L - 1 = 0. \end{aligned}$$

Las soluciones de esta última ecuación son $L = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Por ser $x_n > 0$, para todo n , L debe ser un número positivo. Así, $L = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

16. *a*) Demuestre que la sucesión

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

converge a un número L comprendido entre $\dfrac{1}{2}$ y 1.

b) Pruebe que

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

converge y que su límite es el mismo que el de la sucesión (a_n).

c) Demuestre que $\dfrac{37}{60} < L < \dfrac{57}{60}$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2(n+1)n + (2n+1)n - (2n+1)(2n+2)}{2n(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_{n+1} < a_n$, lo que nos dice que la sucesión es decreciente, por otro lado es fácil ver que a_n está acotado inferiormente por $\frac{1}{2}$, la sucesión es convergente. Acotando el término general tenemos que:

$$(n+1)\frac{1}{2n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < (n+1)\frac{1}{n},$$

así, $\frac{1}{2} < a_n < 1 + \frac{1}{n}$. Usando el teorema 2.1.36, tenemos que la sucesión converge hacia un número L tal que $\frac{1}{2} \leq L \leq 1$.

b) Veamos que la sucesión (b_n) es creciente. En efecto,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1) + (2n+1) - 2(2n+1)}{2(2n+1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la sucesión b_n es creciente. Por otro lado es fácil ver que es acotada superiormente por 1, acotando el término general nos queda,

$$n\frac{1}{2n} < b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < n\frac{1}{n},$$

es decir, $\frac{1}{2} < b_n < 1$. Por ser una sucesión creciente y acotada superiormente , ella es convergente. Ahora, $a_n - b_n = \frac{1}{n}$ implica que $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Por lo tanto,
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

c) $L = \text{ínf}\{a_n\} = \sup\{b_n\}$, por lo tanto, $b_n \leq L \leq a_n$, para todo n. En particular, $b_3 \leq L \leq a_3$.

$a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$, $b_3 = +\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$. Así, vemos que:

$$\frac{37}{60} \leq L \leq \frac{57}{60}.$$

Si uno desea obtener otras cotas para L debemos tomar otros n. Por ejemplo, si $n = 4$, $\frac{533}{840} \leq L \leq \frac{743}{840}$.

17. cabeza

a) Demuestre, sin usar el teorema del binomio, que $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y que $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente.

b) Calcule el límite de ambas sucesiones.

Solución:

a) Para estudiar el crecimiento de la sucesión (a_n) demostraremos que el cuociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es mayor que 1. En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
&= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
&> \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \quad \text{(usando la desigualdad de Bernoulli),} \\
&= \frac{n+2}{n+1} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^3} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \\
&> 1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que (a_n) es una sucesión creciente.
Siguiendo la misma técnica para sucesión (b_n), tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\right)^{n+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\
&= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \\
&= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \\
&> \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) \frac{n+1}{n+2}, \text{ (usando la desigualdad de Bernoulli),} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{n^2+2n} > 1.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, (b_n) es decreciente.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = e$, por otro lado tenemos que
$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = e \cdot 1 = e.$

18. Convergencia de la media aritmética.

a) Si $\{a_n\}$ converge a L, entonces la sucesión de las medias aritméticas también converge a L.

b) Demuestre que la propiedad se conserva cuando $L = \pm\infty$.

c) Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

d) Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n}$.

Solución:

a) Sea $L = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Entonces, queremos demostrar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = L$.
Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que si $n \geq N$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$, en particular podemos escribir las $(n-N)$ desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
L-\varepsilon &< a_{N+1} < L+\varepsilon \\
L-\varepsilon &< a_{N+2} < L+\varepsilon \\
\ldots &< \ldots < \ldots \\
L-\varepsilon &< a_n < L+\varepsilon
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades nos queda:

$$(n-N)(L-\varepsilon) < a_{N+1} + \ldots + a_n < (n-N)(L+\varepsilon).$$

Dividiendo toda la desigualdad por n, obtenemos:

$$(L-\varepsilon)\frac{(n-N)}{n} < \frac{a_{N+1} + \ldots + a_n}{n} < \frac{(n-N)}{n}(L+\varepsilon). \tag{2.5}$$

Por otro lado, para N fijo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_N}{n} = (a_1 + \ldots + a_N) \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n}) = 0.$$

Por tanto, para n suficientemente grande,

$$-\varepsilon < \frac{a_1 + \ldots + a_N}{n} < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Sumando (2.5) y (2.6):

$$\frac{(n-N)}{n}(L-\varepsilon) - \varepsilon < \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < (\frac{n-N}{n})(L+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} (\frac{n-N}{n}) = 1$ y usando el teorema 2.1.36 tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n-N)}{n}(L-\varepsilon) - \varepsilon\right] < \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right] < \lim_{n\to\infty} \left[(\frac{n-N}{n})(L+\varepsilon) + \varepsilon\right].$$

$$L - 2\varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right] \leq L + 2\varepsilon$$

$$\left|\left[\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right] - L\right| \leq 2\varepsilon \;\; ; \;\; \text{para } n \text{ suficientemente grande}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) = L.$$

b) Si $L = +\infty$. Entonces, dado $M > 0$, existe N tal que si $n > N$,

$$a_{N+1} > M, \;\; a_{N+2} > M, \ldots$$

sumando miembro a miembro estas desigualdades:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_n > (n-N)M$$

dividiendo la desigualdad por $\frac{1}{n}$, nos queda:

$$\frac{a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_n}{n} > M\frac{n-N}{n}.$$

Considerando que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ y que N está fijo con respecto a n, para n suficientemente grande

$$\frac{a_1 + \ldots + a_N}{n} > -\frac{M}{2}.$$

Por tanto,

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} > (\frac{n-N}{n})M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2} - \frac{N}{n}M,$$

lo que implica:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right) \geq \frac{M}{2} > \frac{M}{3}.$$

Así vemos que,

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}) = +\infty.$$

Si $L = -\infty$, la demostración es análoga.

c) Como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, el límite dado también vale 1.

d) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1 + 2 + \ldots + n}{n}) = \infty$, pues $a_n = n$ diverge a ∞.

19. *a)* Demuestre que si $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = L$, entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = L$.

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \ldots + \frac{1}{n^2})$.

c) Calcule $\lim_{n\to+\infty} \frac{p^n}{n}$ cuando p es un número fijo mayor que 1.

Solución:

a) Sea

$$\begin{cases} b_n = a_n - a_{n-1} & n > 1 \\ b_1 = a_1 \end{cases}$$

Entonces, $\lim_{n\to+\infty} b_n = L$ por hipótesis y según el ejercicio 18,

$$\frac{b_1 + \ldots + b_n}{n} = \frac{a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1})}{n} = \frac{a_n}{n}$$

converge también a L.

b) Definiendo $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, tenemos que $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1}$, sucesión que tiende a 0. Como $\frac{a_n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, usando la parte (a) el límite pedido vale 0.

c) Definiendo $a_n = p^n$, tenemos que $a_{n+1} - a_n = p^n(p-1)$, sucesión que diverge a $+\infty$ y por tanto, $\frac{p^n}{n}$ diverge a $+\infty$.

20. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos.

a) Demuestre que si $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ converge a un número positivo menor que 1, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b) Demuestre que si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ es mayor que 1, entonces $\{a_n\}$ no converge.

c) Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, $\{a_n\}$ puede converger o no. Dé ejemplos de ambas posibilidades.

d) Calcular

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

e) ¿ Para cuáles valores de x, la sucesión $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ converge? Calcule su límite cuando exista.

f) ¿ Para cuáles valores de x, la sucesión $a_n = \frac{n}{x^n}$ converge ?

Solución:

a) Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$, entonces existe $r > 0$ tal que $L < r < 1$. Por definición 2.1.23, existe N tal que si $n \geq N$, entonces $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, lo que implica $a_{n+1} < ra_n$ para todo $n \geq N$. En particular, podemos observar que $a_{N+1} < ra_N$ y $a_{N+2} < ra_{N+1} < r^2 a_N$. En general, $a_n \leq r^{n-N} a_N$, lo que nos dice que la sucesión $(a_{N+n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada por la sucesión $r^n a_N$ que converge a 0, ya que $0 < r < 1$, así $0 \leq a_n \leq r^n a_N$ implica que $0 \leq \lim_{n\to+\infty} a_n \leq 0$.

b) Si $L > 1$, sea r tal que $L > r > 1$, entonces existe N tal que si $n \geq N$ tenemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r > 0$, es decir, $a_{n+1} > ra_n$; $n \geq N$ de modo análogo a la parte previa. Por tanto,

$$a_n > r^{n-N} a_N; \text{ para todo } n.$$

Como $r > 1$ $\lim_{n\to+\infty} r^{n-N} = \infty$ y consecuentemente $\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty$.

c) Si $a_n = \dfrac{1}{n}$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}) = 1$ y a_n converge a 0.

Si $a_n = n$; entonces $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$, por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}) = 1$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

d) $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$; $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{2^n}} = \dfrac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{n+1}{n})^2 = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})^2$. Por lo cual, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{n})^2) = \dfrac{1}{2} < 1$, lo que implica $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

e) $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$; así $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} = \dfrac{x^{n+1} \cdot n!}{x^n(n+1)!} = \dfrac{x}{n+1}$ implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ 0. Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

f) Para $a_n = \dfrac{n}{x^n}$ tenemos que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{x^{n+1}} \cdot \dfrac{x^n}{n} = \dfrac{1}{x}(1+\dfrac{1}{n})$.

Así, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{x} < 1$ cuando $x > 1$. Por tanto, si $x > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{x^n} = 0$; si $x < 1$, $\dfrac{n}{x^n}$ diverge, si $x = 1$, $a_n = n$ que diverge a ∞.

2.2.2. Ejercicios propuestos

Calcular los límites cuando existan, de las sucesiones con término general a_n.

1. $a_n = \dfrac{n^3 - 2n + 2}{n^5 + 8n}$
2. $a_n = \dfrac{5n^4 + 3n^2 - 4}{3n^3 - 1}$
3. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
4. $a_n = \sqrt[n]{n+1}$
5. $a_n = \sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+3}$
6. $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

7. $a_n = \dfrac{n}{10} - \left[\dfrac{n}{10}\right]$

8. $a_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots + \dfrac{1}{3^n}$.

9. $a_n = 1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{125} + \dfrac{1}{625} + \ldots + (-1)^n \dfrac{1}{5^n}$.

10. $a_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + \ldots + 3^n$.

11. Usando el ejercicio resuelto 10, calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^2 + 5n - 2} - \sqrt{n^2 - 6n + 8}\right].$$

12. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+2)}\right).$$

Indicación: Ver el ejercicio resuelto 12.

13. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}\right).$$

Indicación: Ver el ejercicio resuelto 13.

14. Demuestre que la sucesión $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$ tiene límite $\dfrac{1}{k!}$, donde k es un entero fijo.

15. Dados los primeros términos de la sucesión, encuentre usando recurrencia, el término general a_n. Luego, analice la existencia del límite y calcúlelo cuando exista.

    a) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots,$

    b) $\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ldots,$

    c) $\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, \ldots,$

16. Demuestre que la sucesión (a_n) definida por:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}; \text{si } n > 2; \end{aligned}$$

es tal que $a_n - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}$ y calcule su límite.

17. Sea x un número real fijo, demuestre que la sucesión:

$$\left(\frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge y su límite es $\dfrac{x}{2}$.

Indicación: Este límite puede ser calculado por acotamiento, usando que $y-1\leq[y]\leq y$, cualquiera sea el número real y.

18. Demuestre que

$$\left(\frac{[nx]}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge a x.

Indicación: Este límite puede ser calculado por acotamiento, usando que $nx-1\leq[nx]\leq nx$, cualquiera sea el número real x.

19. Demuestre que 5^n-n diverge hacia $+\infty$.

20. Pruebe una propiedad análoga a la del ejercicio 18 para la media geométrica de una cantidad finita de números.

    a) Si $a_n>0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L$, L puede ser finito o ∞, entonces

    $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=L.$$

    b) Si $a_n>0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$ entonces, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

    c) Demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

    d) Demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$.

    e) Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

21. *a*) Pruebe que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$ y si la sucesión $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_n=0$.

    b) Muestre con ejemplos que si $\{b_n\}$ no es acotada no se tiene la conclusión de (a).

22. *a*) Si $0<y\leq x$ y si $a_n=(x^n+y^n)^{\frac{1}{n}}$ demuestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=x$.

b) Calcule $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

c) Calcule $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(4^n+5^n)}$.

23. Analizar la convergencia de la sucesión $\dfrac{1}{1+x^{2n}}$, según sea el valor de x.

24. Dado $a>0$ y $x_1>0$ cualquiera, demuestre que la sucesión definida por recurrencia $x_{n+1}=\dfrac{x_n+\frac{a}{x_n}}{2}$ converge a $\sqrt{a}$.

2.3. Las funciones numéricas de variable continua

2.3.1. Definiciones básicas

Dado que $\mathbb{R}$ o un intervalo de $\mathbb{R}$ es la imagen abstracta de una magnitud que varía continuamente, tomaremos intervalos para establecer ciertas relaciones entre magnitudes que llamaremos funciones numéricas de variable continua.

Definición 2.3.1 Sea I un intervalo y sea $x \in I$. Si mediante una cierta regla establecemos una correspondencia de modo que a cada x en el intervalo le corresponda un único $y \in \mathbb{R}$, decimos que y es una función numérica de x, lo que denotaremos como:

$$x \longmapsto y \quad \text{o} \quad x \longmapsto y(x) \quad \text{o} \quad x \longmapsto f(x) \quad \text{o} \quad y = f(x).$$

f simboliza a la función , x es la **variable independiente** e y es la **variable dependiente**.

Definición 2.3.2

i) Al conjunto $D(f)$=$\{x \in I$: existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ $\}$ se le llama **dominio** de la función.

ii) Al conjunto $R(f)$= $\{y \in \mathbb{R}$: existe $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$ $\}$, se le llama **recorrido** de f o conjunto de valores de la función f.

iii) Al conjunto $G(f)$= $\{(x, y) \in D(f) \times R(f) : y = f(x)$ $\}$, se le llama **gráfico** de f.

Ejemplos:

1. **La función constante:** Es aquella que a cada $x \in I$ le hace corresponder un mismo número c, en símbolos, se escribe $f(x) = c$.

2. **La función lineal no constante:** Es aquella que a cada $x \in I$ le hace corresponder el número $ax + b$, con a, b constantes, $a \neq 0$, es decir, $f(x) = ax + b$.

3. **La función cuadrática:** Es aquella que a cada $x \in I$ le hace corresponder el número $f(x) = ax^2 + bx + c$; con a, b, c constantes y $a \neq 0$.

4. **La función polinomial:** Es aquella que hace corresponder a cada $x \in I$ el número $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, donde los a_i son constantes.

5. **La función racional:** Es aquella que se obtiene mediante cuocientes de polinomios, es decir:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

En este caso debemos observar que para aquellos x tal que $q(x) = 0$, $f(x)$ no está definida . Por tanto el dominio de una función racional lo constituye
$\mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Definición 2.3.3 Se dice que dos funciones f y g son iguales sí y solo sí se cumplen las condiciones siguientes

- $D(f) = D(g) = D$.
- $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$.

En tal cso escribiremos $f = g$, en caso contrario escribiremos $f \neq g$ para señalar que f y g no son iguales.

Ejemplo 2.3.4

1. $f = \sqrt{x-1}$ y $g = \sqrt{|x-1|}$ no son iguales porque tienen dominios distintos; $D(f) = [1 + \infty[$, $D(g) = \mathbb{R}$.
2. Dos funciones polinomiales son iguales si tienen el mismo grado y los respectivos coeficientes iguales.
3. $f = \sqrt{(x-1)(x+3)}$ y $g = \sqrt{x-1}\sqrt{x+3}$ no son iguales porque tienen dominios distintos; $D(f) =]-\infty, -3] \cup [1 + \infty[$, $D(g) = [1, +\infty[$.

Observación: Podemos extender algunas de las propiedades de los números a las funciones, por ejemplo, podemos establecer una aritmética de funciones, podemos comparar funciones, estudiar si es acotada, si tiene máximos y mínimos, etc.

Definición 2.3.5 Dadas dos funciones numéricas f y g, se definen las siguientes funciones cuyo dominio es $D(f) \cap D(g)$:

(i) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

(ii) $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$; cuando $g(x) \neq 0$.

Definición 2.3.6 Dadas dos funciones numéricas f y g, diremos que:

(i) $f = g$ si $D(f) = D(g)$ y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

(ii) $f < g$ si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in D(f) \cap D(g)$.

Ejemplo:

1. Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ definidas sobre $I = [0, 1]$; usando las propiedades de los números reales tenemos que para todo $x \in [0, 1]$, $0 < x^2 < x$. Por tanto $g(x) < f(x)$, para todo $x \in I$. Es decir, $f < g$ sobre $[0, 1]$.

2. Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ definidas sobre $J = [1, 2]$; usando las propiedades de los números reales tenemos que para todo $x \in [1, 2]$, $x^2 > x$. Por tanto $g(x) > f(x)$, para todo $x \in J$. Es decir, $g > f$ sobre $[1, 2]$.

Definición 2.3.7 Diremos que la función f es **acotada** , si su recorrido es un conjunto acotado, es decir, si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in D(f)$.

Ejemplo:

1. La función $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ definidas sobre $I = [0, 1]$ son acotadas, puesto que para todo $x \in [0, 1]$, $0 < x^2 < x \leq 1$. Cualquier número $M \geq 1$ satisface la definición.

2. En cambio, si $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son definidas sobre $\mathbb{R}$, no son acotadas.

Definición 2.3.8 Dada una función f diremos que:

1. f es **estrictamente creciente** en un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.

2. f es **creciente en sentido amplio o creciente** sobre un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

3. f es **estrictamente decreciente** sobre un intervalo sobre un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.

4. f es **decreciente en sentido amplio o decreciente** sobre un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$.

5. f es **monótona** sobre I si es creciente o decreciente.

Por cierto la mayoría de las funciones presentan cierto tipo de monotonía a tramos, es decir, sobre un intervalo son crecientes y sobre otro son decrecientes, por esta razón es interesante estudiar **las variaciones de una función**, es decir, averiguar sobre qué parte del dominio son crecientes o decrecientes.

Ejemplo:

1. La función:

$$\begin{aligned} f : [-3, 3] &\longmapsto \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

es estrictamente decreciente sobre el intervalo $[-3, 0]$ y es estrictamente creciente sobre $[0, 3]$.

2. **Definición 2.3.9** Dado $x \in \mathbb{R}$, se define la **parte entera de** x , como el número entero m, que es el mayor entero menor o igual que x. Este número se denota por $[x]$. Es decir:

$$[x] \in \mathbb{Z} \text{ y si } n \in \mathbb{Z} \text{ es tal que } \ n \leq x, \text{ entonces } n \leq [x].$$

Por ejemplo, [3,2] = 3, [−3,2] = −4.

La función parte entera $h : x \longmapsto [x]$ es creciente y, en particular, es constante a tramos.

Si $x \in [n, n+1)$, entonces $[x] = n$, para todo n entero.

Así, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$ si x_1 ; $x_2 \in [n, n+1)$; para algún entero n. En cualquier otro caso $f(x_1) < f(x_2)$.

3. La función

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

No es creciente ni decreciente en ningún intervalo.

4. Una situación análoga se tiene con la función:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Definición 2.3.10 Sea f una función numérica no constante, I un intervalo contenido en el dominio de f y x_0 un punto de I. Diremos que f tiene:

(i) un **cero** en x_0 cuando $f(x_0) = 0$.

(ii) un **máximo** en x_0, con valor $f(x_0)$, cuando para todo $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$.

(iii) un **mínimo** en x_0, con valor $f(x_0)$, cuando para todo $x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$.

(iv) un **extremo** en x_0, cuando f tiene ya sea un máximo o un mínimo en x_0.

Ejemplo:

1. Consideremos la función:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ f(x) = x^2 - 4 \ .$$

a) Como $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 4 = 0$. Entonces los ceros de la función son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

b) Usando las desigualdades estudiadas en la primera sección, podemos ver que $f(x) < 0$ cuando $-2 < x < 2$ y para todos los otros valores de x, la función es positiva. Por tanto, su valor mínimo lo alcanza en el intervalo $[-2, 2]$. Como el cuadrado de un número y su inverso aditivo tienen el mismo cuadrado, basta analizar lo que sucede en $[0, 2]$. Usando propiedades de las potencias, sabemos que el cuadrado crece con el número, así podemos sospechar que el mínimo lo alcanza en $x = 0$, donde $f(0) = -4$.

En efecto, si $x \in (0, 2)$,entonces $0 < x < 2$ y por tanto $0 < x^2 < 4$. Restando -4 a la última desigualdad, tenemos, $-4 < x^2 - 4 < 0$. Esto nos dice que, $f(0) < f(x)$, para todo $x \in (0, 2)$. Lo mismo sucede en $(-2, 0)$ y como en el resto del dominio la función es positiva, $f(0) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En síntesis, la función alcanza su valor mínimo, -4, en $x = 0$.

c) La función no tiene máximo. Por reducción al absurdo supongamos que f tiene un máximo en algún x_0. Entonces, $f(x) < f(x_0)$; para todo $x \in \mathbb{R}$. Si hacemos $M = \text{máx}\{f(x_0), 4\}$ tendríamos que $\mid f(x) \mid < M$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Lo que implicaría que $x < \sqrt{M + 4}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y por tanto $\mathbb{R}$ sería acotado superiormente, contradiciendo lo visto en la primera sección.

2. Sea la función $g(x) = -x^2 + 4$ sobre $[-2, 2]$. g es positiva en $(-2, 2)$ y $g(-2) = g(2) = 0$, en los puntos $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ la función alcanza su valor mínimo.

Definición 2.3.11 Diremos que una función f es **periódica**, si existe un $T \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x + T) = f(x) \ , \tag{P}$$

para todo $x \in D(f)$. Al menor de los números positivos T, que cumplen con (P), se le llama **período** de f.

Ejemplo: La función $f(x) = x - [x]$, es periódica de período 1.

Definición 2.3.12 Una función f se dice:

i) **par** , si $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D(f)$.

ii) **impar** , si $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D(f)$.

Ejemplos:

1. Toda función del tipo $f(x) = x^k$; con k un entero par, es función par.

2. Toda función del tipo $f(x) = x^n$; con n impar, es función impar.

Definición 2.3.13 Sean I y J intervalos. Sean f y g funciones numéricas tales que $D(f) = I$, $D(g) = J$ y $R(f) \subset J$. Entonces la función compuesta de f con g, denotada, $g \circ f$ está definida por:

(i) $D(g \circ f) = I$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para todo x en I.

Ejemplo:
Si $f : x \longmapsto x^2 + 1$ y $g : x \longmapsto \mid x \mid$, entonces
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \mid x^2 + 1 \mid$.

Definición 2.3.14 Una función $f : I \longrightarrow J$ se dice **sobreyectiva** si y sólo si $R(f) = J$.

Ejemplo:

1. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \longmapsto x^2$ no es sobreyectiva, pues $R(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

2. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \longmapsto x^3$ es sobreyectiva, pues dado cualquier real y siempre existe $\sqrt[3]{y}$, según lo visto en la sección 1.1 de modo que $f(\sqrt[3]{y}) = y$.

Es importante observar que *toda función es sobreyectiva sobre su recorrido.*

Definición 2.3.15 Una función f se dice **uno a uno** o **inyectiva** sobre un intervalo I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 \neq x_2$ se tiene $f(x_1) \neq f(x_2)$. Equivalentemente, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Ejemplos:

1. La función constante no es inyectiva en ningún intervalo de $\mathbb{R}$, pues $f(x_1) = f(x_2)$ aun cuando $x_1 \neq x_2$.

2. La función lineal no constante $f(x) = ax + b$ es inyectiva sobre todo $\mathbb{R}$, pues si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. La función cuadrática $f(x) = x^2$, no es inyectiva sobre $\mathbb{R}$, pero sí lo es separadamente sobre $\mathbb{R}^+$ o $\mathbb{R}^-$.

La importancia de las funciones inyectivas sobre un intervalo I es que ellas tienen **función inversa** sobre su recorrido. Es decir, si f es inyectiva sobre I, entonces existe la función f^{-1} definida sobre $R(f)$, con valores en I de modo que

$$f o f^{-1} = I\!I_{R(f)}$$

$$f^{-1}of = \mathbb{I}_I$$

donde $\mathbb{I}_A$ es la función idéntica sobre el conjunto A, es decir, aquella que a cada $x \in A$ le asigna el mismo $x \in A$; $\mathbb{I}_A(x) = x$.

Además, es muy posible que algunas funciones sean inyectivas en algún subintervalo de su dominio, entonces restringiendo su dominio ellas pueden invertirse.

Ejemplo:

1. Hemos visto que la función lineal no constante es inyectiva sobre $\mathbb{R}$:

   $$f : x \longmapsto ax + b$$

   para encontrar f^{-1} se debe despejar la variable independiente en la ecuación $y = ax + b$, lo cual nos da para x el valor en función de y, así tenemos,

   $$x = \frac{y - b}{a}$$

   pero, para presentar la función f^{-1}, debemos retomar la convención que x es la variable independiente. En este caso,

   $$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$

   verifiquemos que $fof^{-1}(x) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$:

   $$fof^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-b}{a}\right) = a\left(\frac{x-b}{a}\right) + b = x$$

   Del mismo modo:

   $$f^{-1}of(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(ax + b) = \frac{(ax + b) - b}{a} = x$$

2. La función cuadrática $f(x) = x^2$, la podemos invertir sobre $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

   Sea $y \geq 0$ y consideremos $y = x^2 \iff y - x^2 = 0 \iff (\sqrt{y} - x)(\sqrt{y} + x) = 0$ de donde se tiene $x = \pm\sqrt{y}$, pero como nos hemos restringido a $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, x sólo puede tomar el valor $\sqrt{y}$.

   Por lo tanto:

   $$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longmapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
   $$x \longmapsto \sqrt{x}$$

Observación: De todos los ejemplos vistos se puede deducir que **las propiedades que puede tener una función depende fuertemente del dominio**, por tal razón es de suma importancia determinar el dominio de una función.

2.3.2. Representación gráfica de funciones

Podemos establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, usando la continuidad de $\mathbb{R}$ como el continuo geométrico de la recta.

La posición de un punto en el plano se puede determinar mediante dos cantidades llamadas coordenadas del punto. Eligiendo dos rectas perpendiculares, con intersección en el punto O, las coordenadas de un punto P son las distancias del punto a las dos rectas, que son a su vez las proyecciones ortogonales del trazo OP sobre los ejes. De esta manera, se determina, sobre cada eje un punto N y M.

Como cada punto M, N se puede identificar con un número real, tenemos que a todo punto P le corresponde dos números reales, con los cuales podemos formar un par ordenado (M, N) , en que a la primera componente se la llama **abscisa** y a la segunda se le llama **ordenada** del punto P.

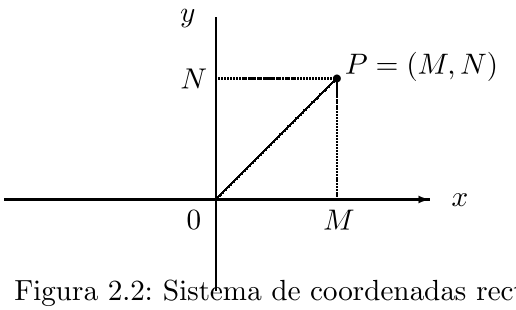


Figura 2.2: Sistema de coordenadas rectangulares

Una vez que sabemos determinar la posición de un punto en el plano, es natural concebir la idea de poder representar el gráfico $G(f)$ de una función f como una curva en el plano.

Para tener una idea del gráfico de una función debemos encontrar una cantidad suficiente de puntos de $G(f)$, lo que tradicionalmente se llama una tabla de valores.

Ejemplo:

1. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

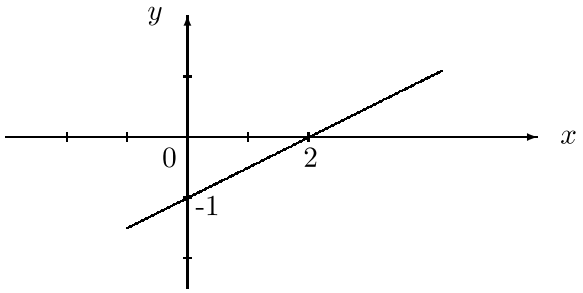


Figura 2.3: Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

2. $f(x) = x^2 - 1$

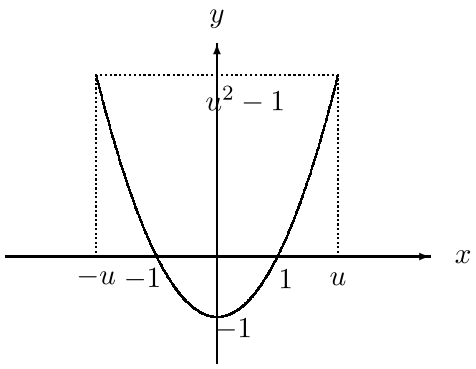


Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = x^2 - 1$

3. $f(x) = x - [x]$

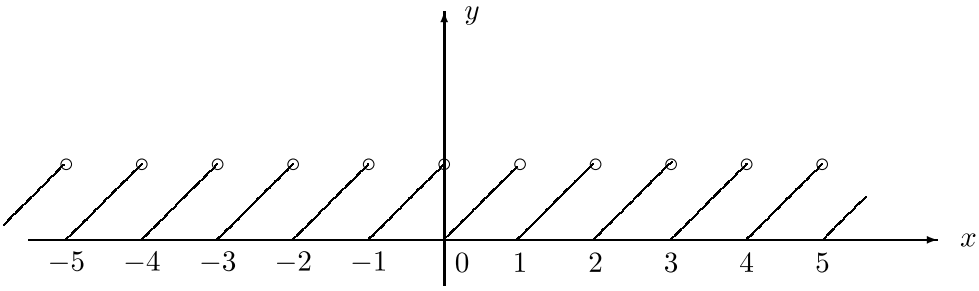


Figura 2.5: Gráfico de $f(x) = x - [x]$

Observaciones:

1. En general una tabla de valores sólo sirve cuando la función tiene un comportamiento relativamente simple, de lo contrario, se requieren técnicas más elaboradas que se irán desarrollando más adelante.

2. Muchas propiedades de las funciones pueden ser interpretadas geométricamente con la ayuda del sistema de coordenadas.

   a) El gráfico de una función par es simétrico con respecto al eje Y.

   b) El gráfico de una función impar es simétrico con respecto al origen.

c) El gráfico de una función y de su función inversa son simétricos con respecto a la recta $y = x$. Pues,

$$(u, v) \in G(f) \iff f(u) = v \iff f^{-1}(v) = u \iff (v, u) \in G(f^{-1})$$

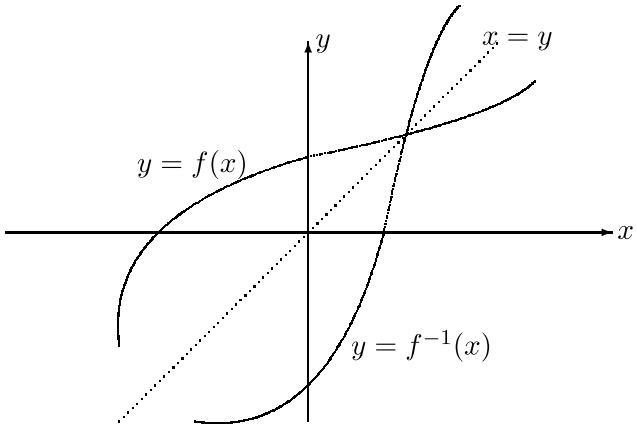


Figura 2.6: Gráfico de f y su inversa f^{-1}

2.3.3. Ejercicios resueltos

1. Sea$f(x)$ = signo de x que se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Grafique las siguientes funciones:

a) $f(x), [f(x)]^2, 1 - f(x)$.

b) $h(x) = f\left(3 - \dfrac{2}{|x|}\right)$.

Solución:

a) Gráfico de $f(x)$.

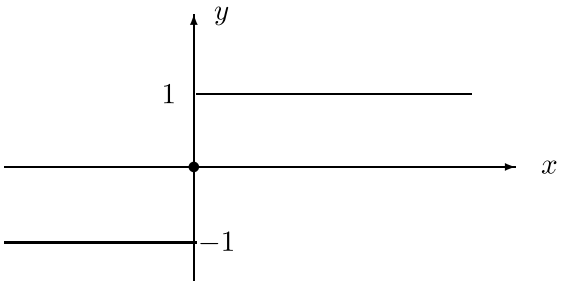


Gráfico de $[f(x)]^2$.

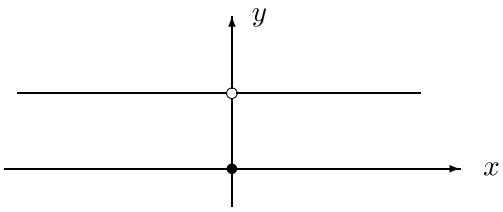
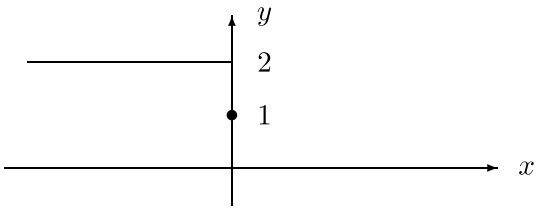


Gráfico de $1 - f(x)$.

$$1 - f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



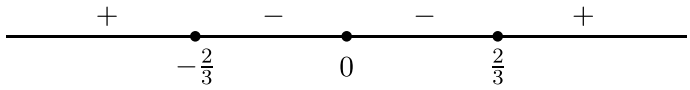
b)

$$g(x) = 3 - \frac{2}{|x|} = \begin{cases} 3 - \frac{2}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \text{no está definida} & \text{si} \quad x = 0 \\ 3 + \frac{2}{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

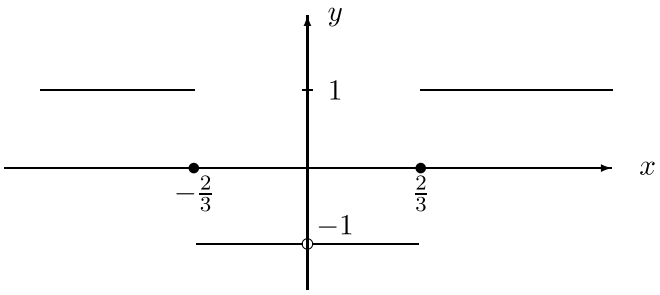
Si $x > 0$. $3 - \frac{2}{x} > 0$ es equivalente a $x > \dfrac{2}{3}$. Si $x < 0$. $3 + \frac{2}{x} > 0$ es equivalente

a $x < -\dfrac{2}{3}$.

$g(x)$ se anula en $x = \pm\dfrac{2}{3}$. Por tanto, el signo de $g(x)$ se distribuye de la siguiente forma:



Esto nos dice que el gráfico de $f(g(x))$ es:



2. Si $a < b < c$, graficar

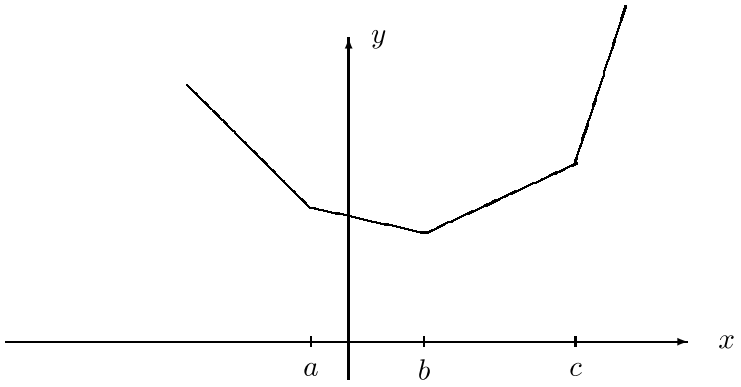
$$f(x) = |x - a| + |x - b| + |x - c|.$$

Solución: Según el ejercicio resuelto 12 de la subsección 1.3 tenemos que:

3.

$$f(x) = \begin{cases} -3x + a + b + c & \text{si} \quad x \leq a \\ -x - a + b + c & \text{si} \quad a < x \leq b \\ x - a - b + c & \text{si} \quad b < x \leq c \\ 3x - a - b - c & \text{si} \quad c < x. \end{cases}$$

Por tanto, su gráfico es la línea poligonal:



4. Sea $h(x) : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \{x\} = \text{ la distancia de x al entero más próximo.}$$

a) Calcular $h(0), h(1), h(\frac{1}{2}), h(\frac{1}{4}), h(\frac{3}{4}), h(\frac{1}{3}), h(\frac{2}{3})$.

b) Graficar h.

c) Extienda gráficamente h a todo $\mathbb{R}$.

Solución:

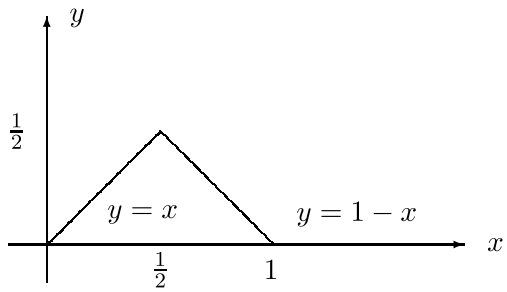
a) $h(0) = 0, h(1) = 0, h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, h(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}, h(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}, h(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}, h(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$.

b) Si $x \in [0, \frac{1}{2})$ el entero más cercano a x es el cero y la distancia entre ellos es igual a x.

$x = \frac{1}{2}$ está a la misma distancia del cero y del uno, y ésta es $\frac{1}{2}$.

Si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ el entero más cercano a x es 1 y la distancia de x a 1 es $1 - x$.

Por tanto, sobre el intervalo $[0, \frac{1}{2})$, el gráfico de $h(x)$ es el segmento de la recta $y = x$ y sobre $[\frac{1}{2}, 1]$ el gráfico es el segmento de la recta $1 - x$.



c) En cada intervalo $[n, n+1]$, el análisis es el mismo que en $[0,1]$, por tanto, la función se repite periódicamente.

5. Dada la función g de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q}, (p,q) = 1. \end{cases}$$

a) Calcule $g(0), g(1), g(\frac{1}{2}), g(\frac{1}{4}), g(\frac{2}{4}), g(\frac{3}{4}), g(\frac{4}{4}), g(\frac{1}{3}), g(\frac{2}{3}), g(\frac{4}{3}), g(\frac{5}{3})$.

b) Calcule la imagen inversa de $\{\frac{1}{3}\}$.

c) Calcule la imagen inversa de $\{\frac{1}{q}\}$.

d) Grafique g.

Solución:

a) Calcule $g(0) = 0, g(1) = 1, g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}, g(\frac{2}{4}) = \frac{1}{2}, g(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$, $g(\frac{4}{4}) = g(1) = 1, g(\frac{1}{3}) = g(\frac{2}{3}) = g(\frac{4}{3}) = g(\frac{5}{3}) = \frac{1}{3}$.

b) $g^{-1}(\frac{1}{3}) = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$.

c) $g^{-1}(\frac{1}{q}) = \left\{\frac{p}{q}; (p,q) = 1, 0 < p < q\right\}$.

d) Su gráfico es

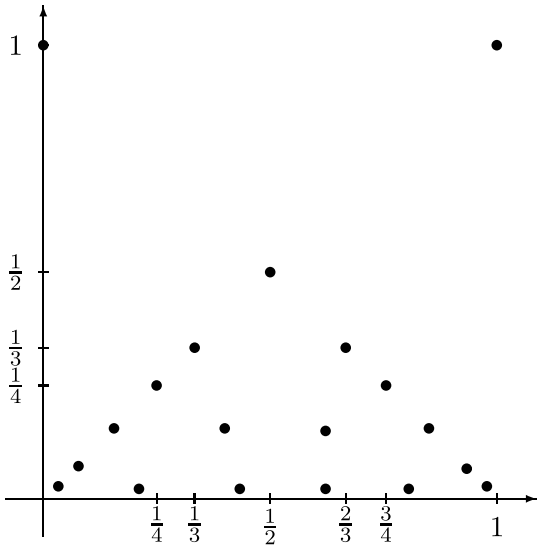


Figura 2.7: Gráfico de g

6. Bosqueje el gráfico de las funciones

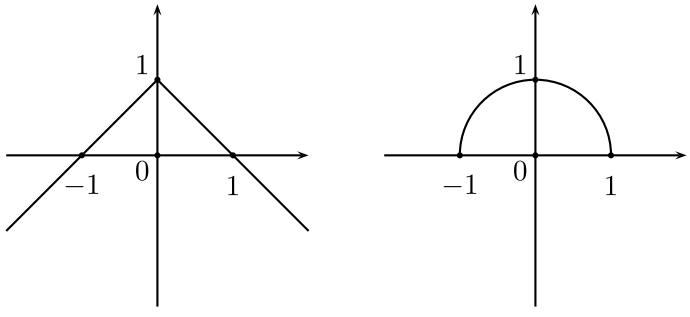
   a) $f(x) = 1 - |x|$.

   b) $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$.

   Solución:

   a) Si $x > 0$, entonces $f(x) = 1 - x$. Si $x < 0$, entonces $f(x) = 1 + x$. $f(0) = 0$. Su gráfico son dos semirrectas como lo muestra la figura.

   b) Del gráfico de f vemos que $1 - |x| \geq 0$ es el intervalo $[-1, 1]$,
   por tanto $D(g) = [-1, 1]$. Dado que $1 - x$ es decreciente en $[0, 1]$ también lo es $\sqrt{1 - x}$. Sobre $[-1, 0]$, el crecimiento de $1 + x$ implica el crecimiento de $\sqrt{1 + x}$. Así, los gráficos de f y g son:



7. Determine el dominio y el recorrido de cada una de las siguientes funciones:

   a) $\sqrt{x+1}$

   b) $\sqrt{x^2+1}$

   c) $\sqrt{x^2-1}$

   d) $\sqrt{1-x^2}$

   e) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

   Solución:

   a) Para determinar el dominio debemos analizar los valores de x que hacen de $\sqrt{x+1}$ un número real.

   $$\sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \iff x+1 \geq 0 \iff x \geq -1.$$

   Por tanto, $D(f) = [-1, \infty)$.

   Para encontrar el recorrido, debemos despejar x en la ecuación que define la función.

   $y = \sqrt{x+1} \iff y^2 = x+1$ y $y \in [0, \infty)$. Entonces, cualquiera sea $y \in [0, \infty)$, $x = y^2 - 1$ pertenece al dominio, por lo cual $R(f) = [0, \infty)$.

   b) Sabemos de las propiedades de los números reales que x^2 es positivo o nulo, por lo que $x^2+1 \geq 0$ para todo x, por tanto el dominio de la función $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ es $\mathbb{R}$. Por la misma razón y como x^2 no es acotada superiormente como vimos en un ejemplo, el recorrido de la función es $[1, \infty)$.

   c) Sea $g(x) = \sqrt{x^2-1}$. Según lo visto en la primera sección tenemos que, $x^2 - 1 \geq 0 \iff (x+1)(x-1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Así $D(h) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ y $R(h) = [0, \infty)$.

   d) Similarmente tenemos que $\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R} \iff 1 - x^2 \geq 0$. Por tanto $D(g) = [-1, 1]$ y $R(g) = [0, 1]$.

   e) La función $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ tiene por dominio $(-1, \infty)$, como puede deducirse a partir de la parte (a) y su recorrido es $(0, \infty)$.

8. Estudiar las variaciones de las funciones x, x^2 y $\sqrt{x}$, sobre $[0, \infty)$. Graficarlas en un mismo diagrama y deducir que:

   Si $x \in (0, 1)$ entonces $x^2 < x < \sqrt{x}$. Si $x \in (1, \infty)$ entonces $x^2 > x > \sqrt{x}$.

Solución:

Es fácil verificar que las tres funciones son crecientes y toman valores no negativos en todo su dominio. Todas valen 0 en $x = 0$ y valen 1 en $x = 1$, pero su crecimiento difiere en la rapidez con que se da. Con la ayuda de una pequeña tabla de valores podemos bosquejar el gráfico siguiente:

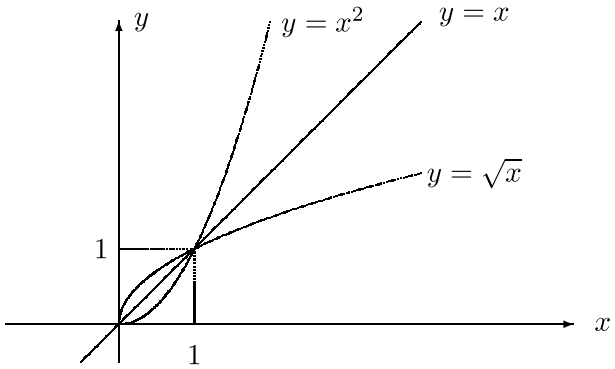


Figura 2.8: Gráficos de $y = x$, $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$

9. Dada la función numérica

$$f : x \longmapsto \frac{x + a}{(x - a)(x - b)}$$

Calcule a y b sabiendo que $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$ y que el gráfico de f pasa por el punto $(3, \frac{2}{5})$.

Solución: Si $(3, \frac{2}{5}) \in G(f)$, entonces,

$$\frac{3 + a}{(3 - a)(3 - b)} = \frac{2}{5}$$

Lo cual es equivalente a $11a + 6b - 2ab = 3$. Una solución a esta ecuación es $a = 1$ y $b = -2$. En este caso

$$f(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 2)},$$

cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{1, -2\}$. Valores distintos de a y b satisfacen $11a + 6b - 2ab = 3$ pero no la condición $D(f) = \mathbb{R} - \{1, -2\}$ ya que $D(f) = \mathbb{R} - \{a, a\}$.

10. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$.

   a) Calcule: $f(10)$, $f(10^2)$, $f(10^3)$, $f(10^4)$, $f(-10)$, $f(-10^2)$, $f(-10^3)$, $f(-10^4)$.

b) ¿ Para qué valores positivos de x se tiene que $0 <| \frac{1}{x} |< 10^{-5}$?

c) ¿ Para qué valores positivos de x se tiene que $0 <| \frac{1}{x} |< 10^{-50}$?

d) ¿ Para qué valores positivos de x se tiene que $0 <| \frac{1}{x} |< \epsilon$? Donde ϵ es un número positivo cualquiera dado previamente.

e) ¿ Para qué valores negativos de x se tiene que $0 <| \frac{1}{x} |< 10^{-3}$?

f) ¿ Para qué valores negativos de x se tiene que $0 < |\frac{1}{x}| < 10^{-30}$?

g) ¿ Para qué valores negativos de x se tiene que $0 <| \frac{1}{x} |< \epsilon$?

h) ¿ Qué condición debe satisfacer x para que la distancia entre $f(x))$ y 0 sea cada vez menor ?

Solución:

a) $f(10) = \dfrac{1}{10}$, $f(10^2) = \dfrac{1}{100}$, $f(10^3) = \dfrac{1}{1000}$, $f(10^4) = \dfrac{1}{10^4}$.
$f(-10) = \dfrac{-1}{10}$, $f(-100) = \dfrac{-1}{100}$, $f(-10^3) = \dfrac{-1}{10^3}$, $f(-10^4) = \dfrac{-1}{10^4}$.

b) Si $x > 0$ entonces $\dfrac{1}{x} > 0$. Por tanto $|\dfrac{1}{x}| = \dfrac{1}{x}$. Tenemos:
$0 < \frac{1}{x} < 10^{-5} \iff 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{10^5} \iff x > 10^5$.

c) Del mismo modo para que $0 < |\dfrac{1}{x}| < \dfrac{1}{10^{50}}$ es equivalente a pedir que $|x| > 10^{50}$.

d) Si ϵ es un número positivo cualquiera y $x > 0$:

$$0 < \frac{1}{x} < \epsilon \iff x > \frac{1}{\epsilon}$$

e) Si $x < 0$ entonces $\frac{1}{x} < 0$ y $|\dfrac{1}{x}| = -\dfrac{1}{x}$. Así,
$-\frac{1}{x} < 10^{-3} \iff -\frac{1}{x} < \frac{1}{10^3} \iff -x > 10^3 \iff x < -10^3$.

f) Del mismo modo se obtiene que $x < -10^{30}$.

g) El mismo razonamiento se repite para concluir que $x < -\dfrac{1}{\epsilon}$.

h) De los tres últimos pasos podemos deducir que, para que la distancia entre $f(x)$ y el 0 disminuya, x debe crecer.

11. Estudiar la variación de la función $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$.

Solución:

Si $x \in [0, 1)$ entonces $[x] = 0$, tenemos que $D(f) = \mathbb{R} - [0, 1)$.

Sea n un número natural, si $x \in [n, n+1)$ entonces $f(x) = \frac{x}{n}$. Es decir, sobre cada intervalo $[n, n+1)$ es un fragmento de recta y por tanto creciente. Pero, como $\frac{1}{n}$ decrece a medida que n crece, la inclinación de cada fragmento es cada vez menor y en cada $x = n$ la función tiene un salto.

Para x negativo. Si $x \in [-1, 0)$ entonces $[x] = -1$ por tanto, $f(x) = -x$. Así f es decreciente sobre $[-1, 0)$. En general, en los intervalos del tipo $[-(n+1), -n)$ $f(x) = \dfrac{x}{-(n+1)}$. Como $\dfrac{1}{n+1}$ decrece cuando n crece, tenemos una situación parecida a la rama positiva, los fragmentos de recta, que en este caso están en forma decreciente, se van poniendo cada vez más en forma horizontal.

El gráfico de esta función es el siguiente:

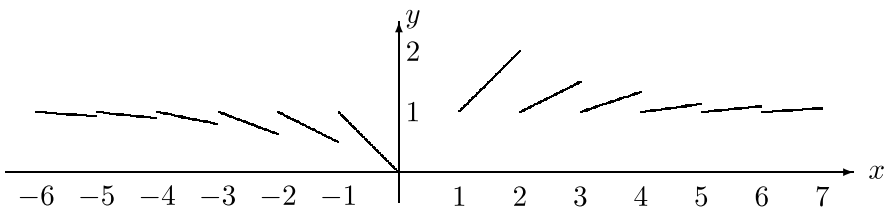


Figura 2.9: Gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$

12. Recuerde que si x es pequeño, x^2 es más pequeño aún. Entonces puede ser razonable despreciar x^2 y aproximar $(1+x)^2$ por $1+2x$.

   a) ¿ Qué error se comete al reemplazar $(1+x)^2$ por $1+2x$?

   b) ¿ Cómo elegir x para que el error sea inferior a: 10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-5} ?

   c) Calcule aproximadamente sin usar calculadora, $(1,0381)^2$, $(1,0056)^2$ con un error menor que 10^{-2}.

Solución:

a) El error cometido al reemplazar $(1+x)^2$ por $1+2x$, está dado por la diferencia:

$$| (1+x)^2 - (1+2x) | = | x^2 | = x^2$$

b) Para que el error sea menor que 10^{-2} basta resolver la desigualdad $x^2 < 10^{-2}$.

$$x^2 < \frac{1}{100} \iff (x - \frac{1}{10})(x + \frac{|}{10}) < 0.$$

Usando las propiedades de las desigualdades de la subsección 1.1.3, vemos que $x \in (\frac{-1}{10}, \frac{1}{10})$.
Del mismo modo para que $x^2 < 10^{-4}$ debemos tener $x \in (\frac{-1}{100}, \frac{1}{100})$.
Finalmente, $x^2 < 10^{-5} \iff x \in (\frac{-1}{100\sqrt{10}}, \frac{1}{100\sqrt{10}})$.

c) Como $1,0381 = 1 + 0,0381$ y $0 < 0,0381 < \frac{1}{10}$, podemos aproximar $(1,0381)^2$ por $1 + 2 \cdot 0,0381$. Así, $(1,0381)^2 \approx 1,0762$.

13. Dada la función numérica

$$f(x) = x^2 + |3 - 4x^2| - |5x + 1|,$$

calcule $f(-1), f(0), f(1)$ y deduzca que f no es monótona sobre $[-1, 1]$.
Solución:

$$f(-1) = (-1)^2 + |3 - 4(-1)^2| - |5(-1) + 1| = -2.$$

$$f(0) = 3 - 1 = 2.$$

$$f(1) = 1 + |3 - 4| - |5 + 1| = -4.$$

Como $f(-1) < f(0)$, si fuera monótona también $f(0)$ debiera ser menor que $f(1)$. Pero, como esto no se cumple la función no es monótona sobre $[-1, 1]$.

14. Sea $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 10}{x - 3}$.

a) Escriba el dominio de f como unión de intervalos.

b) Encuentre a, b, c de modo que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}.$$

c) Utilizando la expresión obtenida en el item anterior, estudiar el crecimiento de f sobre los intervalos que componen el dominio.

Solución:

a) $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

b)

$$\begin{aligned}\frac{x^2-10}{x-3} &= ax+b+\frac{c}{x-3}\\ &= \frac{ax(x-3)+b(x-3)+c}{x-3}\\ &= \frac{ax^2-3ax+bx-3b+c}{x-3}\\ &= \frac{ax^2+(b-3a)x+(c-3b)}{x-3}\end{aligned}$$

Usando el ejercicio resuelto 2 de la sección 2.1 podemos concluir que:

$$a=1,\ b-3a=0,\ c-3b=-10.$$

Por tanto,

$$a=1,\ b=3,\ c=-1.$$

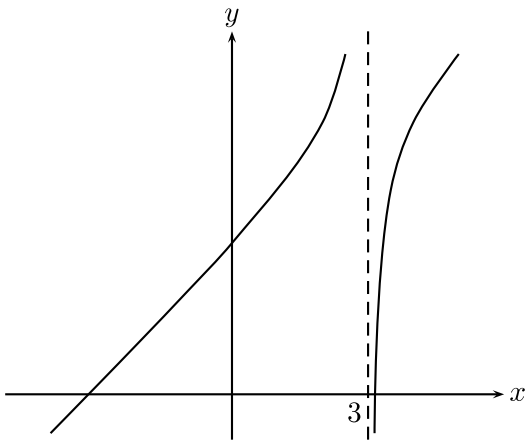
Así:

$$f(x)=x+3-\frac{1}{x-3}.$$

c)

- Si $x<3$, a medida que crece y se acerca a 3, $x+3$ crece. $x-3$ disminuye tomando valores negativos y $-\dfrac{1}{x-3}$ crece sin acotamiento.
- Si $x>3$ y decrece hacia el valor 3, entonces $x-3$ disminuye tomando valores positivos, por tanto, $-\dfrac{1}{x-3}$ toma valores negativos que no pueden ser acotados inferiormente.Ver problema resuelto 10 de esta misma sección.

d) Su gráfico es:



15. Estudie las variaciones de la función $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $a > 0$.

Solución:

Primero debemos determinar el dominio de la función. Para que y sea un número real es necesario y suficiente que $\frac{x}{a-x} \geq 0$. Analizando las distintas soluciones a esta desigualdad llegamos a que $x \in [0, a[$.

Cuando x crece desde 0 hasta a, y crece de 0 a ∞, pues la $\frac{1}{a-x}$ crece indefinidamente.

La curva resultante es una rama de una curva llamada **cisoide**.

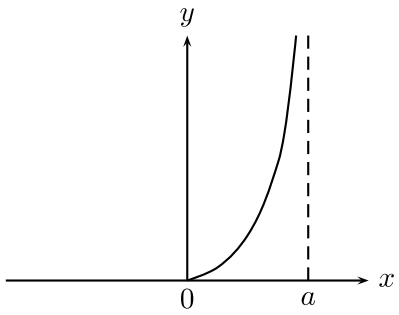


Figura 2.10: Una rama de la cisoide

16. Bosquejar el gráfico de la función,

$$f : x \longmapsto x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \text{ con } a \geq 0$$

Solución: El dominio de la función está determinado por la condición

$$\frac{a-x}{a+x} \geq 0 \text{ con } x \neq -a \, .$$

Lo cual es equivalente a $-a < x \leq a$. Cuando x varía desde 0 hasta a, el valor de la función es positivo y finito, además $f(0) = f(a) = 0$. Cuando x disminuye desde 0 hasta $-a$, la función es negativa y también decrece indefinidamente. El gráfico resultante es una rama de la curva llamada **estrofoide**.

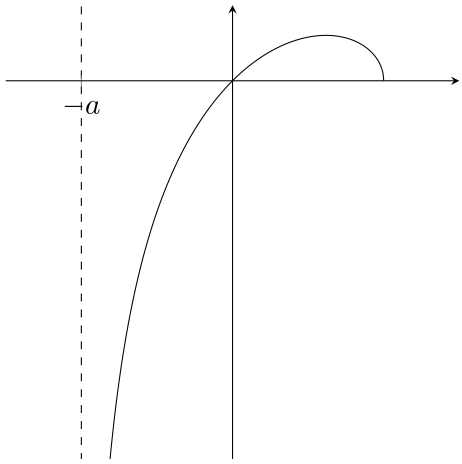


Figura 2.11: Una rama de la estrofoide

17. Encuentre constantes reales a y b de modo que la función:

$$f : x \longmapsto x^3 + (a-1)x^2 + x + ab + 1$$

sea impar.

Solución:

Para que f sea impar se debe cumplir que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D(f)$. Como,

$-f(x) = -(x^3+(a-1)x^2+x+ab+1)$ y $f(-x) = (-x)^3+(a-1)(-x)^2+(-x)+ab+1$, tenemos que:

$$f(-x) = -f(x) \iff (a-1)x^2 + ab + 1 = 0.$$

Como esta igualdad debe satisfacerse para todo $x \in \mathbb{R}$, calculemos la expresión para $x = 0$ y $x = 1$, obteniendo las ecuaciones:

$ab = -1$ y $a(1+b) = 0$, lo que nos da los valores $a = 1$ y $b = -1$, pues la posibilidad $a = 0$, es incompatible con $ab = -1$.

18. Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}.$$

a) Demuestre que f es par.

b) Dado el número a, resuelva la ecuación $f(x) = a$.

c) Deduzca que el recorrido de f es $[0, 1)$.

d) Estudie el crecimiento de f y bosqueje su gráfico.

Solución:

a) Como $|x| = |-x|$ se tiene que $f(x) = f(-x)$. Por tanto f es una función par.

b) Debido a que el valor absoluto de un número es positivvo o nulo, la ecuación $f(x) = a$ sólo tiene sentido si $a > 0$.

Teniendo en cuenta que f es par, consideraremos el caso $x > 0$.

$$\frac{x}{1+x} = a \iff x = a(1+x) \iff x = \frac{a}{1-a}.$$

c) Dado $a \in [0,1)$ existe $x = \frac{a}{1-a}$ de modo que $f(x) = \dfrac{\frac{a}{1-a}}{1+\frac{a}{1-a}} = a$. Esto nos dice que la función f toma todos los valores entre 0 y 1. Toma el valor 0 en $x = 0$, pero no toma el valor 1. Pues, si $f(x) = 1$, entonces debiera existir x tal que $\dfrac{x}{1+x} = 1$, lo que implica $1 = 0$. Como esto es imposible, f no alcanza el valor 0. En consecuencia $R(f) = [0,1)$.

d) Usando la parte (a) del ejercicio propuesto 16 estudiaremos el signo de la expresión

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

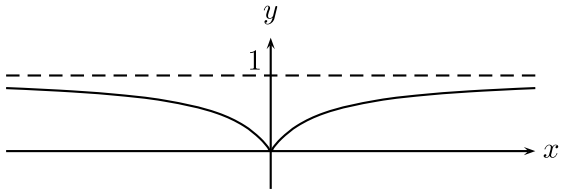
Sean $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$,

$$\frac{\dfrac{x_1}{1+x_1} - \dfrac{x_2}{1+x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{x_1(1+x_2) - x_2(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(1+x_1)(1+x_2)} > 0.$$

Esto nos dice que f es creciente en $[0, +\infty)$.

Como f es par, sobre $(-\infty, 0]$ ella es decreciente.

Su gráfico es



19. Sea f una función inyectiva sobre un intervalo I. Demuestre que, si f es estrictamente creciente entonces f^{-1} es estrictamente creciente.

Solución: Sean $y_1, y_2 \in D(f^{-1})$. Entonces, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Si $y_1 < y_2$, debemos demostrar que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Supongamos por reducción al absurdo que no se cumple lo que queremos demostrar. Si $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, entonces $x_1 = x_2$ y por tanto $f(x_1) = f(x_2)$, es decir , $y_1 = y_2$, lo que contradice la hipótesis. Si $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, entonces $x_1 > x_2$ y por tanto $f(x_1) > f(x_2)$, es decir , $y_1 > y_2$, lo que nuevamente contradice la hipótesis. Así tenemos que f^{-1} es estrictamente creciente.

20. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}.$$

Solución: El dominio de la función está determinado por la desigualdad

$$\frac{x^2}{4} - 1 \geq 0.$$

Por tanto,

$$D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Para calcular la inversa debemos despejar x en la ecuación $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \\ \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 &= \frac{x^2}{4} - 1 \\ y^2 - xy &= -1 \\ x &= y + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Para responder correctamente al problema debemos permutar las variables, así:

$$f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}.$$

21. Calcular la función inversa de

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}.$$

Solución: Si $y = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}$, entonces

$$\frac{1 - y}{1 + y} = \frac{1 - \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}}{1 + \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}} = \sqrt{1 + 4x}.$$

Por tanto, $1+4x=\left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2$, lo que nos da

$$x=\frac{1}{4}\left[\frac{(1-y)^2}{(1+y)^2}-1\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{(1-y)^2-(1+y))^2}{(1+y)^2}\right]=-\frac{y}{(1+y)^2}.$$

Intercambiando las variables tenemos:

$$f^{-1}(x)=-\frac{x}{(1+x)^2}.$$

22. Calcular la función inversa de

$$f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}.$$

Solución: Sea $a=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}$ y $b=\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
y &= a+b\\
y^3 &= a^3+b^3+3a^2b+3ab^2\\
&= a^3+b^3+3ab(a+b)\\
&= a^3+b^3+3aby\\
&= x+\sqrt{1+x^2}+x-\sqrt{1+x^2}+3y\sqrt[3]{x^2-(1+x^2)}\\
&= 2x-3y\\
x &= \frac{y^3+3y}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f^{-1}(x)=\frac{x^3+3x}{2}.$$

2.3.4. Ejercicios propuestos

1. Determine el dominio, el recorrido y los intervalos donde las siguientes funciones son positivas y negativas.

   a) $\sqrt[3]{x+1}$
   b) $\sqrt[3]{x^2+1}$
   c) $\sqrt[3]{x^2-1}$
   d) $\sqrt[3]{1-x^2}$
   e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

2. *a)* ¿ Son iguales las funciones $f(x) = \sqrt{x-5}\sqrt{x+7}$ y $g(x) = \sqrt{(x-5)(x+7)}$? Justifique su respuesta.

   b) ¿ Son iguales las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x + \frac{1}{x}}{x^2+1}$?

   Grafique las siguientes funciones:

3. $y = |x-a| + \dfrac{1}{3}|x-b|$.

4. $f(x) = \{2x\}$, ver ejercicio resuelto 4.

5. $f(x) = |x+1| + |x-1| - 2|x|$.

6. $y = ||x| + 2|$.

7. $y = ||x-1| - 1|$.

8. $y = |x^2 - 4| + |x-2|$.

9. Sea $f(x)$ la función signo de x, ver ejercicio resuelto 1 y sea $g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$. Grafique la función compuesta $f(g(x))$.

10. Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$. Grafique:

    a) $f(x)$.

    b) $g(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$.

    c) $h(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}$.

    d) Compuebe que $f(x) = g(x) - h(x)$ y $|f(x)| = g(x) + h(x)$.

11. Encuentre la función inversa de

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}}.$$

12. *a)* ¿ Cómo elegir x para que el error absoluto cometido al aproximar $\sqrt{1+x}$ por $1 + \frac{x}{2}$ sea menor o igual a: 10^{-3} , $4 \cdot 10^{-5}$?

    b) Calcule sin usar calculadora un valor aproximado de: $\sqrt{1,0035}$.

13. Demuestre que, si f y g son funciones pares entonces αf, $f+g$, fg son funciones pares.

14. Estudie la variación de la función numérica : $h : x \longmapsto x^2 + \mid 2x \mid$ sobre cada uno de los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[0, +\infty)$.

15. Sean f y g son funciones numéricas sobre un mismo intervalo I.

    a) Demuestre que si f y g son ambas crecientes o ambas decrecientes sobre I, la función $f+g$ es monótona sobre I. En cada caso precise el sentido de la variación de $f+g$.

    b) Si f y g son monótonas sobre I, ¿es $f+g$ monótona ?

16. Sea f una función numérica sobre I.

    a) Demuestre que f es creciente sobre I si y sólo si, para cualquier par de números reales x y x' de I tal que $x \neq x'$,

    $$0 \leq \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}, \qquad (*)$$

    Separe los casos $x < x'$, $x' < x$.

    b) Encuentre una condición necesaria y suficiente del tipo (*) para que una f sea decreciente sobre I.

    c) Aplique los resultados anteriores para estudiar las variaciones de la función: $f(x) = \dfrac{\mid x \mid -1}{x-1}$.

17. Dadas las funciones f, g, h, represente las tres en un mismo gráfico.

    a) $f(x) = x+1$, $g(x) = 3x^2 - 4$, $h(x) = \text{ínf}\{f(x), g(x)\}$.

    b) $f(x) = x^3 + 2x$, $g(x) = 3 - x$, $h(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$.

18. Dado el gráfico de la función f en la figura 2.12, determine:

    a) Los ceros de la función.

    b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    c) Los intervalos donde la función es inyectiva.

    d) Seleccione un intervalo donde f es invertible y grafique juntas f y f^{-1}.

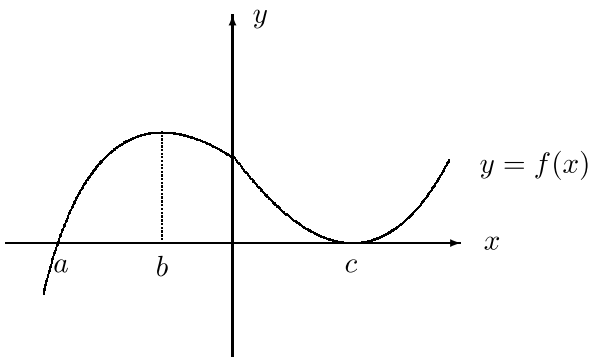


Figura 2.12: Gráfico de f invertible

2.4. Límites de funciones numéricas de variable continua

Seguiremos considerando, como en la sección anterior, que los dominios de las funciones son intervalos o uniones de intervalos.

2.4.1. Límites infinitos cuando $|x|$ crece indefinidamente

Al igual que en el estudio de las sucesiones, en primer lugar estudiaremos el crecimiento de las funciones cuando $|x|$ crece indefinidamente.
De manera intuitiva diremos que una función

- f tiende a $+\infty$ cuando x crece indefinidamente, si $f(x)$ crece indefinidamente. En símbolos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- f tiende a $-\infty$ cuando x crece indefinidamente, si $f(x)$ decrece indefinidamente. En símbolos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- f tiende a $+\infty$ cuando x decrece indefinidamente, si $f(x)$ crece indefinidamente. En símbolos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- f tiende a $-\infty$ cuando x decrece indefinidamente, si $f(x)$ decrece indefinidamente. En símbolos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Un límite infinito refleja el crecimiento o decrecimiento indefinido de la variable dependiente. La formalización de estas ideas es la siguiente definición.

Definición 2.4.1 Diremos que:

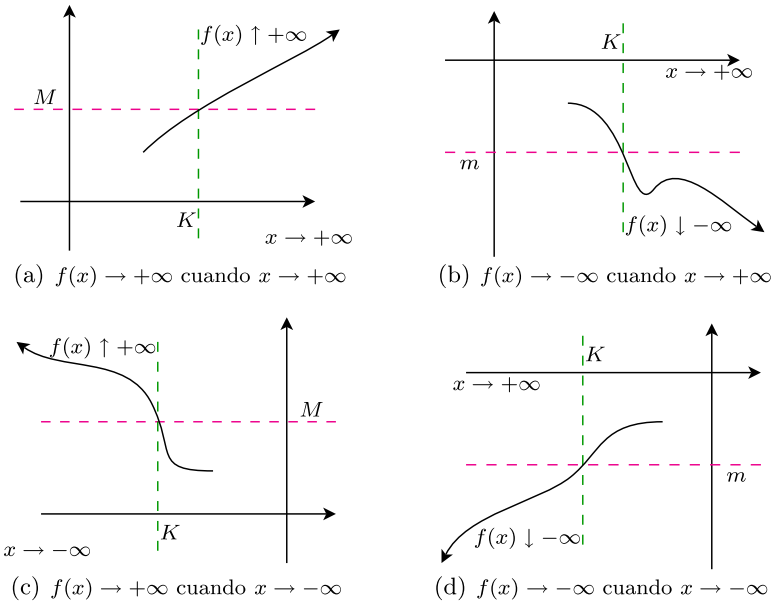
(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si dado $M > 0$, existe $K > 0$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) > M$.

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si dado $m < 0$, existe $K > 0$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) < m$.

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si dado $M > 0$, existe $K < 0$ tal que si $x < K$, entonces $f(x) > M$.

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si dado $m < 0$, existe $K < 0$ tal que si $x < K$, entonces $f(x) < m$.

Observación 2.4.2 Otra forma de leer la definición 2.4.1 es la siguiente. El ítem (i) dice que en una vecindad del infinito positivo ningún número real M es cota superior de los valores de f. De manera análoga los otros ítemes de la definición pueden ser leídos de esta forma.



(a) $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$ (b) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to +\infty$

(c) $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to -\infty$ (d) $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

Figura 2.13: Casos posibles de límites infinitos si $|x| \to +\infty$

Ejemplo 2.4.3 1. Si f es la función identica sobre $\mathbb{R}$, entonces
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

2. $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$.

   Como $g(x) = x^2$ es una parábola y es siempre positiva, $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$.

   $\lim_{x\to\pm\infty} (-x^2) = -\infty$.

3. Usando las propiedades de las potencias de exponente entero positivo tenemos que
   $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, $k \in \mathbb{N}$.

4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[k]{x} = +\infty$, $k \in \mathbb{N}$.

5. $$\lim_{x\to+\infty} (ax+b) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

6. $$\lim_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

7. Si una función con dominio $\mathbb{R}$ es par o impar basta calcular el límite en uno de los infinitos y el otro de deduce usando la paridad o imparidad de f.

$$\text{Si } f \text{ es par, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$
$$\text{Si } f \text{ es impar, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Teniendo en cuenta la aritmética en $\overline{\mathbb{R}}$, definida en la subsección **??**, se tiene el siguiente teorema que es la versión continua del teorema 2.1.14 de sucesiones.

Teorema 2.4.4 Aritmética de límites infinitos

(i) Si $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$ y la función $g(x)$ es acotada inferiormente, entonces $\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

(ii) Si $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $g(x) \geq c > 0$ para todo x suficientemente grande, entonces $\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

(iii) Si $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo x suficientemente grande, entonces $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = +\infty$.

(iv) Si $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = -\infty$ y la función $g(x)$ es acotada superiormente, entonces $\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$.

(v) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ y $g(x) \leq c < 0$ para todo $|x|$ suficientemente grande, entonces $\lim_{|x|\to+\infty} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$.

(vi) Si $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = -\infty$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $|x|$ suficientemente grande, entonces $\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = -\infty$.

Demostración: Solo demostraremos los tres primeros ítemes cuando $x \to +\infty$. El caso $x \to -\infty$ es completamente análogo y se deja de ejercicio.

(i) $g(x)$ acotada inferiormente implica que existe r tal que $r < g(x)$, para todo x. Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, dado $M > 0$, existe K tal que $f(x) > M - r$, cuando $x \geq K$. Así $f(x) + g(x) > M$; cuando $x \geq K$ lo que nos dice que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

(ii) Dado $M > 0$, tenemos que existe K tal que $f(x) > \dfrac{M}{c}$, si $x \geq K$. Multiplicando esta desigualdad por $g(x) \geq c$, obtenemos $f(x) \cdot g(x) \geq M$. Por tanto $\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

(iii) Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Dado $M > 0$, existe K tal que $f(x) > M$, para todo $x \geq K$. Pero $f(x) \leq g(x)$, entonces $g(x) \geq M$, para todo $x \geq K$. Así $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. □

2.4.2. Límites infinitos en una vecindad de un punto

Es conocido el hecho que un cuociente $\dfrac{a}{b}$ crece si b decrece hacia 0 y a permanece fijo. ¿Cómo es este crecimiento con respecto a b, es acotado o no? Estas preguntas son válidas para cualquier función en una vecindad de un punto x_0. Con este fin definiremos vecindades de un punto. La idea de una vecindad, en este contexto, es la misma de la vida corriente, es decir, si un punto está en una vecindad de x_0, quiere decir que el punto está cerca de x_0. "Estar cerca" lleva implícitamente el concepto de distancia y la distancia en $\mathbb{R}$ es el valor absoluto.

Definición 2.4.5 Llamaremos vecindad de un punto x_0 a cualquier intervalo abierto que contenga al punto. A dicho intervalo lo denotaremos $\mathcal{V}(x_0)$.

En particular, los intervalos del tipo $|x - x_0| < r$ con r positivo y fijo son vecindades de x_0. Considerando que en $\mathbb{R}$ existe una única dirección, si nos acercamos a un punto fijo x_0 solamente podemos hacerlo por la derecha o por la izquierda del punto. Para diferenciar las distintas posibilidades, usaremos las siguientes notaciones:

Definición 2.4.6 $x \longrightarrow x_{0^+}$ Significa que x toma valores cada vez más cercanos a x_0 mayores que x_0.

$x \longrightarrow x_{0^-}$ Significa que x toma valores cada vez más cercanos a x_0 menores que x_0.

$x \longrightarrow x_0$ significa que x toma valores cercanos a x_0 sin diferenciar si son mayores o menores que x_0.

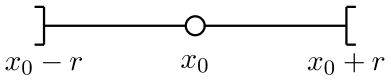


Figura 2.14: Vecindad de x_0

Nuestro objetivo es ahora, estudiar el crecimiento de una función en una vecindad de un punto. Para que tal estudio tenga sentido, necesariamente, la función debe estar definida en la vecindad excepto, eventualmente, en el punto mismo.

Sea f una función y $\mathcal{V}(x_0)$ una vecindad de x_0 tal que $(\mathcal{V}(x_0) - \{x_0\}) \subseteq Dom(f)$.

Basta pensar geométricamente para visualizar algunos posibles comportamientos de la función cerca de x_0.

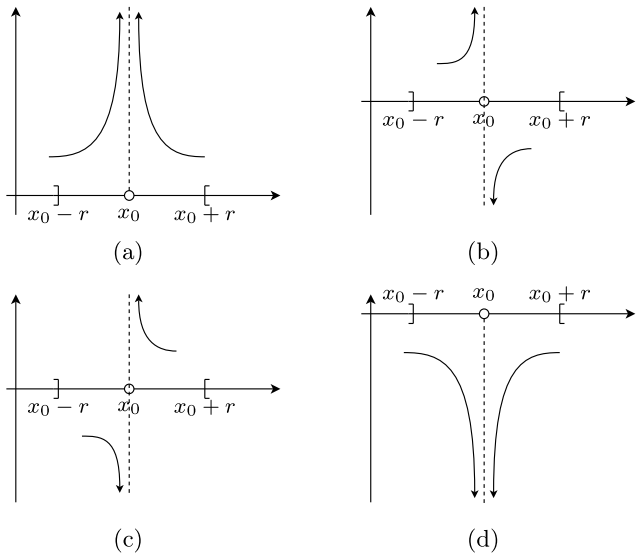


Figura 2.15: Límites infinitos en una vecindad de x_0.

- Si $x \longrightarrow x_0^+$, la función $f(x)$ puede crecer o decrecer indefinidamente. Es decir: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ ó $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.
- Si $x \longrightarrow x_0^-$,la función $f(x)$ puede crecer o decrecer indefinidamente. Es decir: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ ó $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.
- Si $x \longrightarrow x_0$,la función $f(x)$ puede crecer o decrecer indefinidamente. Es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Definición 2.4.7 Diremos que

(i) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, si dado $M > 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < r$, entonces $f(x) > M$.

(ii)) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, si dado $m < 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < r$, entonces $f(x) < m$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, si dado $M > 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < x_0 - x < r$, entonces $f(x) > M$.

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, si dado $m < 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < x_0 - x < r$, entonces $f(x) < m$.

(v) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si dado $M > 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < r$, entonces $f(x) > M$.

(vi) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, si dado $m < 0$ existe $r > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < r$, entonces $f(x) < m$.

Ejemplo 2.4.8 El **ejemplo de referencia** de este tipo de límite es el comportamiento de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en una vecindad de $x_0 = 0$.
Observemos en primer lugar que la función no está definida en 0, por tanto es importante saber como se comporta en valores cercanos a cero. Demostraremos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty} \tag{2.7}$$

Como $\dfrac{1}{x}$ tiene el mismo signo que x, tenemos que:

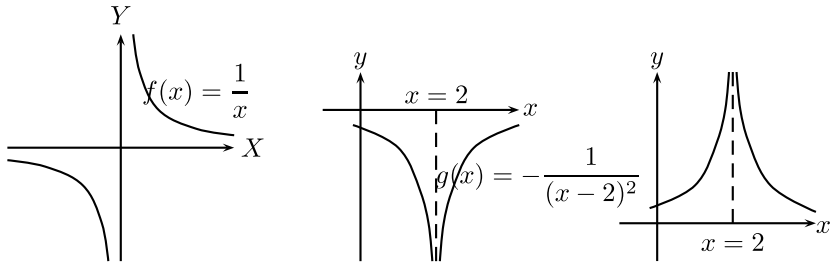
- $f(x) > 0$ y es decreciente sobre $]0, +\infty[$ por lo tanto, los valores de $f(x)$ crecen a medida que nos acercamos al cero por la derecha.
  Si el conjunto $C = \{f(x) \ : \ x \in]0, r[, r > 0\ \}$ fuera acotado superiormente, para algún $r > 0$, entonces

  $$0 < \frac{1}{x} < M; \text{para todo} \qquad x \in]0, r]$$

  pero, $x \in]0, 1/M] \Longrightarrow \dfrac{1}{x} > M$. Lo que contradice que M es cota superior de C

  Así, podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

- $f(x) < 0$ y decreciente sobre $]-\infty\ ,\ 0[$. Mediante un razonamiento análogo al anterior, concluimos que $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$.



(a) $x_0 = 0$ (b) $x_0 = 2$ (c) $x_0 = 2$

Figura 2.16: Comportamiento de algunas funciones cerca de puntos singulares.

Figura 2.17:

Ejemplo 2.4.9 1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$. Si $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ su dominio excluye el punto $x = 2$, además f es siempre positiva por ser un cuadrado, cuando uno se acerca a 2 por ambos lados, $f(x)$ crece indefinidamente.

2. $\lim_{x\to 2} -\dfrac{1}{(x-2)^2} = -\infty$. La función $g(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$, es la función **simétrica** de la anterior y, por tanto, es evidente que $\lim_{x\to 2} g(x) = -\infty$.

3. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ y $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$. Si $h(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \neq 2$, ella cambia de signo según x sea mayor o menor que 2. Cuando $x \to 2^+$, la función crece indefinidamente y cuando $x \to 2^-$, la función decrece indefinidamente.

Como hemos visto en los ejemplos, la interpreteción geométrica de los límites infinitos en un punto x_0 permite la siguiente definición:

Definición 2.4.10 Diremos que la recta $x = x_0$ es una **asíntota vertical** del gráfico de la función f si al menos uno de los siguientes límites es $+\infty$ o $-\infty$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Ejemplo 2.4.11 1. Considerando los límites de referencia dados por la ecuación (2.7) podemos afirmar que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical del gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2. Los casos 1, 2 y 3 del ejemplo 2.4.9 muestran asíntotas verticales.

3. La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de las funciones $\pm\dfrac{1}{(x-2)^2}, \pm\dfrac{1}{x-2}$.

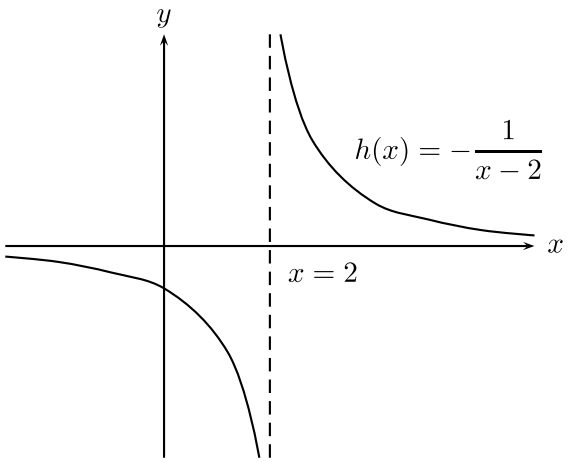


Figura 2.18: Gráfico de $h(x) = -\dfrac{1}{x-2}$

2.4.3. Límites finitos cuando $|x|$ crece indefinidamente

En la subsección 2.4.1 hemos estudiado el caso en que tanto $|x|$ como $|f(x)|$ crecen indefinidamente. Ahora veremos el caso en que $|f(x)|$ permanece acotada cuando $|x|$ crece indefinidamente. Consideremos la función f definida sobre $\mathbb{R}$ mediante la ecuación:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esta función tiene recorrido acotado, pero si $|x| \to +\infty$ la función oscila entre los valores 1 y -1, por no tener un comportamiento "estable", en el sentido que esté muy cerca de un valor fijo es un caso que no permite cálculos seguros. En cambio la función $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, cuyo dominio es $\mathbb{R}$, por ser una función par , el comportamiento cuando x crece o decrece indefinidamente los valores de g se comportan de manera similar. Además, de la aritmética de $\mathbb{R}$, observamos que dichos valores se hacen cada vez más pequeños sin alcanzar el cero, intuitivamente podemos decir que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Definición 2.4.12 Diremos que el número L es el límite de $f(x)$ cuando:

(i) x crece indefinidamente si dado $\varepsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $x > M$. Entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. En tal caso

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad f(x) \to L \quad \text{cuando } x \to +\infty.$$

(ii) x decrece indefinidamente si dado $\varepsilon > 0$ existe $m < 0$ tal que si $x < m$. Entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. En este caso escribiremos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ o $f(x) \to L$ cuando $x \to -\infty$.

Ejemplo 2.4.13 Ejemplo de referencia

1.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \tag{2.8}$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, existe $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ tal que si $x > M$. Entonces $x > \frac{1}{\varepsilon}$ y por tanto, $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$. Escribimos 0^+ para enfatizar que $\frac{1}{x}$ se acerca a 0 por la parte positiva del eje Y.

2.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \tag{2.9}$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, existe $m = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$ tal que si $x < m$, o lo que es lo mismo $x < -\frac{1}{\varepsilon}$ entonces $-\varepsilon < \frac{1}{x}$ y como $\frac{1}{x} < 0$, tenemos que $-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$, lo que es equivalente a $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Ejemplo 2.4.14

Aplicación de los límites de referencia 2.8 y 2.9 al cálculo de límites de polinomios.
En general, el cálculo directo de límites de polinomios cuando $|x| \to +\infty$ conduce a formas indeterminadas, razón por la cual se debe factorizar el polinomio por la potencia mayor en x.
$\lim_{x \to \infty} (4x^3 + 1 - 3x) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} (4x^3 + 1 - 3x) = -\infty$.
En efecto, $f(x) = 4x^3 + 1 - 3x = x^3(4 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2})$; como $\frac{1}{x^k} \to 0$ cuando $x \to \infty$, tenemos:
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4 \lim_{x \to +\infty} x^3 = 4(+\infty) = +\infty$,
$\lim_{x \to -\infty} = 4 \lim_{x \to -\infty} x^3 = 4(-\infty) = -\infty$.

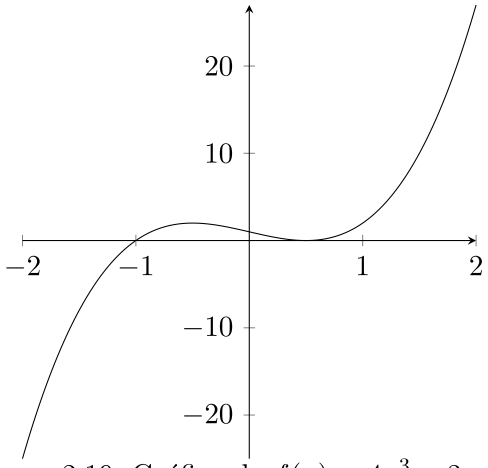


Figura 2.19: Gráfico de $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

1. **Límites de polinomios cuando $|x| \to +\infty$. Caso general**
   Sea $p(x)$ un polinomio.

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \ , \ \ a_n \neq 0. \\ &= x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \end{aligned}$$

   Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = a_n \lim_{x \to +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

   En particular

$$\lim_{x \to +\infty} (3x - 5x^4 + 8) = -5 \lim_{x \to +\infty} x^4 = -\infty.$$

2. **Límites de funciones racionales cuando $|x| \to +\infty$.**
   Sea

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

   con $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$; $a_n \neq 0$ y $q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$; $b_m \neq 0$.
   Entonces,

$$\lim_{x \to +\infty} r(x) = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} p(x)}{\lim\limits_{x \to +\infty} q(x)}$$

Escribiendo

$$\begin{aligned} p(x \quad) &= x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) \\ q(x) \quad &= x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right), \end{aligned}$$

tenemos que :

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Si $n = m$: $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = \dfrac{a_n}{b_m}$.

Si $m > n$: $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = \dfrac{a_n}{b_m} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{m-n}} = 0$.

Si $m < n$: $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = \dfrac{a_n}{b_m} \lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m} = \pm\infty$. Así, $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x)$ es finito si y sólo si $m \geq n$.

Interpretación Geométrica: Si hacemos un gráfico de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, vemos que para valores grandes de x, los valores de la función se acumulan en torno a la recta $y = L$.

Esto inspira la siguiente definición.

Definición 2.4.15 Decimos que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** del gráfico de f si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ó si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Ejemplo 2.4.16

1. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, la recta $y = 0$, es decir, el eje X parte positiva es una asíntota horizontal de $\dfrac{1}{x}$.

2. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, tenemos el siguiente gráfico.

3. La recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$, pues

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x+1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3^-$$

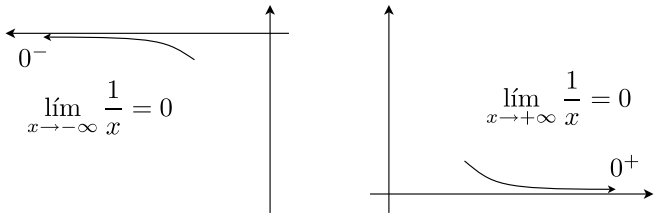


Figura 2.20: Límites a $\pm\infty$ de $\dfrac{1}{x}$.

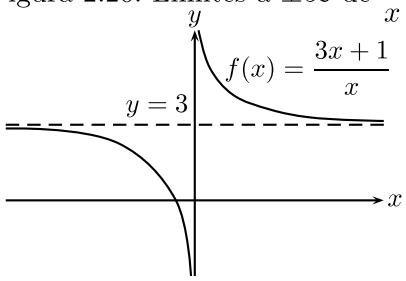


Figura 2.21: Asíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$

2.4.4. Límites finitos en un punto x_0

Supongamos que una función f está definida para todo $x \in \mathcal{V}(x_0)$ excepto,eventualmente, en x_0. Otra forma de expresar esto es decir que f está definida para x tal que $0 < |x - x_0| < r$ para algún $r > 0$. Como el punto x_0 constituye una excepción con respecto a la función en consideración es que nos interesa saber que pasa en los puntos cercanos a x_0. Ya hemos analizado cuando en tal vecindad la función crece o decrece indefinidamente. Otra posibilidad es que en las cercanias de x_0 permanezca acotada. Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 2.4.17 Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, como la función no está definida en $x_0 = 0$, analizaremos que sucede con sus valores cuando x está en una vecindad del cero.

Considerando que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

f toma el valor 1 cuando x es positivo y -1 cuando x es negativo. Así, tenemos que:

- Si $x \to 0^+$, entonces $f(x) = 1$.
- Si $x \to 0^-$, entonces $f(x) = -1$.

Aunque el comportamiento es distinto si los valores de x son menores o mayores que x_0, la función es acotada. Así, en alguna vecindad del cero f toma valores finitos.

Definición 2.4.18 Sea f una función y x_0 un número tal que existe un intervalo abierto $]x_0 - r, x_0 + r[$ de modo que, excepto eventualmente x_0, esté contenido en el dominio de la función.
Diremos que el número L_d (respectivamente L_i) es el **límite a la derecha (respectivamente a la izquierda)** en un punto x_0 de una función f si:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que si $x_0 < x < x_0 + r$, entonces $|f(x) - L_d| < \varepsilon$ (respectivamente si $x_0 - r < x < x_0$, entonces $|f(x) - L_i| < \varepsilon$). En estos casos usaremos las notaciones siguientes:

$$L_d = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad ; \quad L_i = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Ejemplo 2.4.19

1. $\lim_{x \to 3^+} [x] = 3$; $\lim_{x \to 3^-} [x] = 2$. En general, dado $n \in \mathbb{Z}$: $\lim_{x \to n^+} [x] = n$; $\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1$. En cada entero: $L_d \neq L_i$.
2. Si el dominio de la función es un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, para cada extremo del intervalo sólo tiene sentido hablar de uno de los límites laterales: Para a, podría existir sólo L_d y para b sólo L_i.
3. $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$, sólo puede analizarse su comportamiento para valores mayores que 0 y tenemos que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$ que vale 0.

Teorema 2.4.20 (i) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_d$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n > a$ y $\lim x_n = a$ se tiene que $\lim_{x \to \infty} f(x_n) = L_d$.

(ii) $\lim f(x) = L_i$ si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n < a$, y $\lim x_n = a$ se tiene que $\lim_{x \to \infty} f(x_n) = L_i$.

Demostración: Ejercicio

Definición 2.4.21 Diremos que el límite de una función f en un punto x_0 existe si y sólo si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$. En este caso, escribiremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Usando las definiciones de los límites laterales, podemos dar la siguiente caracterización de un límite finito.

Definición 2.4.22 Sean f una función numérica y $x_0 \in \mathbb{R}$,de modo que f está definida para x tal que $0 < |x - x_0| < r$ para algún $r > 0$. Diremos que L es el límite de f en el punto x_0, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ - que en general depende de ε y de x_0- tal que si $0 < |x - x_0| < r$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. En tal caso escribiremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \quad \text{o} \quad f(x) \longrightarrow L \text{ cuando } x \longrightarrow x_0.$$

Observación 2.4.23

1. $|x - x_0| > 0$ nos dice que no nos interesa lo que pasa exactamente en x_0, punto que eventualmente pudiera no estar en el dominio de la función.

2. Los infinitos $x \in D(f)$ cercanos al punto x_0 nos permiten hacer las sucesivas aproximaciones a L, lo que constituye la parte práctica del concepto de límite.

3. El ε **dado** es el grado de exactitud que uno requiere según la situación concreta en que estamos involucrados.

4. $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq L$ es equivalente a : *existe* $\varepsilon > 0$ *de modo que existe al menos un* $x \in D(f)$ *tal que* $| x - x_0 | < \delta$ *pero* $| f(x) - L | \geq \varepsilon$.

5. La dificultad de aplicar la definición es encontrar el δ apropiado para cada ε dado.

Ejemplo 2.4.24

1. Sea $f(x)$ la función constante definida sobre un intervalo abierto $I =]a, b[$, $x_0 \in I$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c, \quad c = \text{cte}.$$

Pues dado $\varepsilon > 0$, existe δ que puede ser elegido como $\delta = \text{ínf}\{| a - x_0 |, | x_0 - b |\}$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Observemos que si en particular $I = \mathbb{R}$ cualquier δ sirve para que se cumpla la definición 2.4.22.

2. Sea $f(x) = x$ definida en un intervalo abierto $I, x_0 \in I$, entonces: $\lim_{x \to x_0} = x_0$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe δ que puede ser elegido igual a ε tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$. Entonces $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Si el intervalo no es todo $\mathbb{R}$, δ debe ser elegido como:

$$\delta = \text{ínf}\,\{| a - x_0 |, | b - x_0 |, \varepsilon\}.$$

3. Sea $f(x) = [x]$ definida sobre todo $\mathbb{R}$. Entonces:

   (i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = n$ si $x_0 \in]n, n + 1[$, para algún $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ no existe, si $x_0 \in \mathbb{Z}$.
En efecto,

(i) Como $[x] = n$ si $x \in]n, n+1[$. Entonces cuando analizamos los valores $[x]$ cerca de un $x_0 \in]n, n+1[$, vemos que para tales $x, [x]$ es constante igual a n, por la parte 1 de este ejemplo, $\lim_{x\to x_0} f(x) = n$.

(ii) En cambio cuando $x_0 \in \mathbb{Z}$, la función toma distintos valores según x sea mayor que x_0 o menor que x_0, siendo la diferencia entre estos valores de 1. Por tanto, para cualquier $0 < \varepsilon < 1$, la diferencia entre los valores de $[x]$ para x cercano al punto x_0, es mayor que ε, por tanto no se cumple la definición 2.4.22. Más particularmente, dados los valores que toma $[x]$, podríamos tener candidatos a límite n ó $n-1$.
Si $L = n$, entonces tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ cualquiera sea $\delta > 0$, entonces existe $x_1 = n - \dfrac{\delta}{2}$ tal que $|x_1 - x_0| = \left|n - \dfrac{\delta}{2} - n\right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, pero $|f(x_1) - n| = |n - 1 - n| = 1 > \varepsilon$. Si $L = n - 1$, entonces tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ y existe $x_2 = n + \dfrac{\delta}{2}$, tenemos que $|x_2 - x_0| = \left|n + \dfrac{\delta}{2} - n\right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$; pero $|f(x_2) - (n-1)| = |n - (n-1)| = 1 > \varepsilon$.

4. Si $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ entonces $\lim_{x\to -1} f(x) = -2$, a pesar que f no está definida en $x = -1$ utilizaremos este ejemplo para ilustrar cómo encontrar el δ apropiado. Dado $\varepsilon > 0$, queremos que $|f(x) - L| = \left|\dfrac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2)\right| = |x - 1 + 2| = |x + 1|$ sea menor que ε, entonces suponemos la condición adicional $|x + 1| < \varepsilon$ y en este caso podemos observar que $|x + 1| = |x - (-1)| < \varepsilon$. Esto nos dice que podemos elegir $\delta = \varepsilon$ para tener la definición 2.4.22. Si graficamos esta función, tenemos que este ejemplo muestra un caso en que el límite existe aunque la función en el punto no está definida.

5. $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.
Dado $\varepsilon > 0$; queremos encontrar $\delta > 0$ tal que $|x-2| < \delta$ implique $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Para ello observemos que $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$, para despejar $|x - 2|$ debemos acotar $|x+2|$. Como nos interesa lo que pasa cerca del 2, podemos restringir nuestra atención al intervalo $]1, 3[$, centrado en 2 con un radio 1. Si $x \in]1, 3[$ entonces $3 < x + 2 < 5$. Por tanto $|x - 2||x + 2| < 5|x - 2|$ y si $5|x - 2| < \varepsilon$ entonces $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Eligiendo $\delta = \text{ínf}\left\{\dfrac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$, tenemos que si $|x - 2| < \delta$ entonces
$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < 5 \cdot \dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$.

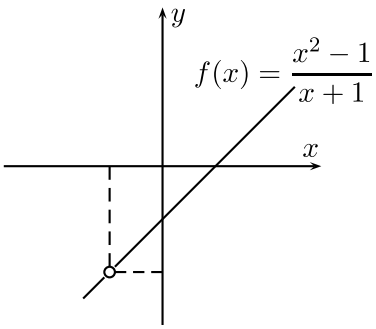


Figura 2.22: Existencia del límite sin que la función esté definida en el punto

6. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ no existe.

   Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = L$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si en particular tomamos $x > 1$ tenemos que:

   $$0 < x - 1 < \delta \text{ , entonces } \left|\frac{1}{x-1} - L\right| < \varepsilon.$$

   Si $0 < x-1 < \text{ínf } \left\{\delta, \frac{1}{L+\varepsilon}\right\}$, entonces $x-1 < \frac{1}{L+\varepsilon}$. Esto implica que $\frac{1}{x-1} > L+\varepsilon$, es decir, $\frac{1}{1-x} - L > \varepsilon$, lo que contradice la acotación $\left|\frac{1}{x-1} - L\right| < \varepsilon$.

7. La función

   $$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

   no tiene límite en ningún punto como una consecuencia de la densidad de los números racionales y los irracionales en $\mathbb{R}$. Como ejercicio, el lector debiera escribir cuidadosamente los detalles.

Interpretación geométrica. La definición de límite nos dice que todas las imágenes por f que están a una distancia menor que ε de L tienen su preimagen en alguna vecindad del punto x_0.

Teorema 2.4.25 Si el límite de una función en un punto existe, él es único.

Demostración: Esta demostración es muy semejante a la del teorema 2.1.27. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L'$ y que existe además $L'' = \lim_{x\to x_0} f(x)$ con $L' \neq L''$.

Usando definición 2.4.22, para L' y L'' tenemos que: Dado $\varepsilon > 0$ existe:

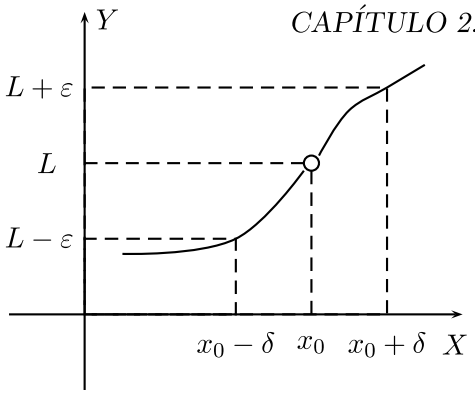


Figura 2.23: Interpretación geométrica del límite

- δ' tal que si $0 < |x - x_0| < \delta'$ entonces $|f(x) - L'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,
- existe δ'' tal que si $0 < |x - x_0| < \delta''$ entonces $|f(x) - L''| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto eligiendo $\delta = \text{ínf}\{\delta', \delta''\}$, tenemos que se satisfacen ambas conclusiones, por lo cual tenemos que: si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces

$$|L' - L''| = |(L' - f(x)) - (L'' - f(x))| \leq |L' - f(x)| + |L'' - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como $|L' - L''| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, por ejercicio resuelto 5 de la sección 2.3, $L' = L''$. □

Teorema 2.4.26 Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, entonces $f(x)$ es acotada en algún intervalo abierto que contiene al punto x_0.

Demostración: Dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - L| < 1$. Sacando las barras del valor absoluto, nos queda que para $\delta - x_0 < x < \delta + x_0$ se tiene $L - 1 < f(x) < L + 1$. Si además, $L \geq 0$, tenemos que $-(L + 1) < L - 1 < f(x) < L + 1$, y por tanto, $|f(x)| < 1 + L$.

Si en cambio, $L < 0$, entonces $L - 1 < f(x) < L + 1 < 1 - L$, y $|f(x)| < 1 - L$. Por consiguiente, para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, excepto eventualmente para $x = x_0$, los valores de $f(x)$ están acotados. □

Teorema 2.4.27 Aritmética de límites finitos
Supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ existen, entonces:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, cuando $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Demostración:

(i) Sean $\lim f(x) = L$ y $\lim g(x) = M$. Aplicando la definición 2.4.22 a ambos límites tenemos que, dado $\varepsilon > 0$: n Existe δ_1 de modo que si $0 < |x - x_0| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Existe δ_2 tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_2$, entonces $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Eligiendo $\delta = \text{ínf}\{\delta_1, \delta_2\}$ tenemos que:

$$|(f(x) + g(x)) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(ii) Usando un recurso similar al de la parte (ii) teorema 2.1.29, tenemos que:

$$|f(x)g(x) - LM| \leq |f(x)||g(x) - M| + M|f(x) - L|.$$

Aplicando la definición de límite, podemos afirmar que dado $\varepsilon > 0$: existe δ_1 tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_1$. Entonces $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ y por teorema 2.4.26 existe $C > 0$ tal que $|f(x)| < C$; para $x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[$, existe δ_3 tal que si $0 < |x - x_0| < \delta_3$. Entonces $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$. Así, eligiendo $\delta = \text{ínf}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, tenemos que si $0 < |x - x_0| < \delta$. Entonces:

$$|f(x)g(x) - LM| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

(iii) Se demuestra combinando de modo apropiado la técnica de (ii) y de (iii) del teorema 2.1.29. Se deja como ejercicio. □

Corolario 2.4.28 (i) $\lim\limits_{x\to x_0} (cf(x)) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; $c = \text{cte}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = -\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Demostración:

(i) Del ejemplo 2.4.24, caso 5.1.2, sabemos que $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$. Usando parte (ii) del teorema 2.4.27, tenemos:

$$\lim_{x\to x_0} (cf(x)) = \lim_{x\to x_0} c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x).$$

(ii) $\lim_{x\to x_0}(-f(x)) = \lim_{x\to x_0}((-1)f(x)) = (-1)\lim_{x\to x_0} f(x) = -\lim_{x\to x_0} f(x)$.

(iii) $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}(f(x)+(-g(x))) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0}(-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$. □

Ejemplo 2.4.29 1. **Límites de funciones polinomiales:**

Sea $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$; a_i constantes. Por teorema 2.4.27 y corolario 2.4.28

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a_n \lim_{x\to x_0} x^n + \ldots + a_1 \lim_{x\to x_0} x + a_0$$

y en virtud del ejemplo 2.4.24, caso 2 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a_n x_0^n + \ldots + a_1 x_0 + a_0$.

2. **Límites de funciones racionales:**

Sea $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$; con $p(x)$ y $q(x)$ funciones polinomiales. Si $q(x_0) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} p(x)}{\lim_{x\to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = r(x_0).$$

Teorema 2.4.30 Una condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ es que, para cada sucesión $\{x_n\} \subset D(f)$, $x_n \neq x_0$ y que converge hacia x_0, se tenga que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x_n) = L.$$

Demostración:

(i) Primero demostraremos que si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, entonces se tiene la condición del enunciado.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión que converge hacia x_0 y $x_n \neq x_0$ para todo n. Entonces, dado $\eta > 0$, existe N tal que si $n > N$, se cumple que $0 < |x_n - x_0| < \eta$.

Como $L = \lim f(x)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Tomando en particular $\eta = \delta$, podemos concluir que si $n > N$, entonces $|x_n - x_0| < \delta$ y por tanto $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Con lo cual tenemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x_n) = L$.

(ii) Supongamos que la condición del enunciado se cumple y demostremos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Por reducción al absurdo supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq L$. Usando la negación de la definición 2.4.22), existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen x tales que $0 < |x - x_0| < \delta$, pero $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Tomando $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, tenemos que para cada n, existe al menos un x_n tal que $0 < |x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ pero $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$.

Así podemos formar una sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \neq a$ y $\lim x_n = x_0$, pero tal que $\lim f(x_n) \neq L$, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, $\lim f(x)$ debe ser igual a L. □

Observación 2.4.31

1. En relación a la demostración del teorema, podemos observar que existen infinitas sucesiones $\{x_n\}$ contenidas en el dominio de f con $x_n \neq x_0$ para todo n y que convergen hacia x_0, pues x_0 es un punto de acumulación del dominio de f.

2. El teorema 2.4.30 puede simplificar algunos cálculos de límite; por ejemplo, usando algunas propiedades de las potencias, tenemos que:

$$\lim_{x\to 1} x^2 = 1 \ \text{ y } \ \lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \ ; \ x_0 > 0.$$

Teorema 2.4.32 Cálculo de límites por acotamiento
Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existen, entonces:

(i) $f(x) \leq g(x)$ implica $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(ii) Si la función h es tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ y además $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$, entonces $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

Demostración: La demostración de este teorema es consecuencia del teorema anterior y de las respectivas desigualdades para límites de sucesiones, por lo que se deja como ejercicio. □

Teorema 2.4.33 Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to A} g(x) = B$ y $f(x) \neq A$ para todo $x \neq x_0$ en algún intervalo abierto que contiene al punto x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} g[f(x)] = B$.

Demostración: Como $\lim f(x) = A$, entonces para cualquier sucesión $\{x_n\}$, $x_n \neq x_0$ y tal que $\lim x_n = x_0$ se tiene que $\lim f(x_n) = A$. Sea $y_n = f(x_n)$ y como f no asume el valor A en algún intervalo que contiene al punto x_0, para n suficientemente grande

$f(x_n) \neq A$, o lo que es lo mismo $y_n \neq A$. Así $\lim_{x\to\infty} g(y_n) = B$, es decir, $\lim_{x\to\infty} g(f(x_n)) = B$; para toda sucesión $\{x_n\}$ tal que $x_n \neq x_0$ y tal que $\lim x_n = x_0$. Por el teorema 2.4.30:

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = B.$$

□

Ejemplo 2.4.34 Calcular $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2+1}$.

Aquí $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces $\sqrt{x^2+1} = g(f(x))$; $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ y $f(x) \neq 2$ para todo $x \neq 1$ cercanos a 1, además $\lim_{x\to 2} g(x) = \sqrt{2}$, entonces $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}$.

El siguiente teorema permite reducir el cálculo de límites al $\pm\infty$ al cálculo de límites en puntos finitos.

Teorema 2.4.35 (i) Si $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ existe, entonces $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

(ii) Si $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Demostración:

(i) Haciendo $x = \frac{1}{t}$, tenemos que $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0^+$. Usando el teorema 2.4.33 sobre límites de funciones compuestas, tomando $a = +\infty$ y $A = 0^+$ se obtiene lo que queremos demostrar. (ii) Demostración análoga. □

Comparación de funciones usando límites:

1. Si cuando x crece indefinidamente, la diferencia entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se hace indefinidamente pequeña, se dice que $f(x)$ y $g(x)$ se aproximan asintóticamente. Es decir, si $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)] = 0$, entonces escribimos $f(x) \approx g(x)$ cuando $x \to +\infty$. Lo mismo se puede hacer cuando $x \to -\infty$.

2. Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces decimos que $f(x)$ y $g(x)$ se comportan aproximadamente iguales una vecindad de x_0; se puede escribir nuevamente $f(x) \approx g(x)$. Siempre que $g(x)$ sea acotada para valores grandes de x.

3. La escritura $f(x)$ es $o(n)$ es equivalente a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. Por ejemplo, $4x^2 + 6x^3$ es $o(1)$.

2.4.5. Ejercicios resueltos

1. Calcule:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-4)$.

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+3x-4)$.

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2+3x-4}$.

   d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3x-4}$.

   e) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+3x-4}$.

   f) $\lim\limits_{x\to \sqrt{\pi}}(3x^2+\pi)$.

   g) $\lim\limits_{x\to -3^+} x\sqrt{\dfrac{3-x}{3+x}}$.

   h) $\lim\limits_{x\to -1} x\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

Solución:

a) El teorema 2.4.27 nos permite escribir:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+3x-4) &= \lim_{x\to 1}x^2+3\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}4\\ &= (\lim_{x\to 1}x)^2+3\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}4\\ &= 1^2+3\cdot 1-4=0.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}(x^2+3x-4) &= \lim_{x\to ++\infty}x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})\\ &= \lim_{x\to +\infty}x^2\cdot\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})\\ &= +\infty\cdot 1=+\infty.\end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2+3x-4}=\dfrac{1}{+\infty}=0.$

d)

$$\frac{x^3+5}{x^2+3x-4} = \frac{x^3(1+\frac{5}{x^3})}{x^2(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{5}{x^3})}{(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x^3})}{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2})} = +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

e) En virtud de a), si $f(x) = x^2+3x-4$ entonces ,$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Aplicando el teorema 2.4.33 con $f(x) = x^2+3x-4$ y $g(x) = \sqrt{x}$,entonces $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$, tenemos que $\lim \sqrt{x^2+3x-4} = 0$.

f) $\lim_{x\to\sqrt{\pi}}(3x^2+\pi) = 3(\sqrt{\pi})^2+\pi = 4\pi$.

g) Para calcular $\lim_{x\to -3^+} x\cdot\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}$, escribiremos: $x = -3+\varepsilon$ y así se cumple que: $x\to -3^+$ si $\varepsilon\to 0^+$, y por lo tanto:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{(-3+\varepsilon)\sqrt{6-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} = -\infty.$$

h) De manera similar a h)

$$\lim_{x\to 1^-} x\sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty.$$

2. Calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty}(2x-1+\sqrt{4x^2-5x+3}).$$

Solución: Sea $y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 5x + 3}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} y &= \lim_{x\to+\infty} y \cdot \frac{(2x-1) - \sqrt{4x^2-5x+3}}{(2x-1) - \sqrt{4x^2-5x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)^2 - (4x^2-5x+3)}{2x-1-\sqrt{4x^2-5x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-4x+1-4x^2+5x-3}{2x-1-\sqrt{4x^2-5x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{2x-1-\sqrt{4x^2-5x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3/x}{2-1/x-\sqrt{4-5/x+3/x^2}} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\lim_{x\to-\infty} (2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 5x + 3}) = +\infty.$$

3. Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}.$$

Solución: El cálculo directo da origen a una forma indeterminada de tipo $\frac{0}{0}$, para evitarla debemos factorizar ambos trinomios.

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}.$$

Si $x \neq 1$, podemos simplificar teniendo: $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} = \dfrac{x-4}{x-2}$, y así,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-4}{x-2} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

4. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x}.$$

Solución: Tanto el numerador como el denominador se anulan cuando x toma el valor 0; por lo tanto, debemos transformar algebraicamente la expresión racionalizando el numerador:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}\\ &= \frac{x+1-(x^2+x+1)}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})} = \frac{-x^2}{x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1})}\\ &= \frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}},\end{aligned}$$

por consiguiente,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \frac{0}{2} = 0.$$

5. Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}.$$

Solución: Usando la fórmula de factorización $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ podemos transformar algebraicamente la expresión de la misma forma que se hizo en el ejercicio anterior, es decir, racionalizando el numerador:

$$\begin{aligned}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x} &= \frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}\\ &= \frac{1-(1-x)}{3x(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}\\ &= \frac{x}{3x(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}\\ &= \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x} = \frac{1}{9}.$$

6. Calcule

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)^3(4x+7)^2}{(3x-4)^3(5x^2+1)}.$$

Solución: Según lo visto para funciones racionales en el ejemplo 2.4.14, para calcular este límite, basta conocer los coeficientes de los términos en x^4 en el numerador y denominador. Así,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^3(4x+7)^2}{(3x-4)^3(5x^2+1)}=\frac{2^3\cdot 16}{3^3\cdot 5}=\frac{128}{135}.$$

7. Calcule

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}).$$

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a} &= \sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}\cdot\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}}\\ &= \frac{bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}}\\ &= \frac{x(b+c/x)}{|x|\sqrt{a+b/x+c/x^2}+x\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{b+c/x}{\sqrt{a+b/x+c/x^2}+\sqrt{a}}=\frac{b}{2\sqrt{a}}.\\ \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}) &= \lim_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{a+b/x+c/x^2}+\sqrt{a}\right]=2\sqrt{a}(+\infty)=+\infty.\end{aligned}$$

8. Analizar el límite de la expresión

$$y=x^{\frac{p}{3}}\left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right]$$

cuando $x\to\infty$, según los valores de p.

Solución:

$$\begin{aligned} x^{\frac{p}{3}}\left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right] &= x^{\frac{p}{3}}\left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right]\cdot\frac{\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4}\right]}{\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4}\right]} \\ &= \frac{x^{\frac{p}{3}}(x^2+1-x^2)}{\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4}\right]} \\ &= \frac{x^{\frac{p}{3}}}{\left[\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2(x^2+1)}+\sqrt[3]{x^4}\right]}\cdot\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{x^{-\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{1}{3}x^{\frac{p-4}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x^{-2}+x^{-4}}+\sqrt[3]{1+x^{-2}}+1} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos: Si $p=4$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=\dfrac{1}{3}$.

Si $p>4$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=\infty$.

Si $p<4$, $\lim\limits_{x\to\infty} y=0$.

9. Dada

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}.$$

a) Resuelva gráficamente la desigualdad $x^2+x-6\leq 0$.

b) Analice los ceros y el signo de la función f.

c) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

d) Bosqueje el gráfico de f.

e) Bosqueje el gráfico de $g(x)=x^2+f(x)$.

Solución:

a) La función $y=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ representa una parábola que corta el eje x en los puntos $x=2$ y $x=-3$; es abierta hacia arriba y su vértice $(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{25}{4})$. Su gráfico es el que muestra la figura 1.4.33. De donde podemos deducir que:

$$x^2+x-6\leq 0 \iff x\in[-3,2].$$

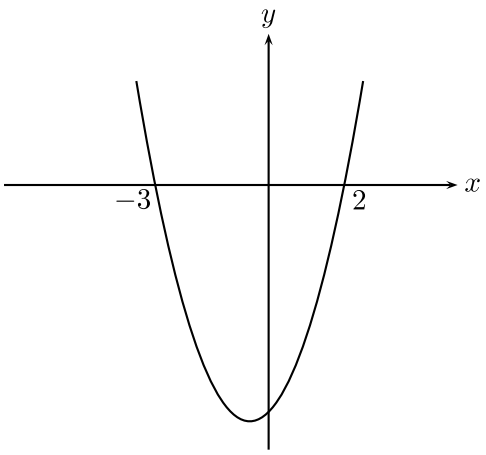


Figura 2.24: Gráfico de $y = x^2 + x - 6$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$; $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$ y no tiene ceros.
Como $x^2 + x - 6 > 0$ en $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ que: $f(x) > 0$ sobre $(-\infty, -3)$ y sobre $(2, +\infty)$; $f(x) < 0$ sobre $(-3, 2)$.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{x^2(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2})} = 0$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty;$$

pues para valores de x menores que -3 la función es positiva.

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty.$$

d) $f(-\frac{1}{2}) = -0,16$; como en $-\frac{1}{2}$ la parábola alcanza su mínimo valor, $f(-\frac{1}{2})$ es el mayor valor que toma f en $(-3, 2)$.

e) $g(x) = x^2 + f(x)$; $D(g) = D(f)$. Como $x^2 \geq 0$, para todo x, la función $g(x)$ es

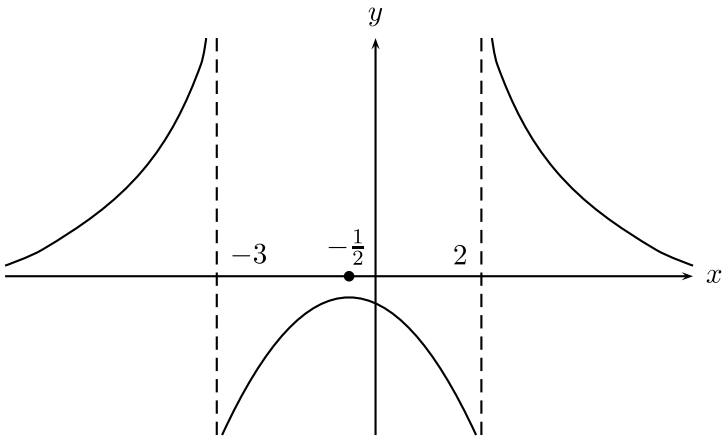


Figura 2.25: Gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$

positiva en $(-\infty, -3)$ y en $(2, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} g(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 + f(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \left(1 + \frac{f(x)}{x^2}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+} (x^2 + f(x)) = \lim_{x\to 2^+} \left(x^2(x-2) + \frac{1}{x-3}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

10. Analice el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$ y bosqueje su gráfico.

Solución: Si $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x(x-1)(x+1)}$, el dominio de f es $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, por lo que el gráfico de f consta de 4 ramas.

Los ceros de $f(x)$:

$$3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

En los puntos $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, el gráfico corta al eje x.

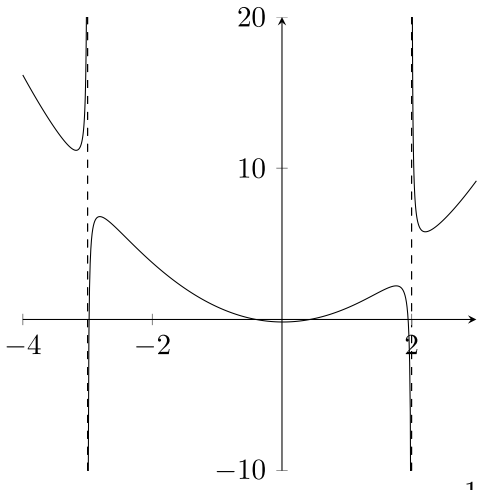


Figura 2.26: Gráfico de $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$

El signo de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$$

Veamos el comportamiento de las parábolas: $3x^2 - 1$, $x^2 - 1$. Del gráfico de ellas se deduce fácilmente que:

$$x^2 - 1 \leq 0 \iff x \in [-1, 1]$$

$$3x^2 - 1 \leq 0 \iff x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

Por tanto:

(i) Sobre $]-\infty, -1[$: $x < 0$; y $\dfrac{3x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 0$, es decir, f es negativa.

(ii) Sobre $\left]-1, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$; $f(x) > 0$.

(iii) Sobre $\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right[$; $f(x) < 0$.

(iv) Sobre $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$; $f(x) > 0$.

(v) Sobre $\left]\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 1\right[$; $f(x) < 0$.

(vi) Sobre $]1, +\infty;[$ $f(x) > 0$.

Para poder bosquejar el gráfico, analizaremos algunos límites. Para ello escribiremos f en la forma, $f(x) = \dfrac{x^2(3 - \frac{1}{x^2})}{x^3(1 - \frac{x}{x^3})}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0^- \\ \lim_{x\to-1^-} f(x) &= \lim_{x\to-1^-} (\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}) = -\frac{1}{2} - 1 + (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty.$$

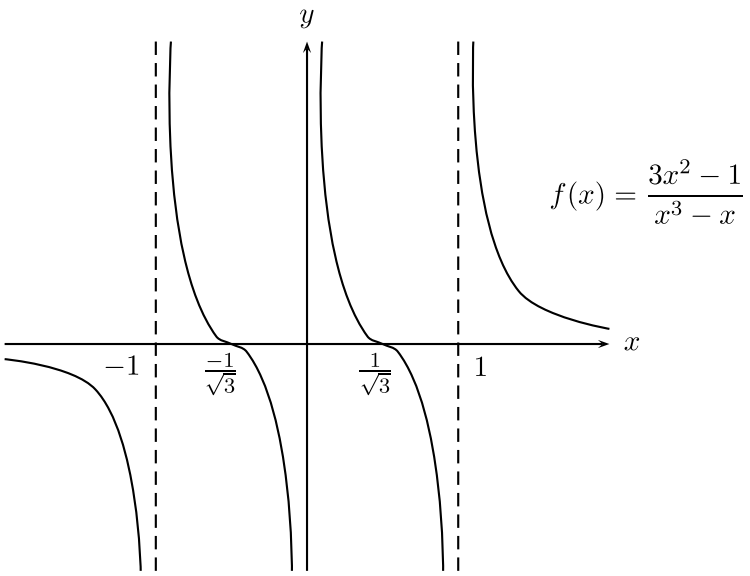


Figura 2.27: Gráfico de $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$

11. Analice el comportamiento de la función $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2}$ y bosqueje el gráfico.

Solución:

a) Primero determinaremos el dominio $D(g)$ de la función.
$x \in D(g) \iff 2x - 3 \geq 0 \iff x \geq \dfrac{3}{2}$.

b) $g(x) = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$.

c) $g(x) \geq 0$; para todo $x \in D(g)$.

d)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x(2-\frac{3}{x})}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{3}{x}}}{\sqrt{x^3}} = 0.$$

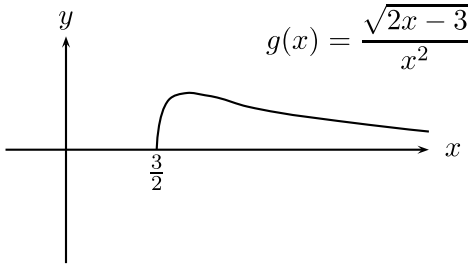


Figura 2.28: Gráfico de $g(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2}$

12. Dada la función:

$$y(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}.$$

a) Encuentre el dominio y el recorrido.

b) Analice el signo de f.

c) Analice la existencia de asíntotas .

d) ¿Existe $x \in D(y)$ tal que $y(x) = -1, y(x) = \dfrac{3}{5}$?

Solución:

a) $D(y) = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - x - 1 \neq 0\}$.

Como $x^2 - x - 1 = 0$ es equivalente a $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, tenemos que

$$D(y) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Para calcular el recorrido debemos despejar x en la expresión que define la función: $y(x^2-x-1)=x^2+x+1$, implica $x^2(y-1)-x(y+1)-(y+1)=0$, lo que nos da:

$$x=\frac{y+1\pm\sqrt{5y^2+2y-3}}{2(y-1)}.$$

Para que x sea un número real debemos imponer la condición

$$5y^2+2y-3\geq 0,$$

desigualdad que se resuelve según lo estudiado en la sección 1.3 y nos da:

$$y\geq\frac{3}{5}\text{ ó }y\leq -1.$$

Así, $R(y)=(-\infty,-1]\cup[\frac{3}{5},\infty)$.

b) Como el polinomio x^2+x+1 es siempre positivo, el signo de la función y corresponde al signo del denominador: $x^2-x-1=0$ que tiene por soluciones $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, por lo tanto $y\geq 0$ cuando $x\leq\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ y cuando $x\geq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. En $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ la función es negativa.

c) Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador una vez eliminados los posibles factores comunes. Por lo cual tenemos las rectas

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ \text{ y }\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para obtener las asíntotas horizontales debemos calcular $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y(x)$.

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}=\frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}.$$

Esto nos dice que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y(x)=1$.

Es decir, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal.

d) Del primer item sabemos que

$$x=\frac{y+1\pm\sqrt{5y^2+2y-3}}{2(y-1)}.$$

Haciendo $y=-1$ nos da $x=0$ y si y toma el valor $\dfrac{3}{5}$ tenemos que $x=-2$.

Observe que la curva corta a su asíntota $y=1$.

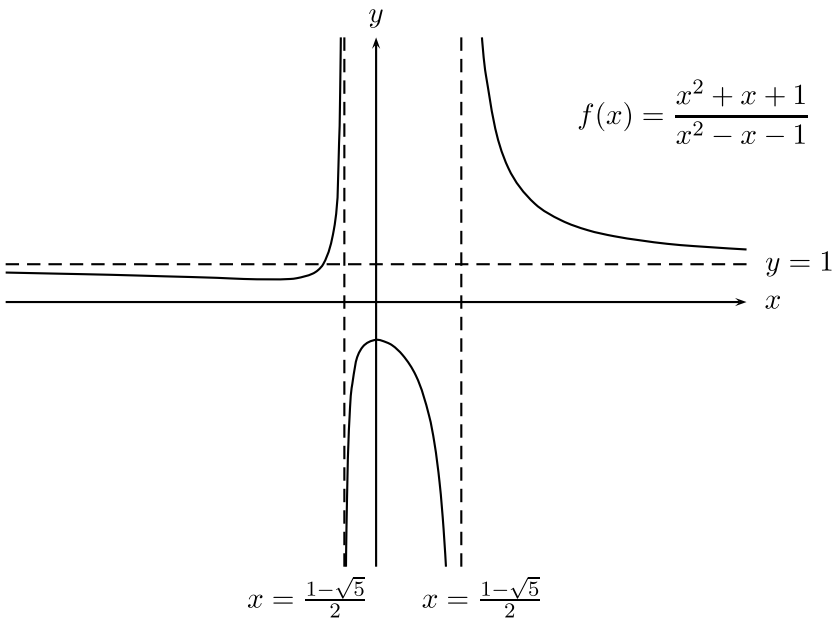


Figura 2.29: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$

13. **Asíntotas oblicuas de un gráfico de una función racional**

Dada la función racional

$$f(x) = \frac{x^2-5x+4}{2x+1},$$

a) Encuentre sus asíntotas verticales.

b) Encuentre sus asíntotas horizontales.

c) Efectuando la división de polinomios entre el numerador y el denominador, demuestre que la recta $L = 4y - 2x + 11 = 0$, es una asíntota oblicua, es decir, cuando $x \to \pm\infty$, la diferencia $|f(x) - L|$ tiende a cero.

Solución:

a) $2x + 1 = 0$ implica que la recta $x = -\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

b) Según lo visto en el ejemplo 2.4.14 , $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, pues el grado del polinomio numerador es mayor que el grado del denominador. Por lo tanto, no hay asíntotas horizontales.

c)

$$\frac{x^2-5x+4}{2x+1} = \frac{x}{2} - \frac{11}{4} + \frac{27}{4(2x+1)},$$

implica que $f(x) - L = \frac{27}{4(2x+1)}$, así, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x) - L| = 0$. Por lo tanto la recta $L = 4y - 2x + 11 = 0$, es una asíntota oblicua.

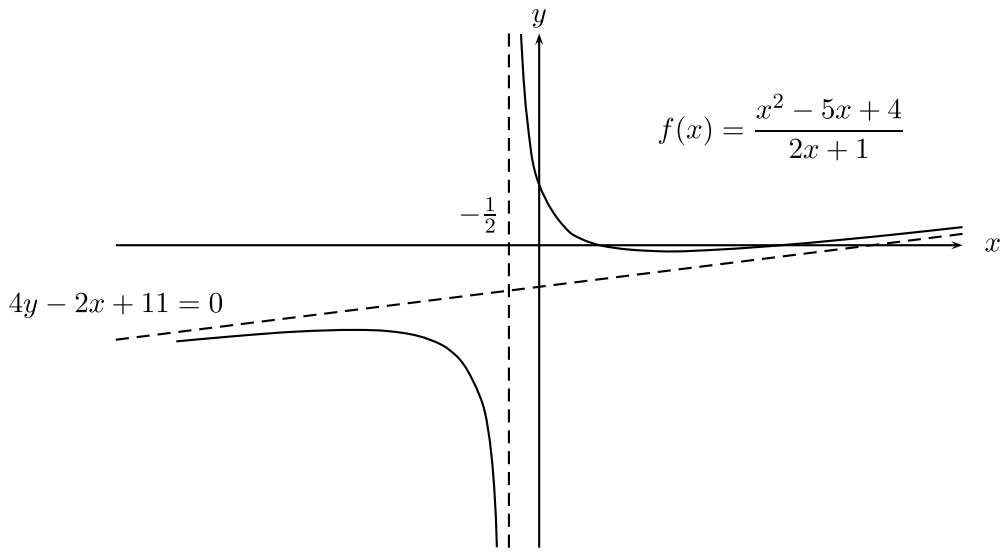


Figura 2.30: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{2x+1}$

2.4.6. Ejercicios propuestos

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4-3x^3+x^2-x+1}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4}$ R: $\dfrac{4}{5}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-4x^3+1}{x^6-x^5-x+1}$ R:. $\dfrac{6}{5}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{x^{p+1}-x^p-x+1}$ R: $\dfrac{n(n+1)}{2p}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ R: $\dfrac{9}{8}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}}$ R: $\sqrt{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+1)^3(4x-5)(x+2)}{x^3(9x+2)(3x-1)}$ R: $\dfrac{32}{27}$.

7. $\lim\limits_{x\to\pm+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+2}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ R: $\begin{cases} 1 & \text{en } +\infty \\ +\infty & \text{en } -\infty \end{cases}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1}-x.$ R: 0.

9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}.$ R: $\begin{cases} 0 & \text{en } +\infty \\ +\infty & \text{en } -\infty \end{cases}$

10. Use la intuición para intentar definir una vecindad de $+\infty$ y de $-\infty$.

11. Dibuje una función que muestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ no significa necesariamente que f sea estrictamente creciente cuando x crece indefinidamente.

12. Bosquejar el gráfico de $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x}$.

13. Demuestre, usando la definición, que $\lim\limits_{x\to x_0} |x| = |x_0|$.

14. Encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de la función racional:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2(2x+3)}{3(x^2-1)}.$$

Grafique las asíntotas y deduzca como se ubica el gráfico de f con respecto a estas asíntotas.

15. Sea

$$f(x) = \frac{(x+2)(x+6)}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

a) Escriba el dominio de f como unión de intervalos.

b) Analice el comportamiento de f cuando x tiende a los extremos de los intervalos que componen el dominio.

c) Demuestre que $f(x) - x - 6 \to 0$ cuando $x \to +\infty$ y que $f(x) + x + 6 \to 0$ cuando $x \to -\infty$.
Indicación: use el ejercicio resuelto 13

d) Deducir que la curva $f(x)$ tiene dos asíntotas oblicuas y ubicar la curva con respecto a estas asíntotas.

16. Demuestre el teorema 2.4.27 parte (iii).

17. Demuestre el teorema 2.4.32.

18. Demuestre el teorema 2.4.20

19. Demuestre el teorema 2.4.35 parte (ii).

20. Enuncie y demuestre un teorema análogo al teorema 2.4.35 para $-\infty$ y 0^-.

2.5. Funciones continuas

2.5.1. Definiciones básicas

Definición 2.5.1 Diremos que una función f es continua en un punto $a \in D(f)$ si, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\mid x - a \mid < \delta$ implica $\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon$.

Según lo visto en la sección 2.4, esta definición puede expresarse diciendo que: $f(x)$ es continua en a si y sólo si :

- Si a es un punto aislado del dominio de la función f ,
  o bién,
- Si a es un punto de acumulación del dominio, entonces se debe cumplir que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Usando los ejemplos y ejercicios de la sección 2.4, tenemos que las funciones constante, lineal no constante, cuadrática y polinomiales son continuas en cada punto de su dominio.

Si la definición 2.5.1 no se cumple, diremos que la función es discontinua en $x = a$. Es decir, una función puede ser discontinua en un punto no aislado del dominio si no existe el límite en el punto , o bién, aun existiendo el límite en el punto este es diferente del valor de la función en dicho punto.

Ejemplo 2.5.2

1. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es discontinua en $x = 0$, pues $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.
2. La función $g(x) = [x]$ es discontinua en $a = 1$, porque a pesar que $g(a) = g(1) = 1$, el $\lim_{x \to 1}[x]$ no existe, como hemos visto en la sección 2.4. Por la misma razón, esta función es discontinua en cada $x = n$, con $n \in \mathbb{Z}$.
3. La función
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$
es discontinua en cada punto de su dominio.

Definición 2.5.3 Diremos que una función f es:

- Continua a la derecha en un punto $a \in D(f)$ si, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $0 < x - a < \delta$ implica $\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon$. Esto significa que:
$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \tag{2.10}$$

- Continua a la izquierda en un punto $a \in D(f)$ si, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que la desigualdad $0 < a - x < \delta$ implica $\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon$. Esto significa que:

$$f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.5.4

1. Es inmediato que una función continua a la derecha y a la izquierda de un punto a, es continua.
2. La función $[x]$ es continua a la derecha en cada valor entero de x, pero es discontinua a la izquierda de tales puntos.
3. La función 3 del ejemplo 2.5.2 es discontinua a la derecha y a la izquierda en cada punto del dominio.

La idea subyacente de la continuidad es que a pequeñas variaciones de la variable independiente le corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente. Más rigurosamente, dado x, la variación de ella suele representarse como Δx y la correspondiente variación de y como Δy, entonces si $y = f(x)$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Con estas notaciones la continuidad puede ser expresada como:

$$f \text{ es continua en } x \iff \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x). \tag{2.12}$$

o equivalentemente:

$$\Delta y \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0.$$

Otra notación usada para expresar la misma idea es representar la variación Δx como h, para hacerla independiente de x. En este caso, la continuidad queda expresada como:

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = f(x) \ , \tag{2.13}$$

es decir,

$$\text{Dado } \epsilon > 0 \ , \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que, si } \mid h \mid < \delta \text{ entonces } \mid f(x + h) - f(x) \mid < \epsilon \ .$$

Si recordamos que tanto x como y son abstracciones de magnitudes físicas, entonces ellas representan su valor exacto (ideal) y $f(x + h)$ o $f(x + \Delta x)$ los valores aproximados que entregan los aparatos de medición con los distintos errores que ellos introducen. En el caso de tener continuidad, podemos trabajar tranquilamente con estos pequeños errores en x, pues sólo implican pequeños errores, despreciables en la práctica, en la magnitud y.

Definición 2.5.5 Diremos que la función f es:

(i) continua, si ella es continua en cada punto de su dominio.

(ii) continua a tramos, si ella es continua excepto en una cantidad finita o en una sucesión de puntos del dominio donde ella es discontinua.

Ejemplo 2.5.6 1. Las funciones lineal, cuadrática, polinomial son continuas.

2. La función $x - [x]$ es continua a tramos, pues es discontinua en cada valor entero de x.

Interpretación geométrica. La continuidad de una función f en un punto a nos dice que si estamos a una distancia menor que ϵ de $f(a)$, existe una distancia δ tal que todos los puntos x que están a una distancia menor que δ del punto a, tienen sus imágenes en la franja $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$. Por tanto, el gráfico de la función queda dentro del rectángulo $(a - \delta, a + \delta) \times (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.

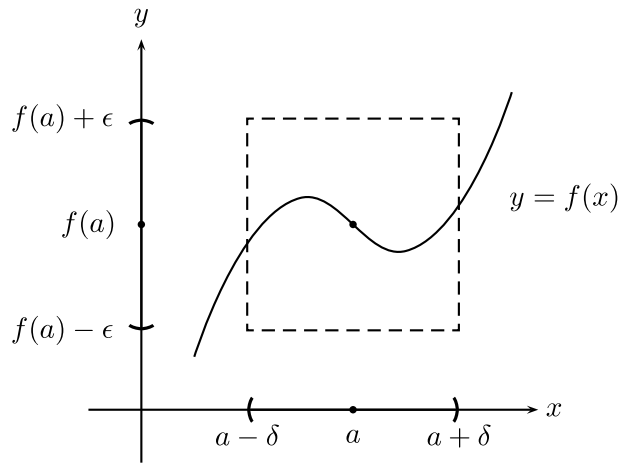


Figura 2.31: Interpretación geométrica de la continuidad

Observación 2.5.7 Observemos que si a es un punto aislado de $D(f) \subset \mathbb{R}$, entonces f es continua en a.Esto implica que toda sucesión es continua pensada como función de $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$, pues los números naturales son aislados en $\mathbb{R}$. Este hecho nos muestra que no tiene sentido la continuidad para funciones de variable discreta , por esta razón es que nos centraremos en las variables continuas, como ya lo habíamos anunciado.

Continuidad y sucesiones. Se puede dar una equivalencia de la definición 2.5.1 a través de sucesiones como lo muestra el siguiente teorema y que a veces es más fácil de utilizar.

Teorema 2.5.8 Para que una función f sea continua en un punto a es necesario y suficiente que para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ se tenga que $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Demostración:

(i) Supongamos que f es continua en un punto a. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\mid x - a \mid < \delta$, entonces $\mid f(x) - f(a) \mid < \epsilon$. Para tal δ, existe N de modo que si $n \geq N$ se tiene que $\mid x_n - a \mid < \delta$. Usando la definición de continuidad 2.5.1, se puede concluir que, $\mid f(x_n) - f(a) \mid < \varepsilon$. Lo cual nos dice que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.

(ii) Recíprocamente, supongamos que f tiene la siguiente propiedad: Dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente hacia a, $f(x_n)$ converge hacia $f(a)$.

Usando el teorema 2.4.30, se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y, por tanto, f es continua en a. □

2.5.2. Continuidad de funciones elementales

Del teorema 2.4.27 se obtiene en forma inmediata el siguiente teorema:

Teorema 2.5.9 Si las funciones f y g son continuas en un punto a, entonces la suma, la diferencia, el producto y el cuociente (cuando $g(a) \neq 0$) de estas funciones son continuas en el punto a.

Ejemplo 2.5.10

1. Todo polinomio es continuo, pues la función constante y la función idéntica son continuas.
2. Toda función racional es continua en todo punto del dominio, es decir, sobre todo $\mathbb{R}$ menos aquellos puntos que anulan el denominador.

Teorema 2.5.11 Si dos funciones $y = f(x), z = g(y)$ son tales que f es continua en un punto a y g es continua en el punto $f(a)$, entonces la función compuesta $g(f(x))$ es continua en el punto a.

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Como f es continua, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Sea $b = f(a)$ e $y_n = f(x_n)$, entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ y usando la continuidad de g en el punto b, tenemos que, $\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(b)$, es decir, $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(a))$. Lo cual significa la continuidad de la función compuesta $g(f(x))$ en el punto a. □

2.5.3. Discontinuidades removibles

Observando los diferentes ejemplos de existencia y cálculo de límites podemos constatar que existen dos tipos de discontinuidades: unas que se deben a la no existencia del límite en el punto y otras que, en cambio, tienen límite. Cuando en un punto el límite existe y no coincide con el valor en el punto, se puede redefinir la función en dicho punto dándole como valor el límite. La nueva función es ahora continua en el punto en cuestión. A este último tipo se le llama **discontinuidades removibles**.

Figura 2.32: Casos de discontinuidades removibles

Ejemplo 2.5.12 1. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ no está definida en $x = 2$, pero puede definirse $f(2) = 4$ de modo que la nueva función resulte ser continua en $x = 2$.

2. No son removibles las discontinuidades en $x = 0$ de las funciones $\dfrac{1}{x}$ tomando la función en $x = 0$ como 0, por no existir el límite en el punto considerado.

2.5.4. Propiedades de las funciones continuas

Teorema 2.5.13 Teorema de Bolzano - Weierstrass
Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración: Supongamos $f(a) > 0, f(b) < 0$. Si $x_0 \in (a, b)$, entonces $f(x_0) = 0$ ó $f(x_0) < 0$ ó $f(x_0) > 0$. Si $f(x_0) = 0$, el teorema está demostrado. Si $f(x_0) > 0$, entonces nos restringimos al intervalo $[a_1, b_1]$ con $a_1 = x_0$ y $b_1 = b$. Si $f(x_0) < 0$, entonces consideramos el intervalo $[a_1, b_1]$ con $a_1 = a$ y $b_1 = x_0$, y tenemos igualmente que $f(a_1) > 0, f(b_1) < 0$. Repitiendo el mismo procedimiento obtenemos una sucesión de intervalos encajonados $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \ldots \subset [a, b]$ de modo que $f(a_n) > 0, f(b_n) < 0$. El método se puede precisar más aún, tomando cada vez el punto medio y así cada intervalo es la mitad del anterior. Por tanto, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ y $b_n - a_n \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Sea $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, demostraremos que

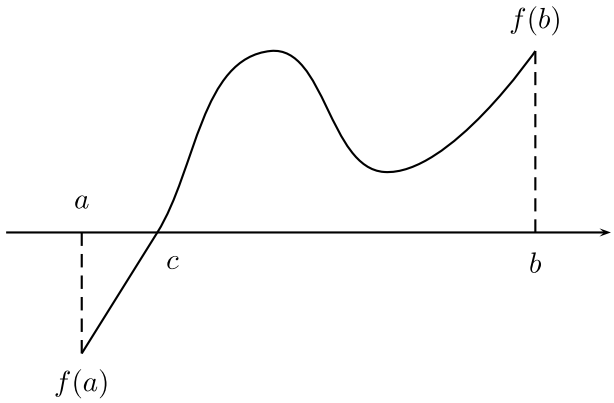


Figura 2.33: Teorema de Bolzano - Weierstrass

$f(c) = 0$. Por ser f continua $f(c) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ y como $f(a_n) > 0$ tenemos, usando las propiedades del límite que, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0$. Análogamente obtenemos que $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$. Del hecho que $f(c) \leq 0$ y $f(c) \geq 0$ concluimos que $f(c) = 0$. □

Observación 2.5.14 1. El teorema 2.5.13 es falso cuando f no es continua, como se puede ver a través de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(0) = 1$ definida en el intervalo $[-1, 1]$. Aunque $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$ no existe ningún punto $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$, lo cual se debe a que la función no es continua en dicho intervalo.

2. Una interesante aplicación del teorema 2.5.13 es la aproximación de raíces no racionales de polinomios que mostraremos en los ejercicios resueltos.

Teorema 2.5.15 Teorema del valor intermedio o de Darboux

Una función continua en el intervalo $[a, b]$ toma todos los valores entre dos valores diferentes. Es decir, si $f(a) \neq f(b)$, entonces dado y entre $f(a)$ y $f(b)$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Demostración: Sea $g(x) = f(x) - y$. Supongamos que $f(a) < f(b)$, entonces $y \in (f(a), f(b))$ y tenemos que $g(a) = f(a) - y < 0$ y $g(b) = f(b) - y > 0$. Aplicando el teorema 2.5.13, podemos asegurar la existencia de un punto c tal que $g(c) = 0$, lo que es equivalente a tener que $f(c) = y$, y por tanto, se cumple el teorema. □

Observación 2.5.16 1. Si f no es continua el teorema no se cumple. Consideremos $f(x) = [x]$ en el intervalo $[1, 2]$ y démonos $y = \dfrac{1}{2}$. Para este y no existe ningún c tal que $f(c) = \dfrac{1}{2}$.

m

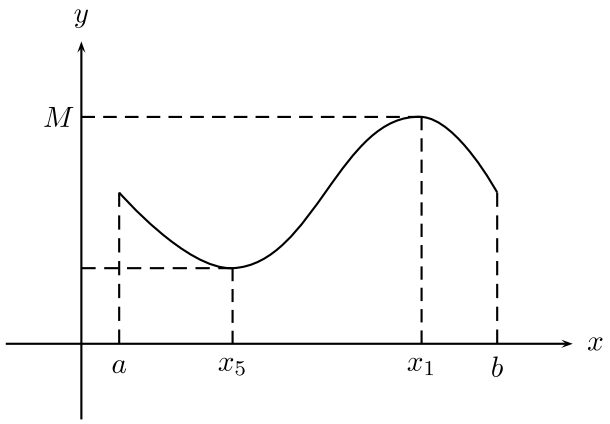


Figura 2.34: Teorema de Weierstrass

2. El teorema 2.5.15 hace coincidir la intuición geométrica con el concepto analítico de continuidad, es decir, el gráfico de una función continua es una curva continua.

Teorema 2.5.17 Teorema de Weierstrass

Una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es acotada y alcanza su valor máximo M y su valor mínimo m. Es decir, existen puntos $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = M$ y $f(x_2) = m$.

Demostración: Daremos una demostración con pocos detalles.

Por ser f continua en $[a, b]$ es posible, dado $\epsilon = 1$, encontrar un δ tal que si x_1, x_2 son tales que $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$, entonces $\mid f(x_1) - f(x_2) \mid < 1$ (*). Eligiendo n tal que $\dfrac{b-a}{n} < \delta$, por principio de Arquímedes, tenemos que $[a, b]$ queda dividido en n subintervalos $[a_k, a_{k+1}]$ de longitud menor que δ.

Para todo $x \in [a_k, a_{k+1}]$ se tiene que $\mid f(x) - f(a_k) \mid < 1$, de donde

$$\mid f(x) \mid < 1 + \mid f(a_k) \mid \quad ; \quad k = 1, \ldots, n.$$

Definiendo $C = \sup\{\mid f(a_k) \mid ; k = 1, \ldots n\}$, podemos concluir que $\mid f(x) \mid < 1 + C$, para todo $x \in [a, b]$. Por tanto f es acotada.

En virtud del axioma del supremo, el conjunto $H = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ tiene supremo M y tiene ínfimo m. Demostraremos que f alcanza el valor M. Supongamos que no alcanza el valor M, es decir, $f(x) \neq M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces la función $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ es positiva y continua en todo $[a, b]$. Usando el resultado de la primera parte de este mismo

teorema, tenemos que g es acotada. Sea n una cota superior para los valores de g. Así, $g(x) < N$, lo que implica que,

$$M - f(x) > \frac{1}{N} .$$

Por tanto, $f(x) < M - \frac{1}{N}$ para todo $x \in [a, b]$, lo cual nos dice que $\sup_{x\in[a,b]} f(x) < M$, lo que contradice la definición de M. Por tanto, debe existir un $x_1 \in [a, b]$ de modo que $f(x_1) = M$. Para ver que la función alcanza su mínimo se procede de forma análoga y se deja de ejercicio. □

Observación 2.5.18 La propiedad (*) usada en la demostración es la de continuidad uniforme que es otra propiedad de las funciones continuas que tienen un intervalo de la forma $[a, b]$ como dominio.

Corolario 2.5.19 Conservando las notaciones del teorema 2.5.17, se tiene que el recorrido de una función continua en un intervalo $[a, b]$ es $[m, M]$.

Demostración:
Es consecuencia directa de los teoremas 2.5.15 y 2.5.17. □

Ejemplo 2.5.20

1. Como hemos visto en la sección 2.3, $f(x) = x^2$ definida en $[0, 2]$ alcanza su mínimo en $x = 0$ y su máximo valor 4 en $x = 2$.

2. Si el dominio no es un intervalo cerrado y acotado, por ejemplo, la misma función anterior con dominio $[0, 2)$, la función no alcanza su máximo que sigue siendo 4.

3. Si la función no es continua, por ejemplo, $g(x) = \frac{1}{x}$, $g(0) = 1$ en $[-1, 1]$ no es acotada y por tanto no tiene máximo ni mínimo.

Teorema 2.5.21 Una función estrictamente creciente (o decreciente) que toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ es continua en $[a, b]$.

Demostración:
Supongamos que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, es estrictamente creciente. Entonces si $h > 0$, $f(x) < f(x + h)$. Manteniendo fijo x, la función $g(h) = f(x + h) - f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, b - x]$ y como f toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$, $g(h)$ toma todos los valores entre 0 y $f(b) - f(x)$ en forma creciente. Por tanto, $\lim_{h\to 0^+} g(h) = 0$ y obtenemos la continuidad de f en x. Como x es cualquier punto del dominio, f es continua en $[a, b]$. □

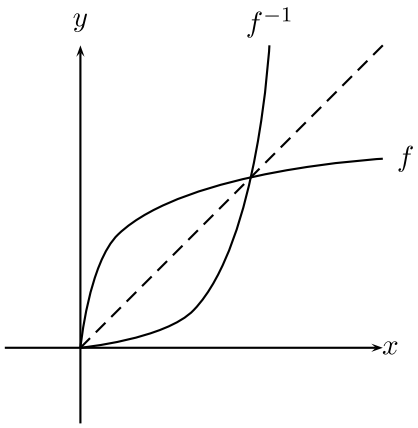


Figura 2.35: Continuidad de la inversa

Teorema 2.5.22 Si $y = f(x)$ es continua y estrictamente creciente (o decreciente) en $[a, b]$, entonces su inversa $y = g(x)$ definida sobre el recorrido de f, $R(f) = [m, M]$, es estrictamente creciente (o decreciente) y continua.

Demostración: La demostración es consecuencia directa del teorema 2.5.21 y del ejercicio resuelto 10 de la sección 4.2. □

Ejemplo 2.5.23 1. Si n es par, $f(x) = x^n$ es una función estrictamente creciente, positiva con $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Por ser continua toma todos los valores entre 0 y $+\infty$. Usando el teorema 2.5.22 podemos concluir que su inversa $g(x) = \sqrt[n]{x}$ definida en $[0, +\infty)$ es también estrictamente creciente y continua.

2.5.5. Ejercicios resueltos

1. Dada la función:
$$f(x) = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2},$$
con $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$. Analice la continuidad.

Solución:

- Veamos primero cuál es el dominio de la función. Por ser una función racional su dominio es el conjunto:
$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, a_2x^2 + b_2x + c_2 \neq 0\right\}.$$

Para conocer exactamente los puntos que debemos excluir, debemos resolver la ecuación de segundo grado:

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0.$$

Resolviendo la ecuación vemos que,

$$x = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2},$$

entonces,

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{b_2}{2a_2}\right\}$ si $b_2^2 = 4a_2c_2$.
- $D(f) = \mathbb{R} - \{x_1, x_2\}$ si $b_2^2 - 4a_2c_2 > 0$.
- $D(f) = \mathbb{R}$ si $b_2^2 - 4a_2c_2 < 0$.

- Si $D(f) = \mathbb{R}$, entonces la función es continua en todo punto, pues el denominador no se anula nunca y es cuociente de funciones continuas.
  Cuando $b_2^2 - 4a_2c_2 > 0$, la función es continua en su dominio y no está definida en los puntos $x_1 = \dfrac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$ y $x_2 = \dfrac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$.
  Si $b_2^2 = 4a_2c_2$, entonces f es continua en su dominio y no está definida en $x = -\dfrac{b_2}{2a_2}$.

2. Analice la continuidad de la función definida mediante un proceso de límite:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}, \text{ con } x \in \mathbb{R}.$$

Solución:

- Si $x = 0$, entonces $f(x) = 1$.
- Si $x = 1$, entonces $f(x) = \frac{1}{2}$.
- Si $x \in (0,1)$, entonces $f(x) = 1$. Esto se debe a que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $x \in (0,1)$.
- Si $x \in (1,\infty)$, entonces $f(x) = 0$. Esto se debe a que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ cuando $x > 1$.

Por tanto, f tiene una discontinuidad no removible en $x = 1$; en todos los demás puntos del dominio la función es continua.

3. Encuentre los puntos de discontinuidad de la función **parte entera** de x^2, $[x^2]$, y bosqueje su gráfico.

Solución: $f(x) = [x^2]$. Como $x^2 \geq 0$, el recorrido de f, $R(f) = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$.

Si $x \in [0, 1)$, entonces $x^2 \in [0, 1)$, lo que implica que $[x^2] = 0$.

Si $[x^2] = 1$, entonces $x^2 \in [1, 2)$, por consiguiente $1 \leq x < \sqrt{2}$.

En general, si $[x^2] = n$, entonces $x^2 \in [n, n+1)$. De donde deducimos que $\sqrt{n} \leq x < \sqrt{n+1}$. Así, podemos apreciar que los puntos de discontinuidad son: $1, \sqrt{2}, \ldots, \ldots, \sqrt{n}, \ldots$.

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Esto nos dice que los intervalos donde f es continua tienen longitud cada vez más pequeña a medida que crece n.

4. Sea $f(x)$ una función continua en $[0, 1]$. Supongamos que $f(x) \in \mathbb{Q}$, para todo x y que $f(0{,}5) = 0{,}5$. Demuestre que $f(x)$ es la función constante con valor 0,5.

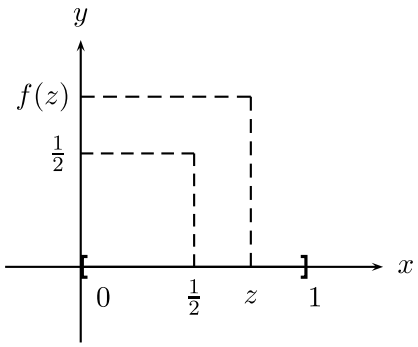


Figura 2.36:

Solución: Supongamos por contradicción que existe $z \in [0, 1]$ tal que $f(z) \neq \frac{1}{2}$. Supongamos en particular que $f(z) > \frac{1}{2}$, entonces el intervalo $\left[\frac{1}{2}, f(z)\right]$ contiene infinitos números irracionales u. Usando el **teorema del valor intermedio** , 2.5.15, tenemos que dado $u \in \left[\frac{1}{2}, f(z)\right]$, debe existir $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = u$. Lo cual contradice la hipótesis que f toma solamente valores racionales. Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{2}$, para todo $x \in [0, 1]$.

5. Sea $f(x) = x^2 - 2$ en $[0, 3]$ y

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ en } [0,3] \\ L \text{ en } [3,5]\,, \end{cases}$$

donde L es la recta $y = ax + b$. Calcule a y b de modo que:

a) L pase por el origen y la función $h(x)$ sea continua en $x = 3$.

b) L tenga pendiente -2 y $h(x)$ sea continua en $x = 3$.

Solución:

a) Si L pasa por el origen, entonces $b = 0$. Para que $h(x)$ sea continua en $x = 3$, basta que L pase por el punto $(3, f(3)) = (3, 7)$. Por lo tanto, $a = \dfrac{7}{3}$. Entonces tenemos que:

$$h(x) = \begin{cases} (x^2 - 2) \text{ en } [0,3] \\ \dfrac{7}{3}x \text{ en } [3,5]\,, \end{cases} \quad ,$$

es continua en $x = 3$.
Su gráfico es:

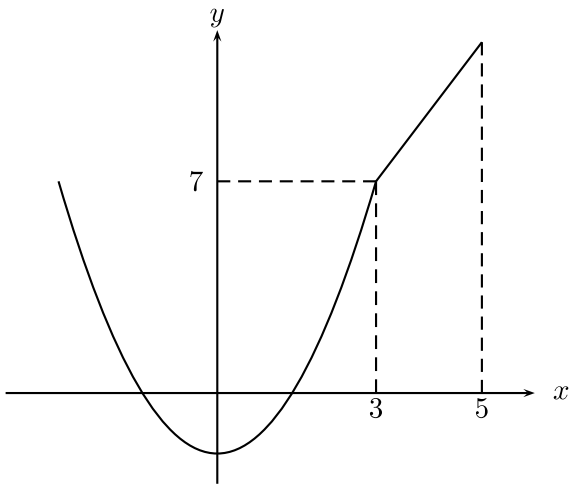


Figura 2.37:

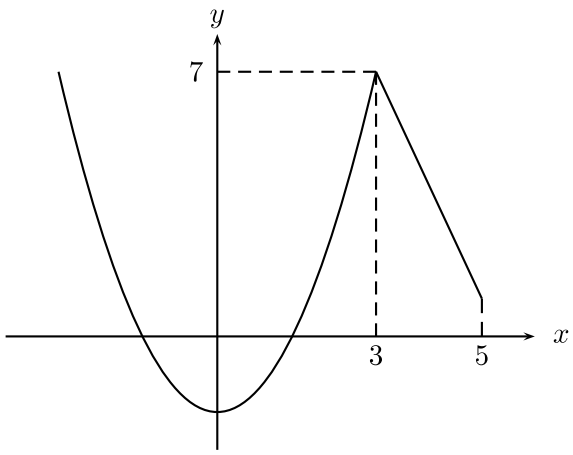


Figura 2.38:

b) En este caso la recta L pasa por el punto $(3, f(3)) = (3, 7)$ y tiene pendiente -2, por lo tanto su ecuación es: $y - 7 = -2(x - 3)$, es decir, $y = -2x + 13$.
Su gráfico es:

6. Sea $f(x)$ una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que satisface la relación:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

a) Calcule $f(0), f(n)$ con $n \in \mathbb{N}$, $f(k)$ con $k \in \mathbb{Z}$, $f(r)$ con $r \in \mathbb{Q}$.

b) Si f es continua, calcule $f(x)$ donde x es un número irracional.

c) Demuestre que $f(x) = cx$, donde c es una constante.

Solución:

a) $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, lo que implica $f(0) = 0$.
$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$.
$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 2f(1) + f(1) = 3f(1)$.
En general, tenemos que $f(n) = nf(1)$, cuando n es un número natural.
Ahora calcularemos $f(-n)$, con $n \in \mathbb{N}$. $f(0) = f(1 - 1) = f(1) + f(-1) = 0$, entonces $f(-1) = -f(1)$. Esto nos permite calcular $f(-n) = -nf(1)$.
Sea $x \in \mathbb{R}$. Como $f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, inductivamente se tiene que $f(nx) = nf(x)$.

$f(1) = f(n\frac{1}{n}) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, implica $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$.

Sea r un número racional, $r = \frac{p}{q}$, entonces

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p\frac{1}{q}f(1) = rf(1).$$

b) Si x es un número irracional, entonces x es el límite de una sucesión de números racionales:

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n \ , \ r_n \in \mathbb{Q}.$$

Así,

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} r_n).$$

Como f es una función continua, el teorema 2.5.8, permite escribir

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = f(1)x.$$

c) De los cálculos hechos en los items anteriores se tiene que

$$f(x) = f(1)x \ , \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

lo cual puede ser expresado como

$$f(x) = cx \ , \text{ con } c = f(1).$$

7. Analizar la continuidad de la función definida en el ejercicio resuelto 5 la sección 2.3:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q},\ p \text{ y } q \text{ son primos relativos.} \end{cases} \ ,$$

Solución: Esta función es continua para todos los irracionales y discontinua en todos los racionales. En efecto,

a) Sea x_0 un número irracional en $[0,1]$, entonces $f(x_0) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos el conjunto finito $F = \left\{q \in \mathbb{N} : \ q \leq \frac{1}{\epsilon}\right\}$.

Dejando $q \in F$ fijo , de las fracciones $\frac{p}{q}$, con $p \in \{0, ...q-1\}$ tomemos p^*, el mayor natural que satisface $\frac{p^*}{q} < x_0$. Como F es finito, existe la mayor de las

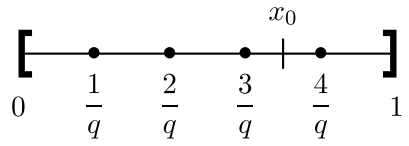


Figura 2.39:

fracciones $\frac{p^*}{q}$, para todo $q \in F$. Entonces existe $r' = \frac{p'}{q'}$ la mayor fracción con denominador en F menor que x_0.

Del mismo modo podemos encontrar $r'' = \frac{p''}{q''}$, la menor fracción con denominador en F, tal que $x_0 < \frac{p''}{q''}$.

Esto nos dice que el intervalo (r', r'') no contiene números racionales con denominador en F.

Escribiendo $\delta = \text{mín}\{x_0 - r', r'' - x_0\}$ tenemos que, si $0 < \left|\frac{p}{q} - x_0\right| < \delta$, entonces $\frac{p}{q}$ no pertenece al conjunto F, lo que implica $q > \frac{1}{\epsilon}$. Es decir,

$$\left|f(x_0) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{1}{q}\right| < \epsilon.$$

Por lo tanto, f es continua en el número irracional x_0.

b) Sea $x_0 \in \mathbb{Q}$, entonces $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$. Dado cualquier $\delta > 0$, en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, existen infinitos irracionales x para los cuales se tiene

$$|f(x_0) - f(x)| = |f(x_0)| = \frac{1}{q_0} > \epsilon.$$

Por lo cual f no puede ser continua en ningún número racional.

8. *a*) Demuestre que $f(x) = |x|$ es continua en cada punto $x \in \mathbb{R}$.

b) Analice la continuidad de $g(x) = \frac{x}{|x|}$ cuando $x \neq 0$, y $g(0) = 0$.

Solución: Sea x_0 un número real cualquiera.

a) Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \epsilon$ tal que, si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \epsilon$.

b) Si $x \neq 0$, el cuociente de funciones continuas $\dfrac{x}{|x|}$ es continuo, según teorema 2.5.9. Si $x = 0$, debemos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{-x} = -1.$$

Como los límites laterales son distintos, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe, y por consiguiente, g es discontinua en $x = 0$.

9. Sea

$$h(x) = \frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}.$$

a) Analice la continuidad de h en cada punto de su dominio.

b) ¿ Es posible extender h a $x = 0$, de modo que sea continua ?

Solución:

a) Debemos notar que $h(x)$ es un número real si y sólo si $x \neq 0$ y $25 - x^2 \geq 0$, es decir,

$$D(h) = [-5, 0) \cup (0, 5].$$

En virtud del teorema 2.5.9, h es continua en todo punto del dominio.

b) Si $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ existe, entonces la función h puede extenderse continuamente al intervalo $[-5, 5]$.

Transformando algebraicamente la expresión tenemos,

$$\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x} = \frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x} \cdot \frac{5 + \sqrt{25 - x^2}}{5 + \sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{5 + \sqrt{25 - x^2}}.$$

Esto implica que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$. Por esta razón es posible extender el dominio de la función, definiendo $h(0) = 0$ y la función extendida es continua sobre $[-5, 5]$.

10. Calcule a, b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^2} - 1} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{4x + 1} - 3} & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

sea continua en todo punto de su dominio.

Solución: Por teorema 2.5.9 y ejemplo 2.5.23, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0), (0, 2)$ y $(2, +\infty)$. Los puntos a analizar son $x = 0$ y $x = 2$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2} = 2.$$

Esto nos dice que la recta $y = ax + b$ debe pasar por el punto $(0, 2)$.

En el punto $x = 2$ tanto el numerador como el denominador se anulan, una posibilidad de evitar esta indeterminación es transformar algebraicamente la expresión amplificando por las expresiones conjugadas del numerador y del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} &= \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{[x^2-(x+2)](\sqrt{4x+1+3})}{[(4x+1)-9][x+\sqrt{x+2}]} = \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} \end{aligned}$$

entonces,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \frac{9}{8}.$$

Por esta razón la recta $y = ax + b$ debe pasar por el punto $\left(2, \frac{9}{8}\right)$. Así, vemos que

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2-\frac{9}{8}}{0-2} = -\frac{7}{16}. \\ b &= 2 \\ \text{Así, } f(x) &= -\frac{7}{16}x + 2, \text{ sobre } [0, 2]. \end{aligned}$$

11. *a*) Encuentre el máximo de $y = x^2(4x^2 - x^2)$ cuando x varía en $[0, 2a]$.

    b) Encontrar el mínimo de $\dfrac{a+x}{a-x} + \dfrac{a-x}{a+x}$, con $x \in (-a, a)$:

Solución:

a) $y(x) = x^2(4a^2 - x^2)$ es continua en $[0, 2a]$. Por teorema de Weierstrass , teorema 2.5.17, existe x_1 tal que $y(x_1) = M$ es el máximo valor de la función y. Usando que un producto de dos factores variables cuya suma es constante, toma su valor máximo cuando los dos factores son iguales.

La suma de los factores es $x^2 + 4a^2 - x^2 = 4a^2$, entonces debemos resolver la ecuación:

$$x^2 = 4a^2 - x^2, \text{ que tiene por solución } x = a\sqrt{2}.$$

El máximo valor que toma y es $y(a\sqrt{2}) = 2a^2(4a^2 - 2a^2) = 4a^2$.

b) Usando un resultado análogo al anterior tenemos que una suma de dos factores con producto constante es mínima cuando ambos factores son iguales, tenemos que siendo $\dfrac{a+x}{a-x}\dfrac{a-x}{a+x} = 1$, la solución al problema la obtenemos resolviendo la ecuación: $\dfrac{a+x}{a-x} = \dfrac{a-x}{a+x}$, lo que implica $x = 0$.

12. Encuentre el máximo y mínimo valor, si es que existen, que toma la función:

$$y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}.$$

Solución: Estudiemos previamente el recorrido de la función. Despejando la variable x en la ecuación que define la función tenemos,

$$yx^2 - 2yx + y - x^2 + 6x - 8 = 0,$$

lo que nos da los valores

$$x = \frac{3 - y \pm \sqrt{3y+1}}{1-y}.$$

Como x debe ser un número real $3y + 1 \geq 0$, de donde $y \geq -\dfrac{1}{3}$. Entonces $y \in [-\frac{1}{3}, 1) \cup (1, +\infty)$. Por consiguiente su mínimo valor es $-\dfrac{1}{3}$ que lo alcanza en $x = \dfrac{5}{2}$. y no tiene valor máximo pues, y toma valores entre $(1, +\infty)$.

13. Probar que el polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 1$ tiene a lo más dos raíces reales. Localice estas raíces aproximadamente.

Solución:

$p(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$, entonces si existen $x_1 < x_2$ tal que $p(x_1) \cdot p(x_2) < 0$, aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass, se tiene que existe al menos un punto c, $x_1 < c < x_2$ con $p(c) = 0$.

Apliquemos este criterio. Como los coeficientes de $p(x)$ son cercanos a 0, busquemos las raíces en el mismo rango.

$$p(-1) = 1 \ \ , p(0) = -1 \ \ , p(1) = -1 \ \ , p(2) = 7.$$

Entonces entre -1 y 0 y entre 1 y 2 debe haber soluciones de $p(x) = 0$. Busquemos la raíz c entre $-1 < c < 0$.

$$\begin{array}{lll}
p(-0,5) & = -0,8125 & \Longrightarrow \quad -1 < c < -0,5 \\
p(-0,75) & = -0,2616 & \Longrightarrow \quad -1 < c < -0,75 \\
p(-0,80) & = -0,0784 & \Longrightarrow \quad -1 < c < -0,80 \\
p(-0,90) & = 0,3851 & \Longrightarrow \quad -0,90 < c < -0,80 \\
p(-0,85) & = 0,1361 & \Longrightarrow \quad -0,85 < c < -0,80 \\
p(-0,83) & = 0,0463 & \Longrightarrow \quad -0,83 < c < -0,80 \\
p(-0,82) & = 0,0034 & \Longrightarrow \quad -0,82 < c < -0,80 \\
p(-0,81) & = -0,003 & \Longrightarrow \quad -0,82 < c < -0,81 \\
p(-0,815) & = -0,0174 & \Longrightarrow \quad -0,820 < c < -0,815 \\
p(-0,818) & = -0,04 & \Longrightarrow \quad -0,820 < c < -0,818 \\
p(-0,819) & = -0,0007 & .
\end{array}$$

Podemos seguir si queremos una aproximación mayor, pero con este error del orden de 10^{-4} es más que suficiente para una gran gama de problemas de ingeniería.

Concluimos que existe $c \approx -0,819$ tal que $p(c) = 0$. De igual forma encontramos $p(1,3804) = 0,0005$, entonces otra raíz es aproximadamente $1,3804$.

14. Encuentre los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{(x-3)(x+1)^2(x^2+4x+4)}{x^2-3x+2} \geq 0$$

Solución:

Sea $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+1)^2(x^2+4x+4)}{x^2-3x+2}$. El numerador y el denominador son funciones continuas en $\mathbb{R}$; por lo tanto, sólo en sus raíces reales pueden cambiar de signo.

Sea $p(x) = (x-3)(x+1)^2(x^2+4x+4)$, entonces las raíces reales de $p(x)$ son $x = 3$ y $x = -1$. Por otro lado, $q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, se anula en $x = 1$ y $x = 2$, por lo tanto, estos puntos no pertenecen al dominio de f. Veamos los signos de $f(x)$ en la siguiente tabla:

	$-\infty$	-1		1		2		3	$+\infty$
p	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
q	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$-$	0	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$

Tabla de signos.

Luego $f(x) \geq 0$ en $\{-1\} \cup (1,2) \cup [3,+\infty)$. Observemos que el análisis de desigualdades por este método sólo tiene sentido si las funciones involucradas son continuas.

15. Solucione gráficamente el siguiente problema: Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que asume cada uno de sus valores exactamente dos veces, entonces f no puede ser continua.

Solución:

Supongamos que f es continua. Entonces sean $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, dos puntos donde ella asume el supremo. Graficando tenemos:

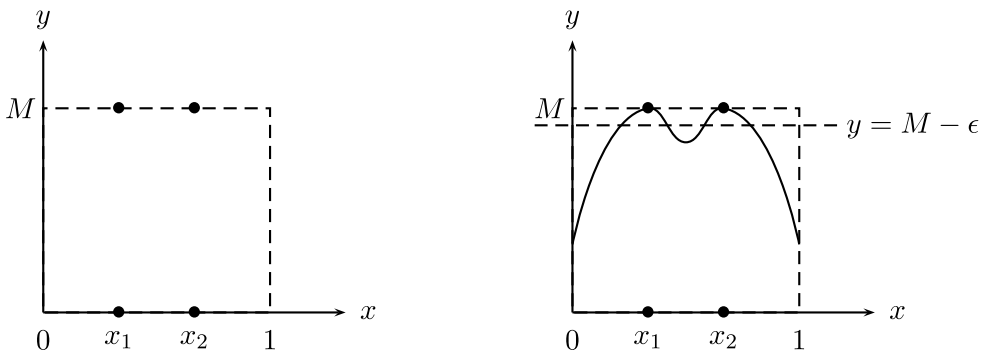


Figura 2.40: La función f no puede ser contínua

Vemos que no podemos completar el gráfico, pues cualquier recta $y = M - \varepsilon$, ε pequeño, cortaría al menos en cuatro partes el gráfico, lo que contradiría la hipótesis de asumir exactamente dos veces. Esto es posible sólo si $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$, como en la figura 2.41.

Pero, como podemos ver, el mínimo sólo se alcanza una vez, y si lo alcanzara dos veces se tendría el mismo problema anterior. Por tanto, f no puede ser continua.

16. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pruebe que:

(i) f es inyectiva en $[0,1]$.

(ii) $f(f(x)) = x$, para todo $x \in [0,1]$. Es decir, $f = f^{-1}$.

(iii) f sólo es continua en $x = \dfrac{1}{2}$.

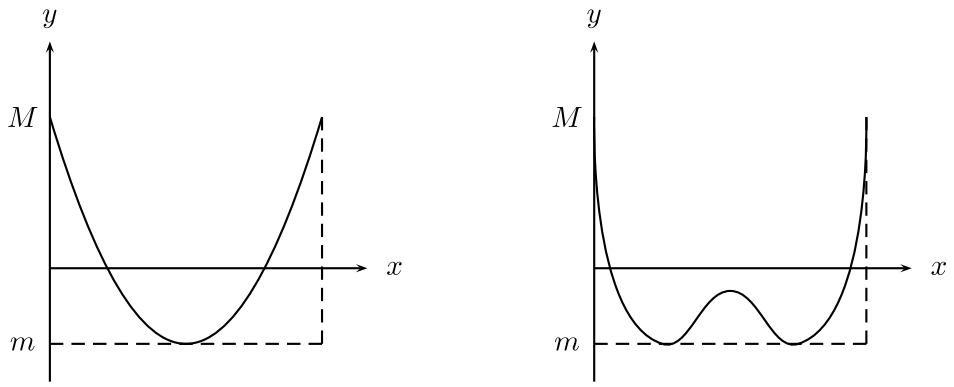


Figura 2.41: La función f no puede ser contínua

Solución:

(i) Si $x_1 \neq x_2$ y si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces, si x_1 y x_2 son racionales tendríamos $x_1 = x_2$, lo que no puede ser. Si ambos son irracionales, entonces $1-x_1 = 1-x_2$ lo cual tampoco puede suceder. Si x_1 es racional y x_2 es irracional tendríamos $x_1 = 1-x_2$, lo que no puede ser pues $1-x_2$ es irracional. Luego $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $f(f(x)) = f(x) = x$.
Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $f(f(x)) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$.

(iii) Sea $a = \dfrac{1}{2}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $|x - \dfrac{1}{2}| < \delta = \varepsilon$. Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $|f(x) - \dfrac{1}{2}| = |x - \dfrac{1}{2}| < \varepsilon$.

Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $|f(x) - \dfrac{1}{2}| = |1 - x - \dfrac{1}{2}| = |\dfrac{1}{2} - x| = |x - \dfrac{1}{2}| =< \varepsilon$.

Si $a \neq \dfrac{1}{2}$. Supongamos, por ejemplo, $a \in \mathbb{Q}$ y $a < \dfrac{1}{2}$, entonces si f es continua en a, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(a)| = |f(x) - a| < \varepsilon$. Sea $\varepsilon = \dfrac{1-2a}{2} = \dfrac{1}{2} - a$ y sea $x_n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ tal que $x_n \to a$. sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ si $|x_n - a| < \delta$, entonces

$$|f(x_n) - a| = |1 - x_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2} - a.$$

Luego $1 - x_n - a < \dfrac{1}{2} - a$ implica $x_n > \dfrac{1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que es absurdo. De manera similar se prueban los otros casos.

2.5.6. Ejercicios propuestos

1. Analice la continuidad en cada punto del dominio de las siguientes funciones:

   a) $\sqrt{x - [x]}$.

   b) $[x] + \sqrt{x - [x]}$.

   c) $\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

   d) $\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$.

2. Sea $f(x)$= signo de x, que se define como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   a) Estudie la continuidad de f en cada punto de su dominio.

   b) Clasifique las discontinuidades en removibles y no removibles de cada una de las siguientes funciones:

      1) $f(x)$.
      2) $g(x) = f^2(x)$.
      3) $h(x) = 1 - f^2(x)$.
      4) $i(x) = \dfrac{1}{f^2(x)}$.
      5) $k(x) = \dfrac{1}{1 - f^2(x)}$.

   c) Bosqueje el gráfico de cada una de las funciones dadas en (b).

3. Analice la continuidad de cada una de las siguientes funciones y clasifique las discontinuidades.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

   b) $g(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

c) $h(x) = \dfrac{1-x}{1-x^2}$.

4. Encontrar el máximo valor, si es que existe, de

$$y(x) = (3+x^2)(11-x^2), \text{ en } [-\sqrt{11}, \sqrt{11}].$$

5. Demuestre que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

es continua solamente en $x = 0$.

6. Demuestre que

$$y = \frac{x^2-4}{x^2+2x-3},$$

no tiene máximo ni mínimo en su dominio. ¿Contradice esto el teorema de Weierss-trass?

7. Analice la continuidad de

$$g(x) = \begin{cases} -4x + \dfrac{8x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

8. Analice la continuidad en cada punto del dominio de la función

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{18x - 2x^2}{|9-x^2|} & \text{si } x \neq 3, -3 \\ 11 & \text{si } x = 3 \\ 7 & \text{si } x = -3. \end{cases}$$

9. Analice la continuidad de

$$h(x) = x + [2x].$$

10. Calcular a y b de modo que la siguiente función resulte continua

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < -3 \\ ax + b & \text{si } 3 \leq x \leq 4 \\ |4 - x^2| & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Grafique g.

11. Calcular a y b de modo que la siguiente función resulte continua

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}-4} & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Grafique h.

12. Analice la continuidad de las siguientes funciones. Para los puntos de discontinuidad, diga si son removibles o no.

a) $j(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$,

b) $k(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

13. Demuestre que si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, entonces $s(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$ y $i(x) = \text{ínf}\{f(x), g(x)\}$. Indicación: ver ejercicio propuesto 10 de la sección 2.5.

14. *a)* Demuestre que si f es continua en un punto x_0 y g es discontinua en x_0, entonces $f+g$ es discontinua en x_0.

b) ¿Puede $f+g$ ser continua en un punto cuando f y g son discontinuas en él ?

15. Localice aproximadamente dos raíces reales de $p(x) = x^4 - 2,42x^2 + 1,4641$.

16. Encuentre los $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la desigualdad:

$$\frac{x^2-x+2}{x^3-3x^2+6x-4} \leq 0.$$

Bibliografía del Segundo Capítulo

[AA85] M.A. Laurentiev y otros A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Alianza Universidad, 1985.

[Apo65] T. Apostol. *Calculus.* Reverté, 1965.

[BS89] R. Bartle and D. Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable.* Editorial Limusa, 1989.

[dp60] Réunion de professeurs. *Exercises de trigonométrie.* Ligel, París, 1960.

[Gra91] F. Granero. *Cálculo.* McGraw - Hill. Madrid, 1991.

[GU02] J. Guajardo and J. Urrea. *Cuarenta problemas resueltos de cálculo integral.* Trabajo de Titulación, Fac de Ciencias, 2002.

[Kit86] J. Kitchen. *Cálculo.* McGraw - Hill, 1986.

[KKVM] I. D. Kudriávtsev, A.D. Kutásov, V.I.Chejlov, and M.I.Shsbunin. *Problemas de Análisis Matemático.* Ed. Mir Moscú.

[Kur61] K. Kuratowski. *Introduction to calculus.* Pergamon Press, 1961.

[Lar53] H. Larsen. *Tables, Formulas and curves.* 1953.

[Lim89] E. Lima. *Análise real.* IMPA, 1989.

[Max59] E. A. Maxwell. *An analytical calculus.* Cambridge University Press, 1959.

[Rot59] R. Rothe. *Matématica superior. Tomos I y II.* Editorial Labor, 1959.

[San] Colección H.E.C. Santiago, editor. *Elementos de trigonometría.*

[Spi70] M. Spivak. *Calculus.* Reverté, 1970.

Capítulo 3

Funciones Trascendentes

3.1. Introducción

El nombre deriva del concepto de **número trascendente**, que es aquel que no es raíz de ningún polinomio de coeficientes enteros. En oposición a este concepto está el del número algebraico. Por ejemplo, los números irracionales $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ son números algebraicos porque son raices de los polinomios de coeficientes enteros: $x^2 - 2$ y $x^2 - 3$. Los números trascendentes más conocidos son π y e.

Definición 3.1.1 Diremos que $y = f(x)$ es una función algebraica de la variable independiente x si $f(x)$ puede ser definida implícitamente por una ecuación $P(x, y) = 0$, donde P es un polinomio con coeficintes enteros en las variables x e y. Todas las funciones que no satisfacen ninguna ecuación algebraica se llaman **trascendentes.**

Ejemplo 3.1.2

1. $y = \sqrt{x^2 - 1}$ es algebraica, ya que $y(x)$ satisface la ecuación algebraica $x^2 - y^2 - 1 = 0$, con $P(x, y) = x^2 - y^2 - 1$.
2. $y = \sqrt{2}x + 8$ es algebraica, ya que $y(x)$ satisface la ecuación algebraica $2x^2 - y^2 + 16y + 64 = 0$.

Las funciones trascendentes elementales son las trigonométricas y la exponencial y todas las que se definen a partir de ellas.

3.2. Las funciones circulares o trigonométricas

Conceptos previos

La fórmula de la distancia en el plano: Sean P_1, P_2 dos puntos del plano, con cordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) respectivamente. El triángulo P_1QP_2 es rectángulo en Q, por teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1Q}^2 + \overline{QP_2}^2.$$

Si llamamos d a la distancia entre P_1 y P_2, tenemos que

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

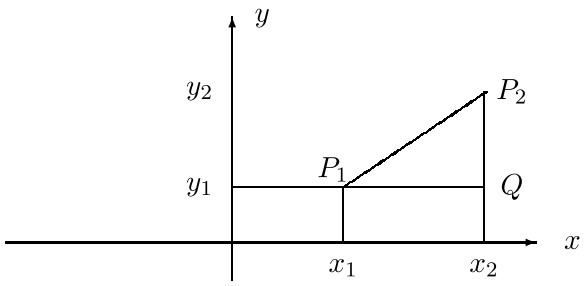


Figura 3.1: Distancia entre dos puntos

La circunferencia de centro C=(h, k) y radio r Considerando que la circunferencia de radio **r** y centro C es el lugar geométrico de los puntos P del plano que están a la distancia r del centro C, podemos deducir la ecuación que satisfacen las coordenadas de los puntos de dicha circunferencia.
Sean (h, k) las coordenadas del centro C y sea P de coordenadas (x, y) un punto cualquiera de la circunferencia. Usando la definición de la circunferencia tenemos que:

$$\begin{aligned} d(P, C) = r \quad &\iff \quad [d(P, C)]^2 = r^2 \\ &\iff \quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia de radio r y centro (h, k) es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{3.1}$$

En particular, para nuestros fines trabajaremos con la circunferencia más simple, la de centro en el origen y radio 1, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{3.2}$$

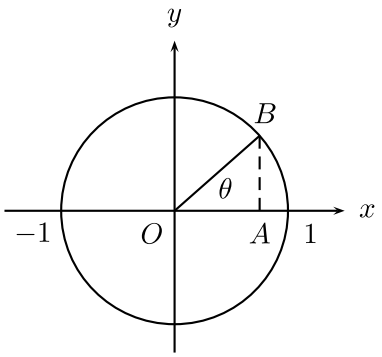


Figura 3.2: Circunferencia unitaria

Medición de ángulos Intuitivamente consideremos dos semirrectas en el plano con extremo común. Por simplicidad supongamos que este extremo es el origen del plano y una de las semirrectas está en el eje de las abscisas. Por ángulo entenderemos la **medida de la separación** de estas semirrectas. Como existen distintas maneras de medir esta separación, adoptaremos la siguiente convención.
Diremos que un ángulo está en posición normal o estándar si lo medimos desde el semieje OX, con lo cual la medida de separación se reduce a dos posibilidades: Si esta medida de separación se toma en el sentido contrario a los punteros del reloj, el ángulo se dice **positivo** y si es en el sentido de los punteros del reloj se dice que el ángulo es **negativo.**

Esta noción se puede ver más dinámicamente pensando que el ángulo es la medida de separación de una semirrecta que gira en torno a uno de sus extremos. La máxima rotación es aquella que vuelve a su posición inicial; este ángulo se llama **ángulo completo** y si la rotación es en sentido positivo le daremos el valor de 360 grados, que se denota por 360^o. La división en 60 o sistema sexagesimal es herencia de los babilonios.

Los 360 grados corresponden a una vuelta completa en el sentido positivo. Por supuesto que podemos dar las vueltas que queramos en cualquiera de los dos sentidos. Por ejemplo: un ángulo de 765 grados, descomponiendo $765 = 2 \cdot 360 + 45$, significa haber dado dos vueltas completas y estar en el punto determinado por un ángulo de 45 grados. Si consideramos el ángulo de -765 grados, significa que hemos dado dos vueltas completas y nos encontramos en el punto determinado por el ángulo -45 grados. Es decir, hemos caminado en el sentido de los punteros del reloj y estamos a 45 grados bajo el semirecta OX.
Como nuestro objetivo es introducir las funciones circulares o trigonométricas como funciones de números reales y los **grados no son números reales** debemos hacer una

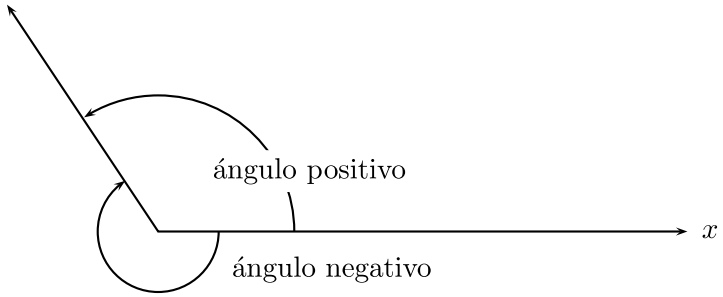


Figura 3.3: Dos sentidos en la medida de un ángulo

transformación de los grados para hacerlos equivalentes a números reales. Para ello imaginaremos que caminamos sobre la circunferencia unitaria, y por lo tanto al dar una vuelta completa hemos caminado una longitud de 2π y descrito un ángulo de 360 grados.

Definición 3.2.1 Llamaremos un **radián** al arco de una circunferencia, cuya longitud es igual a su radio.

Así, a los 360 grados le corresponde una longitud de arco sobre la circunferencia unitaria de 2π unidades de longitud. Esto nos permite, usando un razonamiento de proporciones directas, tener una fórmula que trasforme grados en radianes y viceversa.

$$\frac{\text{ángulo en radianes}}{\text{ángulo en grados}} = \frac{2\pi}{360}. \tag{3.3}$$

En particular,

$$1\ [\text{radián}] = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ \tag{3.4}$$

3.2.1. Definición de las funciones circulares o trigonométricas

Sobre la circunferencia unitaria cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = 1, \tag{3.5}$$

consideremos un punto P cualquiera. Este punto determina el ángulo θ como lo muestra la figura. Como el punto P pertenece al plano le corresponden las coordenadas (x_P, y_P), donde $x_P = \overline{OA}$ e $y_P = \overline{AP}$.

Las funciones seno y coseno son las coordenadas de un punto P que se mueve sobre la circunferencia unitaria, partiendo de $(1, 0)$ en el sentido antihorario.
En el contexto descrito anteriormente, definiremos las funciones siguientes:

Definición 3.2.2 1. La **función seno:**2Función seno $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\theta \mapsto \operatorname{sen}\theta = y_P$.

2. La **función coseno:** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\theta \mapsto \cos\theta = x_P$.

3.2.2. Propiedades básicas de seno y coseno

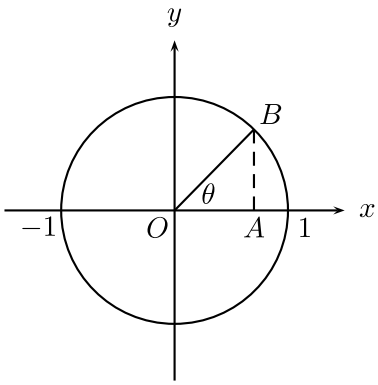


Figura 3.4: Representación del seno y coseno en el círculo unitario

1. Algunos valores de referencia de seno y coseno

   - Si $\theta = 0$, el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es $(1, 0)$, lo que nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1 \\ \operatorname{sen} 0 &= 0. \end{aligned}$$

   - Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es $(0, 1)$, lo que nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{2} &= 0 \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} &= 1. \end{aligned}$$

- Si $\theta = \pi$, el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es $(-1, 0)$, lo que nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} \cos \pi &= -1 \\ \operatorname{sen} \pi &= 0. \end{aligned}$$

- Si $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es $(0, -1)$, lo que nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} \cos \frac{3\pi}{2} &= 0 \\ \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} &= -1. \end{aligned}$$

- Si $\theta = 2\pi$, el punto correspondiente sobre la circunferencia unitaria es $(1, 0)$, lo que nos permite concluir que:

$$\begin{aligned} \cos 2\pi &= 1 \\ \operatorname{sen} 2\pi &= 0. \end{aligned}$$

2. **Periodicidad** Dado que los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ dependen de la ubicación del punto correspondiente en la circunferencia unitaria , cuya longitud total es 2π, entonces fuera del intervalo $[0, 2\pi]$ los valores de estas funciones se repiten **periódicamente**. Por lo tanto las funciones seno y coseno son períodicas de período 2π. Es decir, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta.$$

3. **Paridad de coseno e imparidad de seno**
Si $P = (x_p, y_p)$, determina un arco x, y $P' = (x'_p, y'_p)$, determina un arco $-x$, con $x_p = x'_p$ y $y'_p = -y_p$, podemos concluir que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. Es decir, la función coseno es una función **par** y la función seno es **impar**.
Así, para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ y } \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x).$$

4. **Identidad fundamental**
Dado que seno y coseno de un mismo número corresponden a las coordenadas de un punto sobre la circunferencia unitaria, tenemos que:

$$\boxed{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.} \tag{3.6}$$

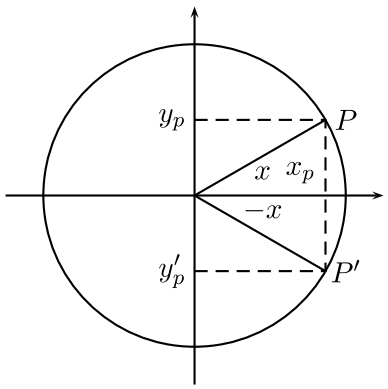


Figura 3.5: Relaciones de paridad en las funciones trigonométricas

5. **Recorrido** Como consecuencia inmediata de la identidad fundamental dada por la ecuación (3.6) y considerando la continuidad geométrica, podemos intuir que el recorrido de las funciones seno y coseno es $[-1, 1]$. La demostracióon analítica de esto, se hará más adelante y es una consecuencia del teorema del valor intermedio.

3.2.3. Cálculo de los valores más usuales de las funciones seno y coseno

1. $x = \dfrac{\pi}{3}$.

   En el círculo unitario inscribimos un hexágono regular como en la figura 2.3.10.

   Si (u, v) son las coordenadas de P_1, entonces las de P_2 son $(-u, v)$; como

   $$P_1P_0 = \sqrt{(u-1)^2 + (v-0)^2} = P_2P_1 = \sqrt{(-u-u)^2 + (v-v)^2}\,,$$

   se tiene, elevando al cuadrado, que $(u-1)^2 + v^2 = (-2u)^2$. Ya que, $u^2 + v^2 = 1$, entonces $2 - 2u = 4u^2$ que tiene como soluciones $u_1 = \frac{1}{2}$ y $u_2 = -1$, y $u > 0$ se elige la solución $u = \frac{1}{2}$, y de $u^2 + v^2 = 1$, se tiene que $v = \sqrt{1 - u^2}$ (raíz positiva) que es $v = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto:

   $$u = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \qquad v = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   El ángulo P_0OP_2 es $\frac{2\pi}{3}$ y se obtiene:

   $$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \qquad \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

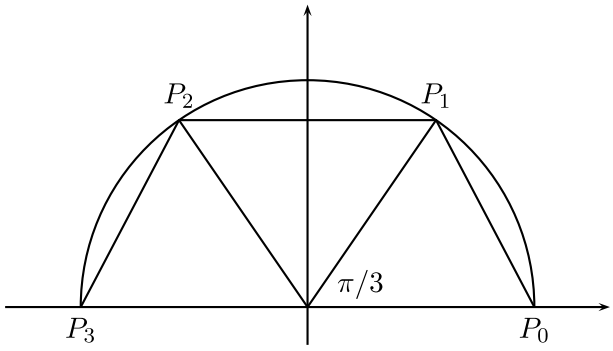


Figura 3.6: Hexágono regular

2. $x = \dfrac{\pi}{4}$.

   En el círculo unitario inscribimos un octágono regular como en la figura 3.7.

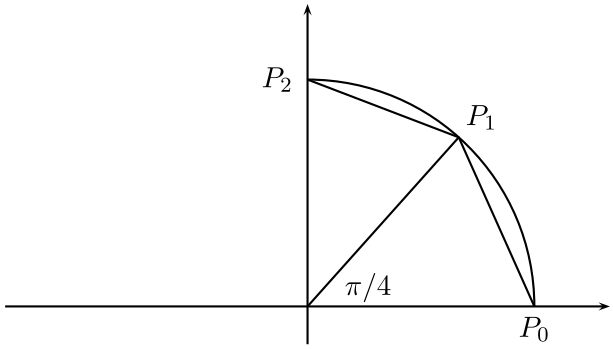


Figura 3.7: Octágono regular

Si (u, v) son las coordenadas de P_1, entonces la ecuación $P_0P_1 = P_1P_2$ es equivalente a:

$$\sqrt{(u-1)^2 + (v-0)^2} = \sqrt{(0-u)^2 + (1-v)^2}\,,$$

es decir, $u^2 - 2u + 1 + v^2 = u^2 + 1 - 2v + v^2$ lo que implica $u = v$. Por lo tanto,

$u^2 + v^2 = 1 \implies 2u^2 = 1 \implies u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo tanto, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$, lo que implica

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. $x = \dfrac{\pi}{6}$.

   En el círculo unitario inscribimos un dodecágono regular como en la figura 3.8.

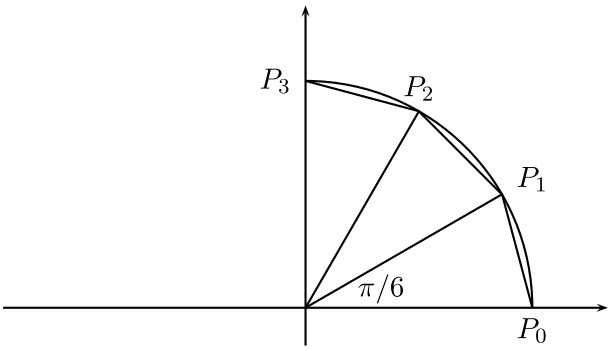


Figura 1.4.18:

Figura 3.8: Dodecágono regular

Entonces $P_1 = (u, v)$ y $P_2 = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ como se calculó en el punto (1) por ser $\dfrac{\pi}{3}$ el ángulo P_0OP_2.

De la ecuación $P_3P_2 = P_0P_1$ obtenemos $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad v = \frac{1}{2}$, por tanto:

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Observación 3.2.3 Con este método de inscribir polígonos regulares conociendo sus lados y apotemas, podemos seguir calculando los valores de las funciones trigonométricas para ángulos cada vez más pequeños de la forma $\dfrac{\pi}{2k}$, $\quad \dfrac{\pi}{3k}$, $\quad \dfrac{\pi}{5k}$, etc. ($k \in \mathbb{N}$).

Con estos valores encontrados, usando la geometría euclidiana elemental más los que podemos encontrar con una calculadora, podemos esbozar los gráficos de las funciones seno y coseno.

3.2.4. Ceros y signo de las funciones seno y coseno

1. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$

   De la definición de seno se tiene que este es positivo en el primer y segundo cuadrante, y negativo en el tercer y cuarto.

   - Si $x \in]0, \pi[$, $\operatorname{sen} x > 0$.
   - Si $x \in]\pi, 2\pi[$, $\operatorname{sen} x < 0$.

   Usando la periodicidad, se deduce que:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} x > 0 & \Longleftrightarrow & x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sen} x < 0 & \Longleftrightarrow & x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sen} x = 0 & \Longleftrightarrow & x = k\pi;\ \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

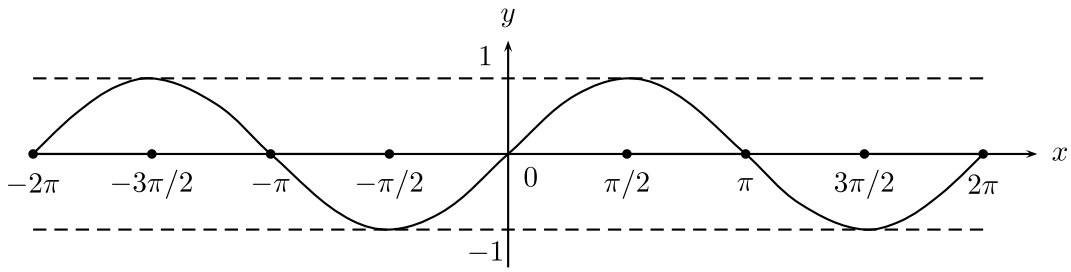


Figura 3.9: La función $y = \operatorname{sen} x$

2. $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

   De la definición de coseno se tiene que este es positivo en el primer y cuarto cuadrante, y negativo en el segundo y tercero.

   - Si $x \in]0, \pi/2[$, $\cos x > 0$.
   - Si $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, $\cos x < 0$.
   - Si $x \in]3\pi/2, 2\pi[$, $\cos x > 0$.

   Usando la periodicidad, se deduce que:

$$\begin{array}{lll} \cos x > 0 & \Longleftrightarrow & x \in](4k-1)\pi/2, (4k+1)\pi/2[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos x < 0 & \Longleftrightarrow & x \in](4k+1)\pi/2, (4k+3)\pi/2[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = 0 & \Longleftrightarrow & x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k\ \in \mathbb{Z} \end{array}$$

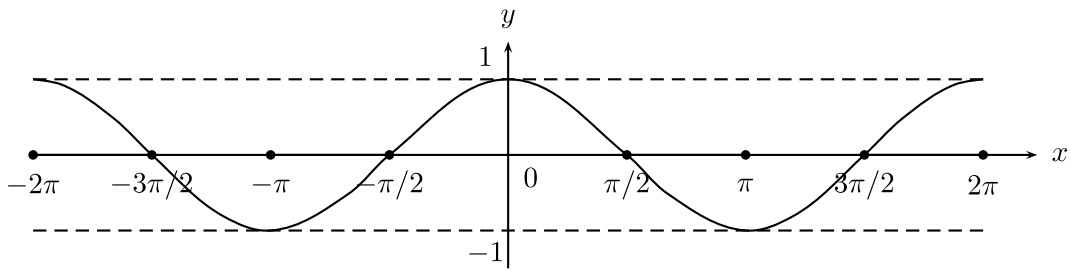


Figura 3.10: La función $y = \cos x$

Valores de referencia de seno y coseno

Arco en grados	Arco en radianes	Seno	Coseno
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

3.2.5. Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Estas funciones trigonométricas están definidas en términos de seno y coseno. Por lo tanto, sus propiedades se deducen de las de aquellas.

Definición 3.2.4 1. La **función tangente:**

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

está definida para $x \in \mathbb{R}$, donde no se anula la función $\cos x$. Es decir:

$$D(\tan) = \mathbb{R} - \left\{(2n-1)\frac{\pi}{2} : \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

La función tangente es periódica, de período π. Lo que se deduce de un sencillo cálculo. Si $x \in D(\tan)$, tenemos:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \tan(x+\pi).$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x;\ k \in \mathbb{Z}$$

Considerando que $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, la función tangente es positiva para los x, tal que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tengan igual signo, y negativa para los x, tal que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tengan signos opuestos.
Así, si $x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2} \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\begin{array}{lll} \tan x > 0 & \Longleftrightarrow & x \in]k\pi, (k+1)\pi/2[; \ k \in \mathbb{Z} \\ \tan x < 0 & \Longleftrightarrow & x \in](k+1)\pi/2, (k+1)\pi[; \ k \in \mathbb{Z} \\ \tan x = 0 & \Longleftrightarrow & x = k\pi; \ \in \mathbb{Z} \end{array}$$

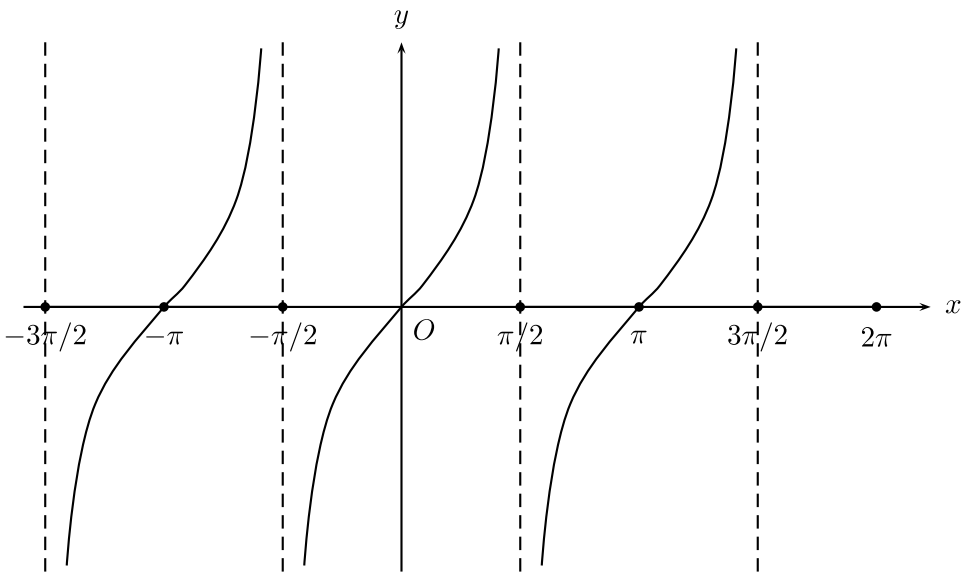


Figura 3.11: La función $y = \tan x$

2. La **función cotangente** se define como:

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)} \ \text{ para todo}, x \in \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Así, si $x \in \mathbb{R} - \{k\pi \ \ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{cotan} x > 0 & \Longleftrightarrow & x \in]k\pi, (k+1)\pi/2[; \ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{cotan} x < 0 & \Longleftrightarrow & x \in](k+1)\pi/2, (k+1)\pi[; \ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{cotan} x = 0 & \Longleftrightarrow & x = (2k+1)\pi/2; k \ \in \mathbb{Z} \end{array}$$

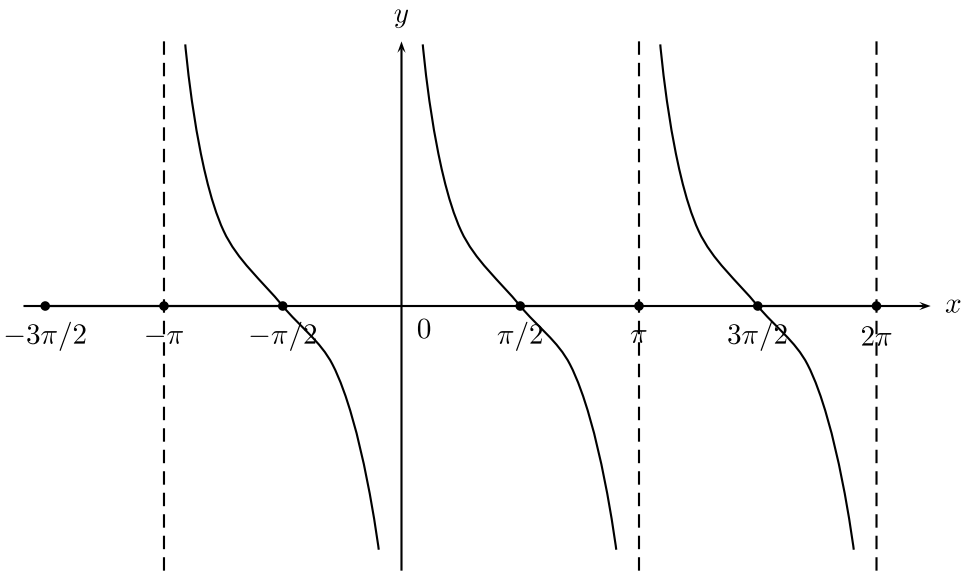


Figura 3.12: La función $y = \operatorname{cotan} x$

3. La **función secante** se define como:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \text{ para todo } x \in \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{(2n-1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{array}{|l|} \hline \sec x > 0 \iff x \in](4k-1)\pi/2, (4k+1)\pi/2[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \sec x < 0 \iff x \in](4k+1)\pi/2, (4k+3)\pi/2[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \hline \end{array}$$

4. La **función cosecante** se define como:

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \text{ para todo } x \in \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\begin{array}{|l|} \hline \operatorname{cosec} x > 0 \iff x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{cosec} x < 0 \iff x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[;\ k \in \mathbb{Z} \\ \hline \end{array}$$

Interpretación geométrica de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante Estas funciones para ángulos agudos pueden ser representadas por los siguientes trazos como vemos en la figura 2.3.16.

Es un bonito ejercicio de semejanza de triángulos justificar esta interpretación geométrica y extenderla a cualquier ángulo θ.

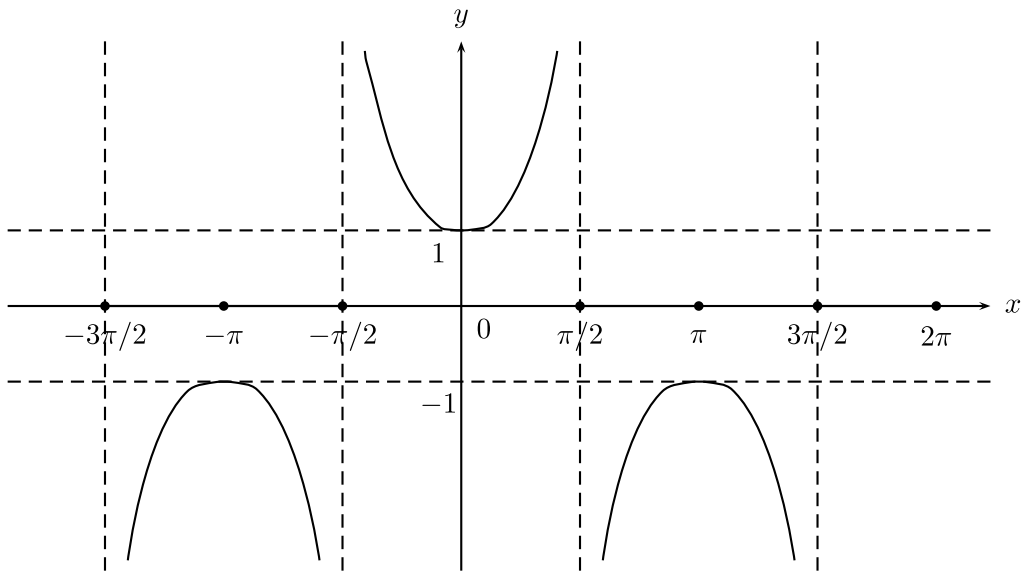


Figura 3.13: La función $y = \sec x$

Identidades básicas de las funciones trigonométricas

La mayoría de las identidades básicas pueden deducirse de las fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)$ o $\cos(\alpha \pm \beta)$ más la **identidad fundamental** (3.6). Existen variadas formas de obtener dichas fórmulas. Veremos la sugerida por Cauchy.

Teorema 3.2.5 Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$.

Demostración: Consideremos la siguiente figura:

Los ángulos AOQ y POR son de igual medida y por tanto subtienden cuerdas de la misma longitud, entonces se tiene:

$$d^2(A, Q) = d^2(P, R);$$

es decir:

$(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha - \beta) - 0)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$.
Desarrollando los cuadrados y reduciendo términos semejantes, se obtine imediatamente que:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

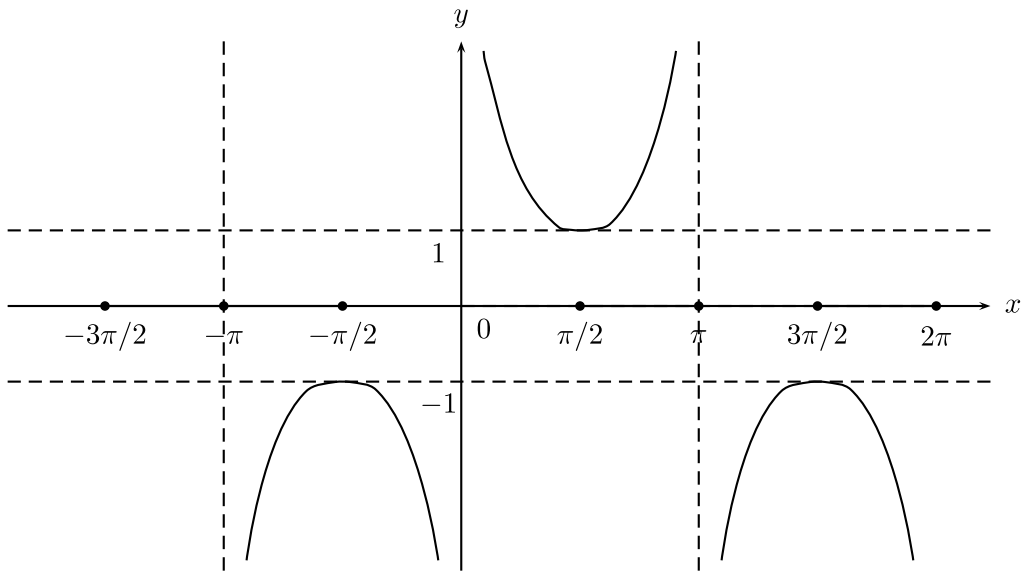
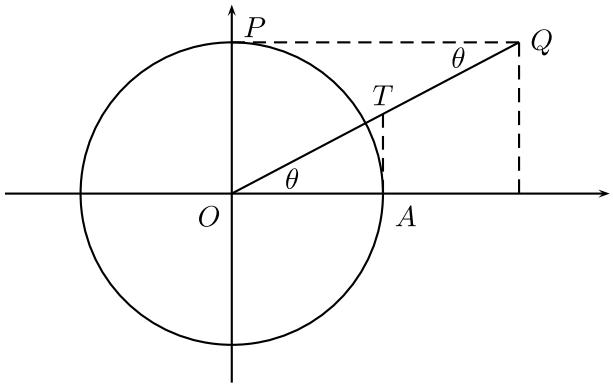


Figura 3.14: La función $y = \operatorname{cosec} x$



$\tan\theta = \overline{AT}$, $\operatorname{cotan}\theta = \overline{PQ}$, $\sec\theta = \overline{OT}$, $\operatorname{cosec}\theta = \overline{OQ}$

Figura 3.15: Interpretación geométrica

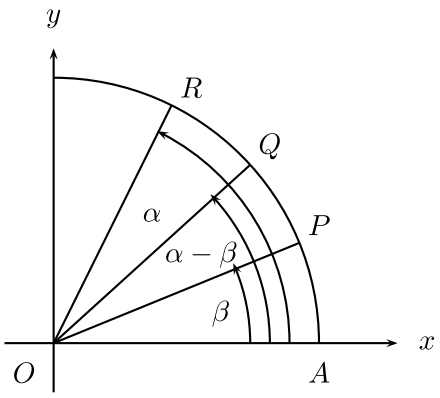


Figura 3.16: Diagrama de Cauchy

Donde:

$$\begin{array}{ll} \angle AOP = \beta & P = (\cos\beta, \operatorname{sen}\beta) \\ \angle AOQ = \alpha - \beta & Q = (\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta)) \\ \angle AOR = \alpha & R = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) \\ & A = (1,0) \end{array}$$

Del teorema 3.2.5 se obtiene la mayoría de las identidades que detallaremos a continuación:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha)\right) = \cos\alpha \\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta) \\
&= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)\operatorname{sen}\beta \\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) \\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

Del mismo modo tenemos que:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}(\alpha - \frac{\alpha}{2}) = \operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2},$$

implica

$$(1+\cos\alpha)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\alpha\cos\frac{\alpha}{2},$$

por lo tanto,

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

A continuación daremos una lista de las identidades más usadas.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 + \cos^2 &= 1. \\
\sec^2 \alpha &= \tan^2 \alpha + 1 \\
\operatorname{cosec}^2 \alpha &= \operatorname{cotan}^2 \alpha + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \\
\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} \\
\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \\
\operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \\
\operatorname{sen}(\alpha/2) &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \\
\cos(\alpha/2) &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \\
\tan(\alpha/2) &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}
\end{aligned}$$

El doble signo indica que en cada caso debe seleccionarse el valor que corresponda de acuerdo al cuadrante donde se encuentra α.

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Además, para cada $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos(\pi/2 - \theta) \qquad \cos\theta = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta)$$

$$\tan\theta = \operatorname{cotan}(\pi/2 - \theta) \qquad \operatorname{cotan}\theta = \tan(\pi/2 - \theta)$$

$$\sec\theta = \operatorname{cosec}(\pi/2 - \theta) \qquad \operatorname{cosec}\theta = \sec(\pi/2 - \theta)$$

3.2.6. Ejercicios resueltos

1. Expresar $\operatorname{sen}\theta, \cos\theta$ en términos de $\operatorname{tg}\theta$.
   Solución:
   $$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}.$$
   Elevando al cuadrado nos queda:
   $$\begin{aligned}
   \operatorname{tg}^2\theta &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta}\\
   \operatorname{tg}^2\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta) &= \operatorname{sen}^2\theta\\
   \operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta\operatorname{sen}^2\theta &= \operatorname{sen}^2\theta\\
   \operatorname{sen}^2\theta(1-\operatorname{tg}^2\theta) &= \operatorname{tg}^2\theta\\
   \operatorname{sen}^2\theta &= \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\\
   \operatorname{sen}\theta &= \frac{\pm\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}.
   \end{aligned}$$
   $$\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\,\frac{\pm\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}.$$

2. Demostrar que todos los valores de $\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{\sqrt{2}}\right)$ son distintos para los diferentes valores de k.

   Solución: Sean k, k' números enteros distintos. Supongamos por reducción al absurdo que $\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{k'\pi}{\sqrt{2}}\right)$.

   Como la función tangente tiene período π tenemos que $\frac{k\pi}{\sqrt{2}} = n\pi + \frac{k'\pi}{\sqrt{2}}$, con $n \in \mathbb{Z}$. Esta última igualdad implica $\frac{k-k'}{n} = \sqrt{2}$; pero, el primer miembro es un racional y el segundo un irracional, como esto no puede ser es imposible que tales valores de la tangente sean iguales.

3. Usando que $\operatorname{sen} 30^o = \dfrac{1}{2}, \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, calcule $\operatorname{sen} 15^o, \cos 15^o, \operatorname{sen} 60^o, \cos 60^o, \operatorname{sen} 75^o, \cos 75^o$.

Solución: En virtud de la fórmula para ángulos medios, tenemos:

$$\operatorname{sen} 15^o = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{2}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

$$\cos 15^o = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{2}} = \frac{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

Se elige el signo positivo pues, 15^o es un ángulo en el primer cuadrante.

Para las funciones d 60^o, se usarán las fórmulas de ángulos dobles.

$$\operatorname{sen} 60^o = 2\operatorname{sen} 30^o \cos 30^o = 2\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos 60^o = \cos^2 30^o - \operatorname{sen}^2 30^o = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\operatorname{sen} 75^o = \operatorname{sen}(45^o{+}30^o) = \operatorname{sen} 45^o\ \cos 30^o{+}\operatorname{sen} 30^o\ \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}{+}\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 75^o = \cos(45^o{+}30^o) = \cos 45^o\ \cos 30^o{-}\operatorname{sen} 30^o\ \operatorname{sen} 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}{-}\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

4. Si $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, demuestre que:

   a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma$.

   b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma = 1$.

   Solución:

   a) $\alpha+\beta = \pi-\gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \operatorname{tg}(\pi-\gamma) \\ \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta} &= -\operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta &= -\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma.$$

b) $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\pi-\gamma) \\ \cos\alpha\,\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\beta \\ \cos^2\alpha\,\cos^2\beta + 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma + \cos^2\gamma &= \operatorname{sen}^2\alpha\,\operatorname{sen}^2\beta \\ &= 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\,\cos^2\beta. \end{aligned}$$

De la última ecuación se deduce la igualdad pedida

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma = 1.$$

5. Determine si las siguientes funciones son periódicas. En el caso afirmativo, encontrar el período.

   a) $f_1 : x \mapsto \cos(x+1)$.

   b) $f_2 : x \mapsto 2x^2 + 3x$.

   c) $f_3 : x \mapsto 2\cos 4x$.

   Solución:

   a) $\cos(x+1) = \cos(x+1+2\pi) = \cos[(x+2\pi)+1]$, implica $f_1(x) = f_1(x+2\pi)$, siendo 2π el menor de los números que hace posible esta igualdad, f_1 es una función periódica de período 2π.

   b) $D(f_2) = \mathbb{R}$. Si f_2 fuera períodica, entonces sería posible encontrar un número real t no nulo tal que $f_2(x+t) = f_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   Como $f_2(x+t) = 2(x+t)^2 + 3(x+t) = 2x^2 + 3x + 4tx + 2t^2 + 3t$, para tener la periodicidad es necesario y suficiente que $t(4x - 2t + 3) = 0$. Siendo $t \neq=$ debieramos tener

   $$4x - 2t + 3 = 0, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R},$$

   pero esto evidentemente no es posible. Por lo tanto, f_2 no es una función periódica.

   c) $D(f_3) = \mathbb{R}$.

   $$2\,\cos 4x = 2\,\cos(4x + 2\pi) = 2\cos\left[4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

   implica $f_3(x) = f_3\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Siendo $\dfrac{\pi}{2}$ el número más pequeño que hace posible esta igualdad, tenemos que f_3 es periódica de período $\dfrac{\pi}{2}$.

6. *a*) Si α y β son dos números reales tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, demuestre que existe al menos un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos^2 x_0 = \alpha$ y $\operatorname{sen}^2 x_0 = \beta$.

b) ¿ Existe un número real x tal que :

1) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{3}$?

2) $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ y $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$?

3) $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ y $\operatorname{sen} x = -\dfrac{5}{13}$?

Solución:

a) Si α y β son tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, el punto p de coordenadas (α, β) puede ser considerado como un punto sobre la circunferencia unitaria. Uniendo P con el centro O de dicha circunferencia el trazo $\overline{OP}$ determina un ángulo x con la parte positiva del eje X. En estas condiciones tenemos que:

$$\alpha = \cos x \ \ , \ \ \beta = \operatorname{sen} x.$$

b) 1)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{16},$$

por ser $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \neq 1$, no existe un real x tal que $\cos x = \dfrac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{3}$.

2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$, por tanto no existe real x tal que $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ y $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

3)

$$\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1,$$

por tanto, existe al menos un número real x tal que $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ y $\operatorname{sen} x = -\dfrac{5}{13}$.

7. **Aproximación en una vecindad del cero de la función seno y tangente.**

Si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, demuestre que:

a) $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$.

b) Deduzca que para x muy pequeño ($x \approx 0$), $\operatorname{sen} x \approx x$.

c) $x - \operatorname{sen} x < \dfrac{x^3}{4}$.

d) Calcular sen $0,07$ y estime el error cometido.

e) Calcular sen $10''$.

f) Generalize los resultados anteriores para $x < 0$.

Solución:

a) Sea el arco $AB = x$. Trazamos la cuerda perpendicular a $\overline{OA}$ y el trazo $\overline{BT}$ tangente a la circunferencia unitaria en B. Según lo dicho en la subsección 3.2.1, ver figura 2.3.16, $\overline{AT'} = \text{tg } x$. De la figura puede deducirse que los triángulos OAT' y OBT son semejantes por tener dos ángulos iguales. Así,

$$\frac{\overline{AT'}}{\overline{BT}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$$

pero, $\overline{AT'} = \text{tg } x$, $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, por lo que podemos concluir que $\overline{AT'} = \overline{BT} = \text{tg } x$.

Nuevamente de la figura vemos que:

$$\overline{BT} = \overline{B'T} = \text{tg } x, \quad \overline{BB'} = 2\overline{BP}\,\text{sen } x.$$

Por otro lado, podemos deducir que:

$$\overline{BB'} < \text{arco}BAB' < \overline{BT} + \overline{B'T},$$

o lo que es lo mismo,

$$2\,\text{sen } x < 2x < 2\,\text{tg } x,$$

lo que implica

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x. \qquad (*)$$

b) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ implica sen $x > 0$, por lo que al dividir la desigualdad (*) por cos x, esta no cambia de sentido y nos queda:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}. \qquad (**)$$

Cuando x decrece hacia cero, el coseno crece tendiendo a su valor máximo 1 y por tanto, su valor es muy cercano a 1. Así,

$$\frac{x}{\text{sen } x} \approx 1.$$

c) Usando la desigualdad (*) tenemos: $\frac{x}{2} < \text{tg}\ \frac{x}{2}$, que también puede ser escrita como $\frac{x}{2} < \frac{\text{sen}\ \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$. Multiplicando por el número positivo $2\cos^2 \frac{x}{2}$, nos queda:

$$x \cos^2 \frac{x}{2} < 2\,\text{sen}\ \frac{x}{2}\ \cos\ \frac{x}{2},$$

por fórmula del ángulo doble, la desigualdad se escribe como

$$x \cos^2 \frac{x}{2} < \text{sen}\ x$$

$$x\left(1 - \text{sen}^2 \frac{x}{2}\right) < \text{sen}\ x.$$

Como x es pequeño, $\frac{x}{2}$ es aún más pequeõ y usando que $\text{sen}\ \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, al reemplazar $\text{sen}^2 \frac{x}{2}$ por $\frac{x}{2}$ la desigualdad se refuerza y se tiene,

$$x\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) < \text{sen}\ x,$$

es decir,

$$0 < x - \text{sen}\ x < \frac{x^3}{4}.$$

d) Si $x = 0,07$, entonces por la parte (a)

$$\text{sen}\ 0,07 \approx 0,07$$

El error cometido en esta aproximación es positivo y menor que

$$\frac{(0,07)^3}{4} = \frac{343 \cdot 10^{-6}}{4} = 85,7 \cdot 10^{-6} = 0,0000857.$$

e) Para poder aplicar todo lo demostrado anteriormente el ángulo x debe estar expresado en radianes. π radianes tienen $180 \times 60 \times 60 = 648{,}000$ segundos. Luego,

$$10'' = \frac{\pi}{64{,}800} = 0,000048481.....$$

Este es un número muy pequeño menor que $5 \cdot 10^{-5}$, por lo que podemos considerar

$$\text{sen}\ 10'' \approx 5 \cdot 10^{-5}$$

con un error positivo y menor que $\frac{(0,00005)^3}{4} = \frac{125}{4} \cdot 10^{-15}$.

8. Estudiar las variaciones de la función $f : x \mapsto \operatorname{sen} 2x$ y bosquejar su gráfico.

   Solución: $D(f) = \mathbb{R}$ y $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(2x+2\pi) = \operatorname{sen}[2(x+\pi)]$, luego $f(x) = f(x+\pi)$, π es el más pequeño real positivo que posee esta propiedad(por ser el más pequeño real positivo tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2x + 2\pi)$).

   Por tanto, f es periódica de período π.

   f es una función impar pues, $f(-x) = \operatorname{sen}(-2x) = -\operatorname{sen} 2x = -f(x)$. Debido a la periodicidad basta estudiar f sobre un intervalo de longitud π, en virtud de su imparidad, este intervalo puede ser $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Según las variaciones de la función seno tenemos: cuando $2x$ recorre el intervalo $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$, es decir cuando x recorre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, f es estrictamente decreciente;

   cuando $2x$ recorre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir cuando x recorre el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, f es estrictamente creciente;

   cuando $2x$ recorre el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, es decir cuando x recorre el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, f es estrictamente decreciente.

   Así, su representación gráfica es:

9. Exprese $\dfrac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x}$ en función de $\operatorname{tg} x$.
   Solución: Con ayuda de las identidades básicas tenemos:

$$\frac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x} = \frac{6 + 4\cos^2 2x - 2}{2\operatorname{sen}^2 2x} = 2\frac{1 + \ cos^2 2x}{\operatorname{sen}^2 2x} = 2 \cdot \frac{1 + (\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+tg^2 x})^2}{(\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x})^2}$$

$$= 2\frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 + (1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}{4\operatorname{tg}^2 x} = 2\frac{2 + 2\operatorname{tg}^4 x}{4\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + tg^2 x.$$

10. Si $a + b = \frac{\pi}{3}$, calcular $\dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a}$.

    Solución:

$$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a} = \frac{2\operatorname{sen}(\frac{a-b}{2}) \cdot \cos(\frac{a+b}{2}}{-2\operatorname{sen}(\frac{b+a}{2})\operatorname{sen}(\frac{b-a}{2})} = \frac{\cos(\frac{a+b}{2})}{\operatorname{sen}(\frac{b+a}{2})} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{b+a}{2})} = \frac{1}{tg\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}.$$

11. Transforme en un producto la expresión $1 + \cos a + \operatorname{sen} a$.

Solución:

$$1+\cos a+\operatorname{sen} a=2\cos^2\frac{a}{2}+2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=2\cos\frac{a}{2}(\cos\frac{a}{2}+\operatorname{sen}\frac{a}{2})$$

Pero,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2} &= \operatorname{sen}\frac{a}{2}+\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2})\\ &= 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$1+\cos a+\operatorname{sen} a=2\sqrt{2}\cos\frac{a}{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})\ .$$

3.2.7. Ejercicios propuestos

1. Transforme en un producto $\cos a+\cos b+\operatorname{sen}(a+b)$.
2. Calcular $\operatorname{sen}\theta$ y $\tan\theta$ en términos de $\cos\theta$.
3. Sabiendo que $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, calcular:
   a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$
   b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$, $\tan\left(\dfrac{3\pi}{8}\right)$
   c) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$, $\tan\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$
   d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$
   e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{32}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{32}\right)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{32}\right)$.
4. ¿Existe un número real x tal que:?
   a) $\cos x=\dfrac{5}{4}$ y $\operatorname{sen} x=\dfrac{5}{3}$
   b) $\cos x=\dfrac{4}{5}$ y $\operatorname{sen} x=-\dfrac{3}{5}$
   c) $\cos x=\dfrac{1}{10}$ y $\operatorname{sen} x=\dfrac{9}{10}$

5. Calcule los siguientes valores aproximados y estime el error cometido:
   $\operatorname{sen}(-3 \cdot 10^{-2})$, $\cos(\frac{\pi}{2} - 0{,}01)$, $\cos(1{,}57)$, $\tan(-10^{-3})$.
   Use el valor $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$.

6. Desarrollar y reducir las expresiones siguientes:

   a) $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 + (\cos x - \operatorname{sen} x)^2$.

   b) $(a \cos x + b \operatorname{sen} x)^2 + (a \cos x - b \operatorname{sen} x)^2$; a y b son números reales fijos.

   c) $\operatorname{sen}^2 \left(\dfrac{1}{1 - \cos x} + \dfrac{1}{1 + \cos x} \right)$

7. Demuestre que cualquiera sean los números reales a, b, x se tiene que:

$$|a \cos x + b \operatorname{sen} x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

8. Demuestre que las siguientes funciones son períodicas encuentre su período:

   a) $f_1(x) = \cos 4x$.

   b) $f_2(x) = \operatorname{sen} 3x$.

   c) $f_3(x) = \cos 4x + \operatorname{sen} 3x$.

9. Estudie si cada una de las siguientes funciones son pares o impares:

   a) $f_1(x) = x + 1 + \cos 2x$.

   b) $f_2(x) = \operatorname{sen} x^2 + \cos x$.

   c) $\cos(x^3 - 2x) - 2 \operatorname{sen} |x|$.

   d) $f_4(x) = |\operatorname{sen}(x^3 + x)| \cdot \tan(x^2 + 1)$.

10. Usando la fórmula $\tan(\alpha + \beta)$, demuestre que $\tan(x + \pi) = \tan x$, para todo x en el dominio de la tangente.

11. Calcule el período de $\operatorname{sen} 2x$ y $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$.

12. Demuestre que $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ tienen período π.

13. ¿Cuál es el período de $\tan^2 x$, $\operatorname{cotan}^2 x$, $\sec^2 x$ y $\operatorname{cosec}^2 x$?.

14. ¿Cuál es el período de $\operatorname{sen}^3 x$ y $\cos^3 x$?.

15. Calcule el período de $\operatorname{sen} \omega x$ considerando $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ecuaciones trigonométricas

Son ecuaciones donde las variables o incógnitas sólo aparecen en los argumentos de las funciones trigonométricas. Por ejemplo:

$$4\,\mathrm{sen}^2\,x = \tan x$$

o el sistema:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,y &= a \\ \cos 2y - \cos 2x &= b \end{aligned}$$

La ecuación $\tan x - x = 0$ no es una ecuación trigonométrica, sin embargo el sistema,

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ \tan x \tan y &= b, \end{aligned}$$

puede reducirse a una ecuación trigométrica. Observemos que no todas las ecuaciones trigonométricas tienen solución; por ejemplo:

$$3\,\mathrm{sen}^2\,x + \cos 2x = 5$$

no tiene solución, pues los máximos valores que pueden tomar $3\,\mathrm{sen}^2\,x$ y $\cos 2x$ son 3 y 1 respectivamente, y por lo tanto su suma es inferior a 5 para cualquier valor $x \in \mathbb{R}$.

Observemos también que, debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, si una ecuación tiene una solución x_0, entonces tiene infinitas soluciones $x_0 + kT,\ k \in \mathbb{Z}$, siendo T el período correspondiente.

Basta entonces encontrar las soluciones de una ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, T)$, o bien, en algunos casos en $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Estas soluciones se llaman *soluciones básicas.*

Como podemos ver no hay teoría sobre ecuaciones trigonométricas, sólo algunos métodos.

Ejemplo 3.2.6 ▪ Ecuaciones trigonométricas reducibles a una ecuación algebraica, tomando una función trigonométrica como incógnita auxiliar. Veamos algunos ejemplos.

1. Resolver $3\tan^2 x + 5 = \dfrac{7}{\cos x}$.

Solución: Sea $u = \cos x$, entonces como $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$, tenemos

$$\frac{3(1-u^2)}{u^2} + 5 = \frac{7}{u}.$$

es decir, $\dfrac{2u^2 - 7u + 3}{u^2} = 0$. Como $u = 0$ (es decir, $\cos x = 0$) no es solución de la ecuación, tenemos que $2u^2 - 7u + 3 = 0$, que tiene como soluciones a u =3 y $\dfrac{1}{2}$. La primera no es solución por ser mayor que 1; por lo tanto $u = \cos x = \frac{1}{2}$ es la ecuación que debemos resolver y cuyas soluciones básicas son $x = \pm\dfrac{\pi}{3}$. Entonces las soluciones de la ecuación son:

$$S = \{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,; \qquad k \in \mathbb{Z}\}$$

Si hacemos el reemplazo $v = \tan x$, la ecuación se convierte en:

$$3v^2 + 5 = \pm 7\sqrt{1+v^2}$$

pero esta ecuación no es equivalente a la propuesta, porque con las soluciones de esta, admite todavía las soluciones de la ecuación

$$3\tan^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$$

Las soluciones de $3\tan^2 x + 5 = \pm 7\sqrt{1+\tan^2 x}$ son $S = \left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{R}\right\}$ que es un conjunto mayor que el buscado.

En general, no es recomendable usar sustituciones que conduzcan a raíces, pues se debe considerar el doble signo que aporta más soluciones que las buscadas en el problema original.

2. Resolver en $\mathbb{R}$, la ecuación $\operatorname{sen}^4 x - 3\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$.

Solución:

$$\operatorname{sen}^4 x - 3\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0 \iff \begin{cases} \text{Usando la variable auxiliar,} \\ u = \operatorname{sen}^2 x, \\ 2u^2 - 3u + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\iff u = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2}}{4} = \begin{cases} u = 1 \\ u = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 1 \\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \operatorname{sen} x = \pm 1 \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ \\ x = \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases} \\ \\ \operatorname{sen} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff \begin{cases} \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \dfrac{\pi}{4}\,;\, \dfrac{3\pi}{4} \\ \\ \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \dfrac{5\pi}{4}\,;\, \dfrac{7\pi}{4} \\ \\ . \end{cases} \end{cases}$$

Considerando que $f(x) = \operatorname{sen}^4 x - 3\operatorname{sen}^2 x + 1$ tiene período π, en $[0, \pi]$, la función tiene tres ceros :$x = \dfrac{\pi}{4}$,$x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

En $\mathbb{R}$, la función tiene ceros en : $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Ecuaciones que contienen sumas de seno y coseno de un mismo ángulo.
  Resolver y discutir la ecuación: $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$

Solución: Dividiendo por a, se tiene $\operatorname{sen} x + \dfrac{b}{a}\cos x = \dfrac{c}{a}$, $\quad \dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$, por lo tanto, existe $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\tan\varphi = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{b}{a}$. Reemplazando en la ecuación original y multiplicando por $\cos\varphi$ se tiene:

$$\operatorname{sen} x \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

es decir, $\operatorname{sen}(x + \varphi) = \frac{c}{a} cos\varphi$.
Sea ϕ tal que $\operatorname{sen}\phi = \dfrac{c}{a}\cos\varphi$, entonces $x + \varphi = 2k\pi + \phi$, o bien, $x + \varphi = (2k+1)\pi - \phi$ donde $x = 2k\pi + \phi - \varphi$, o bien, $x = (2k+1)\pi - \phi - \varphi$.

Este resultado es formal, tenemos que encontrar las condiciones para que estos valores existan:

Primero debemos tener $-1 \leq \dfrac{c}{a}\cos\varphi \leq 1$ para que exista el valor ϕ.

Es decir, $\dfrac{c^2\cos^2\varphi}{a^2} \leq 1$.

El valor de $\cos^2\varphi$ en función de los datos se deduce de la ecuación principal:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\tan^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

Entonces, la condición de posibilidad se reduce a :

$$c^2\frac{\cos^2\varphi}{a^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2} \leq 1 \iff c^2 \leq a^2+b^2.$$

3.2.8. Ejercicios resueltos

1. Resuelva la ecuación $3(1-\cos\,x) = \operatorname{sen}^2 x$.

   Solución: Reemplazando $\operatorname{sen}^2 x$ por $1-\cos^2 x$, la ecuación queda en la forma:

   $$3(1-\cos\,x) = 1-\cos^2 x,$$

   es decir,

   $$\cos^2 x - 3\cos\,x + 2 = 0.$$

   Resolviéndola como una ecuación de segundo gardo en $\cos\,x$ obtenemos:

   $$\cos\,x = \frac{3\pm 1}{2}.$$

   La solución $4\cos\,x = 2$ es imposible, por tanto $\cos\,x = 1$; de donde, usando la periodicidad de la función coseno tenemos:

   $$x = 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Resuelva $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{6}{5}$.
   Solución: Se define $x = \cos\alpha, y = \operatorname{sen}\alpha\ ,\ -1 \leq x, y \leq 1$ y se resuelve el sistema $x^2+y^2 = 1, x+y = \frac{6}{5}$. Es decir, debemos buscar la intersección de la recta $y = \frac{6}{5} - x$ con el círculo unitario $x^2+y^2 = 1$.

3. ¿ Para qué valores de m la ecuación $m\cos^2 x - 2m\cos x - 1 = 0$ tiene solución ?

   Solución: La ecuación puede ser vista como una ecuación de segundo grado en $\cos x$, la que tiene soluciones reales si su discriminante es no negativo, es decir, si $m^2+m \geq 0$, lo que implica que $m \leq -1$ o $m \geq 0$. Las soluciones satisfacen: $\cos x = 1 \pm \frac{\sqrt{m^2+m}}{m}$. Si $m \leq -1$, entonces, $|1-\frac{\sqrt{m^2+m}}{m}| \leq 1$ si $m \geq \frac{1}{3}$, y $|1\pm\frac{\sqrt{m^2+m}}{m}| > 1$ si $0 < m < \frac{1}{3}$. Por tanto, la ecuación tiene solución para $m \in (-\infty,-1] \cup [\frac{1}{3},+\infty)$.

Ejercicios propuestos

1. Encuentre a, b tal que $\operatorname{sen}(a-b) = \cos(a+b) = \frac{1}{2}$.

2. ¿Para qué valores de m la ecuación $m\cos x - \operatorname{sen} x = m - 1$ tiene solución ?

3. Si $x \in \mathbb{R}$, resolver las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{sen} 2x = 0\,; \qquad \cos 2x = 0$$
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0\ : \qquad \cos\frac{x}{2} = 0$$

4. Si $x \in \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2};\ k\ \in \mathbb{Z}\right\}$, resuelva:

$$\tan 2x = 0\,; \qquad \tan\frac{x}{2} = 0$$

5. Considerando $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ y sin resolver las ecuaciones, diga por qué tienen las mismas soluciones.

$$\operatorname{sen}(\omega x) = 0\,; \qquad \operatorname{sen}(-\omega x) = 0$$

6. Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x\cos x = 0\,, \quad \operatorname{sen} x + \cos x = 0\,, \quad \operatorname{sen} x - \cos x = 0$$
$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0 \qquad \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$$

7. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x = -\frac{1}{16}\cos 5x - -\frac{1}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x.$$

La función sinusoidal

Las funciones de la forma

$$f(x) = a\operatorname{sen}(\omega x) + b\cos(\omega x)$$

se llaman **funciones sinusoidales** y aparecen en modelos matemáticos de problemas oscilatorios. En electromagnetismo, sonido, las ondas están representadas por funciones de tipo sinusoidal.
Escribamos $f(x)$ como:

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega x\right).$$

Considerando que, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, el punto $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ pertenece a la circunferencia unitaria y por tanto, existe un único φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$ tal que:

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ y } \operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Equivalentemente, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.
Pongamos $A := \sqrt{a^2+b^2}$, entonces $f(x)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} f(x) &= A(\cos\varphi \operatorname{sen}\omega x + \operatorname{sen}\varphi \cos\omega x) \\ &= A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) \end{aligned}$$

1. La función sinusoidal es periódica y su período es $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

   En efecto,

   $$\begin{aligned} A\operatorname{sen}(\omega(x)+\varphi) &= A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi + 2\pi) \\ &= A\operatorname{sen}(\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi), \qquad \text{cualquiera sea} \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Por tanto, el período de f es $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ Se toma el valor absoluto de ω, para obtener $T > 0$.

2. Como $f(x) = A\operatorname{sen}(\omega x + \varphi) = A\operatorname{sen}\left(\omega(x - (\frac{-\varphi}{\omega}))\right)$ se tiene que $\dfrac{-\varphi}{\omega}$ es el ángulo en el cual la sinusoide está **desfasada**. Entonces el ciclo se inicia en el punto $(\frac{-\varphi}{\omega}, 0)$. En electricidad cuando se tienen dos sinusoides que represetan la corriente y voltaje, respectivamente, el ángulo de fase entre las dos funciones se conoce como factor de potencia.

3. El número A se llama la **amplitud** de la sinusoide.

4. El número $|\omega| = \dfrac{2\pi}{T}$ se llama la **frecuencia** de la sinusoide.

Algunas veces la función sinusoidal no aparece en la forma explícita $f(x) = a\operatorname{sen}(\omega x) + b\cos(\omega x)$; pero bajo identidades trigonométricas podemos llevarla a esta forma. Veamos un ejemplo:

$$f(x) = 3\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{2}\cos 3x.$$

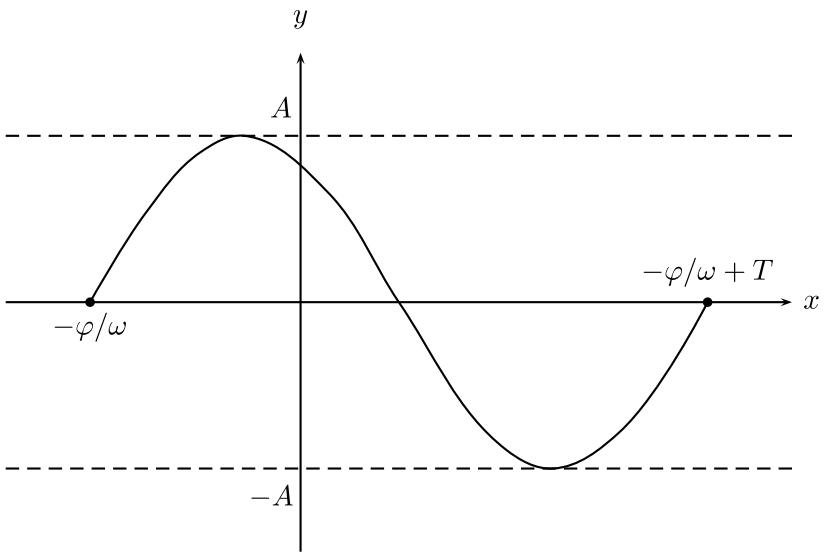


Figura 3.17: Función sinusoidal $f(x) = A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi)$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{sen}\,x\cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos^2 x - \mathrm{sen}^3 x + \frac{1}{2}\cos 3x \\ &= \mathrm{sen}\,x(\cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x) + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos 3x \\ &= \mathrm{sen}\,x\cos 2x + 2\,\mathrm{sen}\,x\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos 3x \\ &= \mathrm{sen}\,x\cos 2x + \cos x\,\mathrm{sen}\,2x + \frac{1}{2}\cos 3x \\ &= \mathrm{sen}(x + 2x) + \frac{1}{2}\cos 3x \\ &= \mathrm{sen}\,3x + \frac{1}{2}\cos 3x. \end{aligned}$$

que es de la forma sinusoidal.
Obviamente no toda función trigonométrica es sinusoidal, por ejemplo $f(x) = \mathrm{sen}^2 x\,\mathrm{sen}\,2x$ es la función $\mathrm{sen}\,2x$ con amplitud periódica igual a $\mathrm{sen}^2 x$. Realice con ayuda de su calculadora un gráfico de esta función.

Ejemplo 3.2.7 1. La función $\varphi_1(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)$ es la sinusoide seno con amplitud 2.

2. La función $\varphi_2(x) = \cos(2x)$ es la sinusoide coseno de período π.

3. La función $f(x) = 2\,\mathrm{sen}(x) + \cos(2x)$ que es la suma de las dos sinusoides anteriores no es una función sinusoidal.

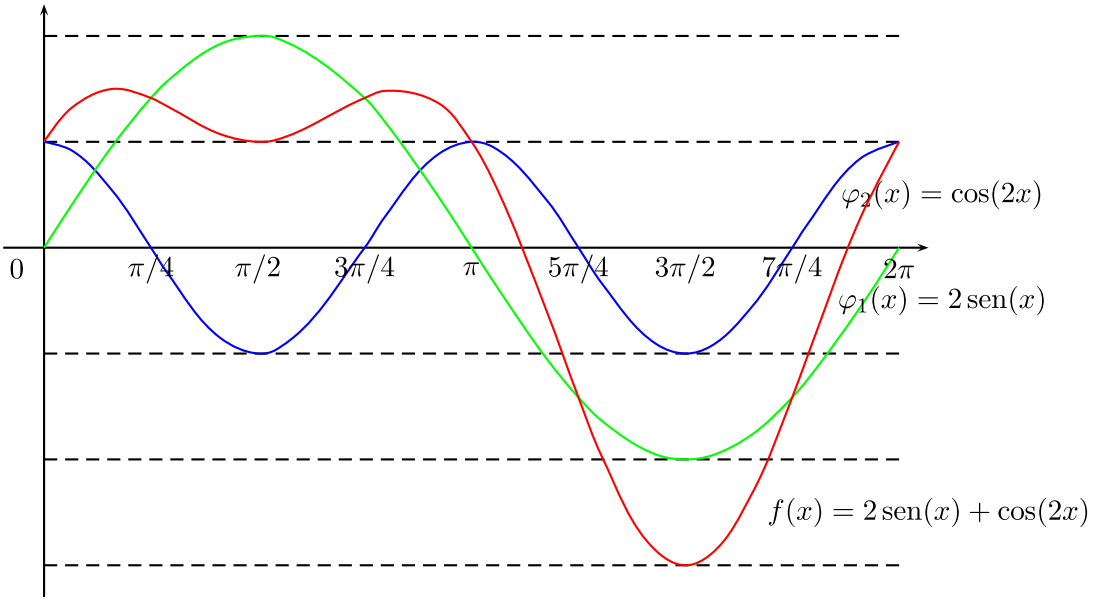


Figura 3.18:

Ejercicios resueltos

1. Grafique en un mismo diagrama, con colores distintos para cada función:

   a) $\mathrm{sen}\,x$, $\mathrm{sen}\,2x$, $\mathrm{sen}(x/2)$.

   b) $\mathrm{sen}\,x$, $2\,\mathrm{sen}\,x$, $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$.

   c) $\mathrm{sen}\,x$, $\mathrm{sen}(x+\pi)$, $\mathrm{sen}(x-\pi)$.

   Solución:

   a) al graficar las funciones $\mathrm{sen}\,x$, $\mathrm{sen}\,2x$, $\mathrm{sen}(x/2)$ en un mismo diagrama obtenemos lo siguiente.

Efecto del coeficiente ω en la función $\operatorname{sen}(\omega x)$

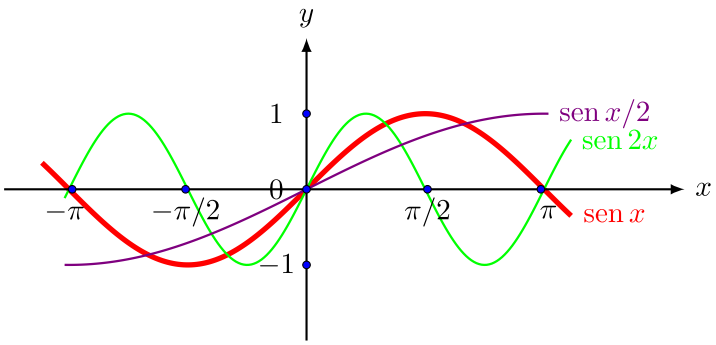


Figura 3.19: Efecto del coeficiente ω en la función $\operatorname{sen}(\omega x)$

A través de este caso particular, podemos apreciar que el efecto de multiplicar la variable x por ω, es una contracción o dilatación de la onda básica dada por $\operatorname{sen} x$ en la dirección del eje X. Si $0 < \omega < 1$, la curva $\operatorname{sen}(\omega x)$ es una contracción; si $\omega > 1$, la curva $\operatorname{sen}(\omega x)$ es una dilatación. El caso de $\omega < 0$ se deja al estudiante.

b) Los gráficos de $\operatorname{sen} x$, $2\operatorname{sen} x$, $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} x$ son:
Tal como en el caso anterior, a través de este caso particular podemos apreciar que al coeficiente $\alpha > 0$ tiene el efecto de dilatar o contraer la función $\operatorname{sen} x$ en la direccción del eje Y, según sea mayor o menor que 1.el caso $\alpha < 0$ se deja al estudiante.

c) En primer lugar, observemos que dado que $\operatorname{sen} x$, es de período 2π, se cumple

$$\operatorname{sen}(x - \pi) = \operatorname{sen}(x - \pi + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + \pi), \quad \text{cualquiera sea } x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

El gráfico de estas funciones es:
La traslación de la variable independiente en la función $\operatorname{sen} x$ es un desplazamiento del gráfico a lo largo del eje X.

2. Calcular amplitud, período T y ángulo de fase de las siguientes funciones. Esboce su gráfico en $[0, T]$.

a) $f(x) = 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{5}\right)$.

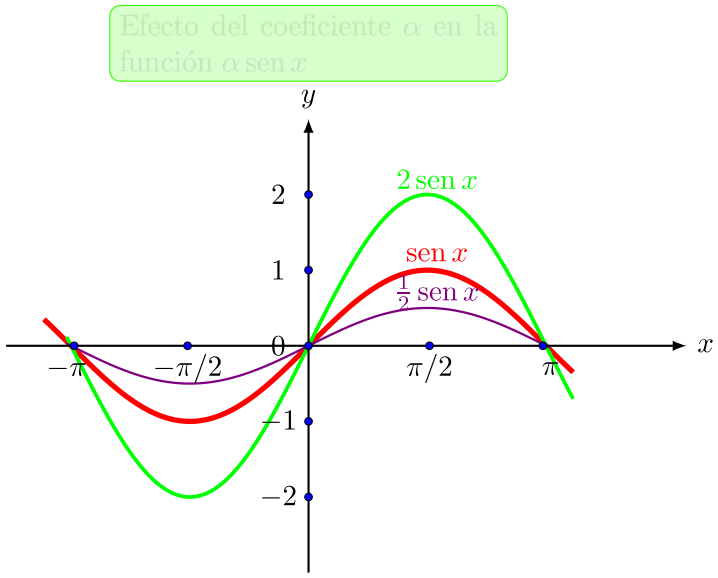


Figura 3.20: Efecto del coeficiente α en la función $\alpha \operatorname{sen} x$

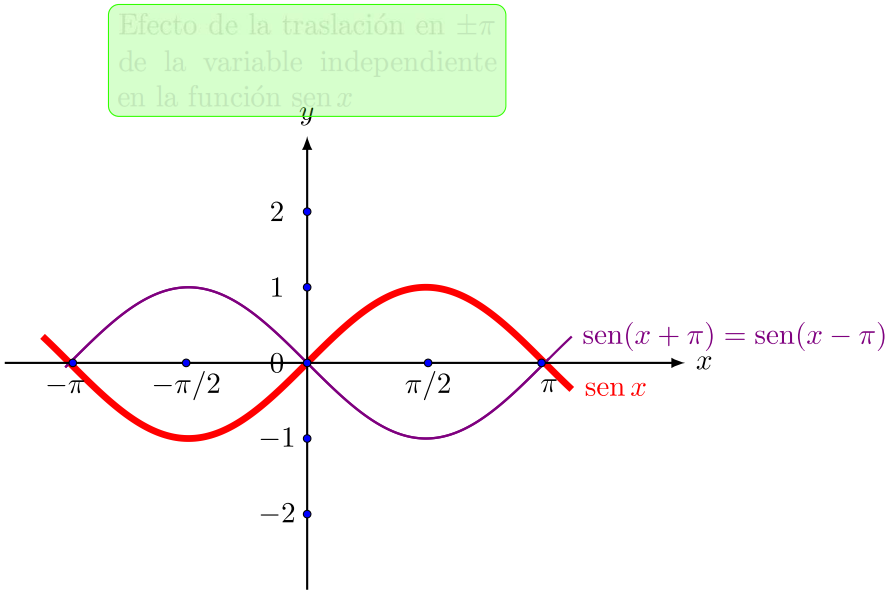


Figura 3.21: Efecto de la traslación en $\pm\pi$ de la variable independiente en la función $\operatorname{sen} x$

b) $g(x) = 0{,}12 \operatorname{sen}\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right)$.

Solución:
Las funciones f y g están escritas como una sinusoidad, $A\,\mathrm{sen}(\omega x+\varphi)$, por lo tanto:

	Amplitud	Período	Fase
f	3	$\dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}=4\pi$	$-\dfrac{\varphi}{\omega}=-\dfrac{2\pi}{5}$
g	$0,12$	$\dfrac{2\pi}{\lvert\omega\rvert}=\dfrac{2\pi}{3}$	$-\dfrac{\varphi}{\omega}=-\dfrac{\pi}{15}$

3. Demuestre que las siguientes funciones son sinusoidales y calcule su amplitud, período y ángulo de fase.

   a) $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$
   b) $g(x)=3\operatorname{sen}x-4\cos x$.

Solución:
Para demostrar que f y g son sinusoidales debemos escribirlas en la forma $A\,\mathrm{sen}(\omega x+\varphi)$.

a) Si $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$, entonces $a=b=1$. Por lo tanto, debemos amplificar f por

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}.$$

$$f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\operatorname{sen}(x+\varphi)$$

donde φ es tal que $\operatorname{sen}\varphi=\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto, $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ y f queda escrita como:

$$f(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

b) Si $g(x)=3\operatorname{sen}x-4\cos x$, entonces $a=3$ y $b=-4$. Por lo tanto, debemos amplificar g por

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25}=5.$$

$$g(x)=3\operatorname{sen}x-4\cos x=5\left(\frac{3}{5}\operatorname{sen}x+\frac{-4}{5}\cos x\right)=5\operatorname{sen}(x+\varphi)$$

donde φ es tal que $\operatorname{sen}\varphi=\dfrac{-4}{5}$ y $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$. Por lo tanto, g queda escrita como:

$$g(x)=5\operatorname{sen}(x+\varphi)$$

4. Justifique por qué la función $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}(2x)$, no es una función sinusoidal.

   Solución:
   La función $\operatorname{sen} 2x$ es una sinusoidal, pero al ser multiplicada por $\operatorname{sen}^2 x$, su amplitutud deja de ser constante.

Ejercicios propuestos

1. Grafique en un mismo diagrama, con colores distintos para cada función:

   a) $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos(x/2)$.

   b) $\cos x$, $2\cos x$, $\frac{1}{2}\cos x)$.

   c) $\cos x$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(x-\pi))$.

2. Calcular amplitud, período T y ángulo de fase de las siguientes funciones. Esboce su gráfico en $[0, T]$.

   a) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$.

   b) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(0{,}4x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Demuestre que las siguientes funciones son sinusoidales y calcule su amplitud, período y ángulo de fase.

   a) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

   b) $f(x) = 3\operatorname{sen} x - 4\cos x$.

4. Grafique $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$.

5. Calcule la amplitud, el período, la frecuencia y el desfase de la sinusoide $f(x) = 6\operatorname{sen} x - 8\operatorname{sen}^3 x$.

6. Justifique por qué la función $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$, no es una función sinusoidal

7. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y &= a \\ \cos 2x + \cos 2y &= b \end{cases}$$

Teoremas del seno y del coseno

Queremos abordar ahora dos problemas clásicos de la geometría:

1. Dado un triángulo cualquiera del cual se conoce la longitud de dos de sus lados, encontrar la longitud del tercero.

2. Encontrar en un triángulo cualquiera la longitud de un lado conociendo el ángulo opuesto y la longitud y el respectivo ángulo opuesto de otro lado.

Estos problemas son resueltos por el teorema del coseno y el teorema del seno respectivamente. Antes de enunciarlos veamos la siguiente equivalencia:

En un triángulo ABC cualquiera, se tiene que:

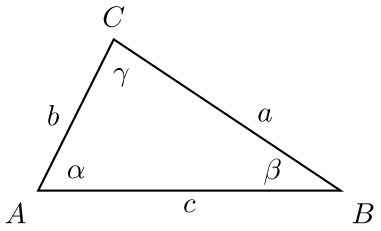


Figura 3.22:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad (i) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

si y sólo si

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad (ii)$$

Demostremos primeramente que $(i) \implies (ii)$.

Sea $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, entonces $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\\
\operatorname{sen}^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\\
&= \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\\
&= \frac{(2bc-(b^2+c^2-a^2))(2bc+(b^2+c^2-a^2))}{4b^2c^2}\\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}.
\end{aligned}$$

Análogamente usando el mismo procedimiento, considerando $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, se tiene

$$\operatorname{sen}^2\beta = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4a^2c^2}.$$

De ambas ecuaciones obtenemos $b^2\operatorname{sen}^2\alpha = a^2\operatorname{sen}^2\beta$ y como $\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\beta \geq 0$, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}.$$

La otra identidad se obtiene de la misma manera. Demostremos ahora que $(ii) \implies (i)$.

Sabemos que $\pi = \alpha+\beta+\gamma$, por lo tanto:
$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}[\pi-(\beta+\gamma)] = \operatorname{sen}(\beta+\gamma)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\alpha &= (\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+\cos\beta\operatorname{sen}\gamma)^2\\
&= \operatorname{sen}^2\beta\cos^2\gamma+\cos^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma+2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\beta\cos\gamma\\
&= \operatorname{sen}^2\beta(1-\operatorname{sen}^2\gamma)+(1-\operatorname{sen}^2\beta)\operatorname{sen}^2\gamma+2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\beta\cos\gamma\\
&= \operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma-2\operatorname{sen}^2\beta\operatorname{sen}^2\gamma+2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\beta\cos\gamma\\
&= \operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma-2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\cos\beta\cos\gamma)\\
&= \operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma-2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(-\cos(\beta+\gamma))\\
&= \operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma-2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma(-\cos(\pi-\alpha)
\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\gamma-2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha.$$

Por hipótesis sabemos $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = k =$ constante $\neq 0$, entonces $\operatorname{sen}\alpha = ka$, $\operatorname{sen}\beta = kb$, y $\operatorname{sen}\gamma = kc$. Sustituyendo estas expresiones en la expresión encontrada para $\operatorname{sen}^2\alpha$, se obtiene:

$$k^2a^2 = k^2b^2 + k^2c^2 - 2k^2bc\cos\alpha$$

es decir, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, que es lo que queríamos probar. Las otras identidades se demuestran de la misma manera. Enunciaremos ahora los teoremas del coseno y del seno.

Teorema 3.2.8 Teorema del Coseno En un triángulo cualquiera ABC, se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Teorema 3.2.9 Teorema del Seno

En un triángulo cualquiera ABC, se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}.$$

Por lo obtenido anteriormente estos teoremas son equivalentes, luego basta demostrar sólo uno de ellos. Demostraremos el teorema del coseno.
Sea ABC un triángulo cualquiera y ubiquémoslo en un sistema de coordenadas de forma que el ángulo α esté en el vértice O y el lado c en el eje de las abscisas, como lo indica la figura.

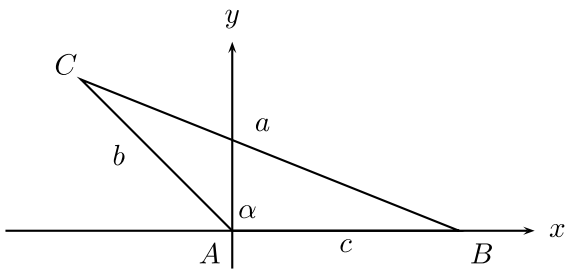


Figura 3.23:

$$A = (0,0) \quad ; \quad B = (c,0) \quad ; \quad c = (b\cos\alpha, b\operatorname{sen}\alpha)$$

Figura 1.4.27: Teorema del seno

Por tanto:

$$\begin{aligned} a^2 &= d^2(B,C) = (c - b\cos\alpha)^2 + (0 - b\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 \\ &= c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha + b^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha \\ &= b^2(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

Las otras identidades se demuestran en forma similar ubicando el sistema de coordenadas en los vértices y lados indicados.
Observación: Sabemos de los teoremas de congruencias de triángulos en geometría plana que un triángulo queda completamente determinado si se conoce una de las siguientes alternativas:

1. Un lado y dos ángulos.
2. Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos. Con el teorema del seno podemos entonces resolver cualquier triángulo si se conoce (1) o (2).
3. Dos lados y el ángulo comprendido entre ambos.
4. Los tres lados.

   En estos casos con el teorema del coseno resolvemos el triángulo.

Ejercicios resueltos

1. Resolver un triángulo significa determinar los lados a, b, c y los ángulos α, β, γ dados al menos tres datos. Este problema se reduce a cuatro tipos elementales:

   a) Se conoce un lado y dos ángulos.

   Solución: Supongamos conocidos el lado a y los ángulos β y γ. Calculemos el ángulo α y los lados b y c. Tenemos las ecuaciones: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ y $\dfrac{\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \dfrac{\beta}{\mathrm{sen}\,\beta} = \dfrac{\gamma}{\mathrm{sen}\,\gamma}$. Por tanto $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$, $b = \dfrac{asen\beta}{\mathrm{sen}\,\alpha}$, $c = \dfrac{asen\gamma}{\mathrm{sen}\,\alpha}$.

   b) Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

   Solución: Supongamos que se conocen los lados a y b y el ángulo γ. Calculemos α, β y c.

   Tenemos las ecuaciones: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ y $\dfrac{a}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \dfrac{b}{\mathrm{sen}\,\beta} = \dfrac{c}{\mathrm{sen}\,\gamma}$. Calculemos primeramente α y β. Sabemos que $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ y $\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{a}{b}$.

Busquemos la diferencia $\alpha - \beta$. La segunda ecuación puede escribirse como:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}$$

o bien,

$$\frac{\operatorname{tg}(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha+\beta}{2})} = \frac{a-b}{a+b}$$

Pero

$$\operatorname{tg}(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \operatorname{tg}(90 - \frac{\gamma}{2}) = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

y por lo anterior,

$$\operatorname{tg}(\frac{\alpha-\beta}{2}) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

Lo que permite conocer $\frac{\alpha+\beta}{2}$ y $\frac{\alpha-\beta}{2}$, por tanto α y β. El lado c se obtiene de $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Observemos que siempre podemos suponer $a \geq b$ para que $\frac{\alpha-\beta}{2}$ tenga un solo valor menor que 90^0. También podemos obtener c por $c = \dfrac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$, calculando primeramente α y β como lo hemos hecho.

c) *Se conocen los tres lados.*

Solución: Se conocen a, b, y c y queremos calcular α, β y γ.

De las conocidas relaciones :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad \text{y} \quad 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad ,$$

obtenemos,

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \quad ,$$

de donde,

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} \, .$$

Si designamos por $2s$ el perímetro del triángulo, tenemos:

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2s \\ b+c-a &= 2(s-a) \\ a+c-b &= 2(s-b) \\ a+b-c &= 2(s-c). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ .$$

De igual manera:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$
$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

También, de las conocidas relaciones:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \text{y} \quad 2bc\cos\alpha = b^2+c^2-a^2\ \ ,$$

obtenemos:

$$2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-b^2-c^2+2ac}{2bc}$$
$$2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+b-c)}{2bc}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\
\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ac}} \\
\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad \text{, entonces} \\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\
\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\
\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-c)}}\ .
\end{aligned}$$

De donde se obtiene α, β y γ.

Observemos que para obtener los radicales no negativos es necesario que cada lado sea menor que la suma de los otros dos, condición que se satisface trivialmente en un triángulo.

d) Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Solución: Supongamos conocidos los lados a, b y el ángulo α. Calculemos β, γ y el lado c. De las identidades:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \text{ y } \alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

obtenemos,

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a}\ , \gamma = 180 - (\alpha + \beta)$$

luego $c = \dfrac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Observemos que el problema puede no tener solución, tener una solución o puede tener dos soluciones dependiemdo de $a - b\operatorname{sen}\alpha$. También c se puede obtener directamente de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, que es una ecuación de segundo grado en c.

2. En cada caso del ejercicio anterior calcule el área con los respectivos datos.

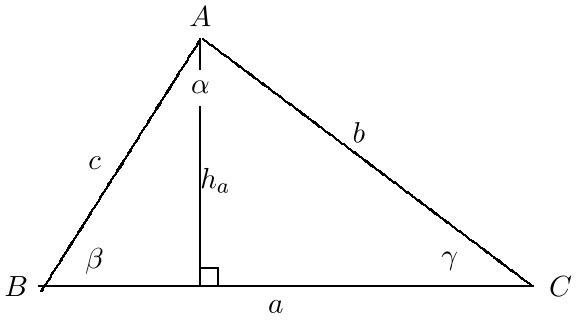


Figura 3.24: Triángulo

Solución:

a) En este caso, el área del triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura, por lo tanto, S = área del triángulo = $\dfrac{a \cdot h_a}{2}$. Como $h_a = c\operatorname{sen}\beta = \dfrac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\beta$.

Por tanto:

$$S = \frac{1}{2}\frac{a^2\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{2}\frac{a^2\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}.$$

b) En el segundo caso, el área del triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo que comprenden.

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ y } h_a = b \operatorname{sen} \gamma \, ,$$

se tiene:

$$S = \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2} \, .$$

c) En el tercer caso, expresemos la superficie del triángulo por $\dfrac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2}$ y reemplacemos $\operatorname{sen} \alpha$ por $2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ y tenemos:

$$\begin{aligned} S &= bc \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ &= bc \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2 c^2}} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

d) En el último caso se obtiene como en (b), es decir,

$$S = \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2}.$$

3. Una de las más interesantes aplicaciones de la trigonometría es calcular distancias desde o entre puntos inaccesibles.

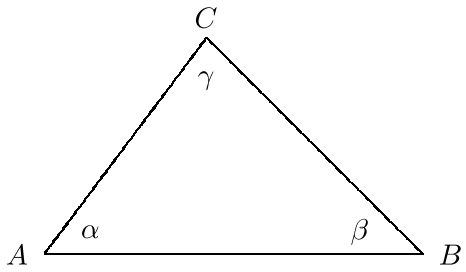


Figura 3.25: Distancia a un punto inaccesible

a) Determine la distancia de un punto accesible A a otro punto inaccesible C. Por ejemplo, C está en el otro lado de un río que no podemos pasar.
Solución: Elijamos un punto B del cual podamos medir $\overline{AB}$ como en la figura. Con ayuda de un grafómetro se miden los ángulos α y β, entonces, como $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, por teorema de los senos tenemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma}$$

implica

$$\overline{AC} = \overline{AB}\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}.$$

b) Determine la distancia entre dos puntos inaccesibles D y C. Por ejemplo, C y D están en el otro lado de un río que no podemos pasar.

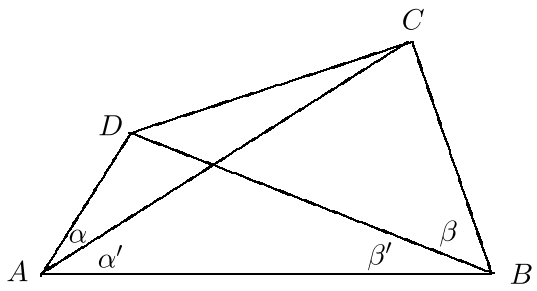


Figura 3.26: Distancia entre dos puntos inaccesibles

Solución: Determinaremos las distancias de un punto accesible A a los dos puntos C y D, y mediremos el ángulo α del triángulo ACD y resolveremos este triángulo por el método del ejercicio (1.b). Para ello, mediremos el trazo $\overline{AB}$ y los ángulos α', β' formados por la base $\overline{AB}$ y los rayos visuales dirigidos desde A y B hacia C y D. Se calculan las distancias $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ en los triángulos ABC y ABD de los cuales se conocen los ángulos y el lado común.
Como $\alpha = (\alpha + \alpha') - \alpha'$ y $\alpha + \alpha'$ y α' se pueden medir, entonces se puede calcular $\overline{CD}$ por el método indicado anteriormente.

c) Determine la altura de una torre cuyo pie es accesible.

Solución: Sea A el pie de la torre y D un punto accesible. El grafómetro se ubica en D, éste tiene una altura $\overline{DC}$. Queremos calcular $\overline{AB}$.

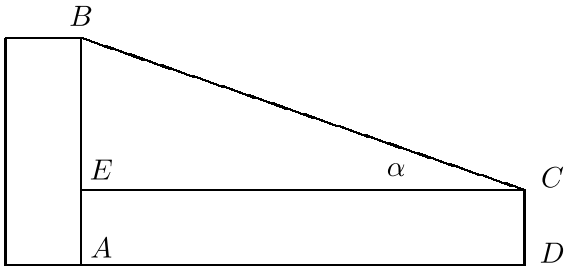


Figura 3.27: Torre de pie accesible

Se mide α y se conoce $\overline{EC}$, lo que implica $\overline{BE} = \overline{EC}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, por lo tanto, $\overline{AB} = \overline{DC} + \overline{EC}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

d) Determine la altura de una torre cuyo pie es inaccesible.

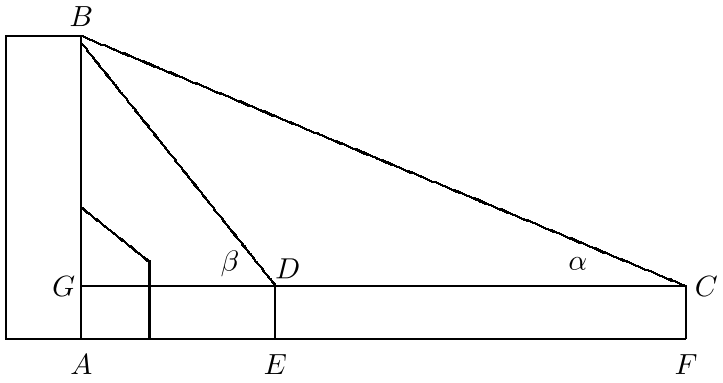


Figura 3.28: Torre de pie inaccesible

Solución: Queremos calcular $\overline{AB}$. Se ubican los puntos accesibles E y F tal que $\overline{DE} = \overline{CF} =$ altura del grafómetro.

Se miden α y β. Entonces se puede calcular $\overline{BD}$, pues se conoce en el triángulo BDC los ángulos α y $180-\beta$ y el lado $\overline{DC}$. De igual forma se puede calcular $\overline{GB}$, G es un punto inaccesible a la altura del grafómetro en la línea de la altura $\overline{AB}$, pues se conoce β y $\overline{BD}$, el triángulo GBC es un triángulo rectángulo. Luego $\overline{AB} = \overline{GB} + \overline{GA}$.

e) Determine la altura de una montaña.

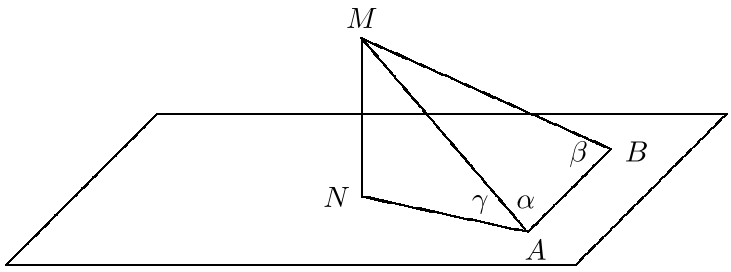


Figura 3.29: Altura de una montaña

Solución: Sea M la cima de la montaña y A y B dos puntos accesibles desde donde podemos mirar la cima M. Medimos $\overline{AB}$ y los ángulos α y β del triángulo MAB, y por tanto calculamos $\overline{AM}$. Se mide el ángulo γ formado por el trazo $\overline{AM}$ y la horizontal. Del triángulo rectángulo MNA se conoce la hipotenusa $\overline{MA}$ y el ángulo γ, por tanto calculamos $\overline{MN}$.

3.3. Límites y continuidad de las funciones trigonométricas

3.3.1. Límites de referencia de las funciones circulares

1. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$. Este límite se obtiene usando la desigualdad :

$$| \operatorname{sen} x | \leq | x | .$$

Esta se obtiene usando la definición de $\operatorname{sen} x$ y elementos de la geometría euclidiana, intuitivamente basta mirar el dibujo con que se definen las funciones circulares. De una manera más formal:
Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta = \varepsilon$ y tenemos que si $| x - 0 | = | x | < \delta$ entonces,

$$| \operatorname{sen} x - 0 | = | \operatorname{sen} x | \leq | x | < \delta = \varepsilon.$$

2. $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} \dfrac{x-a}{2} = 0$. Es consecuencia del límite anterior y del teorema 2.4.33.

3. $\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$. Usando la fórmula trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Tenemos

$$| \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a | = | 2 \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} | \leq 2 | \operatorname{sen} \frac{x-a}{2} | .$$

En virtud del teorema 2.4.32, podemos concluir que:

$$\lim_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.$$

4. $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$.
Se obtiene de modo similar al de la función $\operatorname{sen} x$, usando la fórmula

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2},$$

y el límite anterior.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.
Supongamos que $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. El triángulo ORQ de la figura está contenido en el sector circular OSQ que, a su vez, está contenido en el triángulo OST. Por tanto,

$$\text{Área } \triangle ORQ \leq \text{Área sector } OSQ \leq \text{Área } \triangle OST. \tag{1}$$

Además, $\overline{RQ} = \operatorname{sen} x$, $\overline{OR} = \cos x$, $\overline{OS} = 1$.

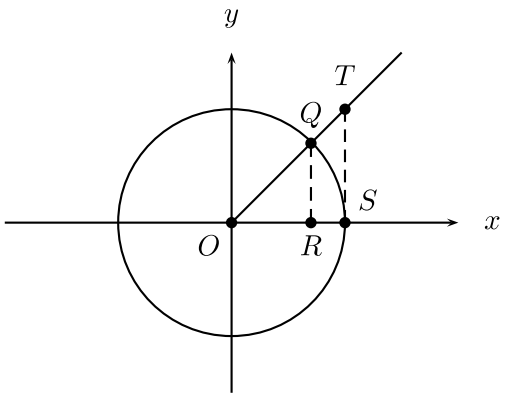


Figura 3.30:

Por semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{RQ}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OR}}.$$

Despejando $\overline{ST}$ obtenemos que:

$$\overline{ST} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$$

Entonces, la expresión (1) toma la forma:

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} \leq \text{Área sector } OSQ \leq \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x}. \tag{2}$$

Usando proporciones podemos calcular el área del sector circular:

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\text{Área del sector}}{\pi}.$$

Así (2) se escribe como:

$$\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x}. \tag{3}$$

Si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, tenemos que de la primera desigualdad de (3) obtenemos al dividirla por $\dfrac{x\cos x}{2}$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \tag{4}$$

al multiplicar la segunda desigualdad por $\dfrac{2\cos x}{x}$ obtenemos:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \tag{5}$$

De (4) y (5) tenemos que:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

desigualdad que sigue valiendo para $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, pues $\cos(-x) = \cos x$ y $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Así, para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tenemos:

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Usando el teorema 2.4.32 y el hecho que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, obtenemos que ,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

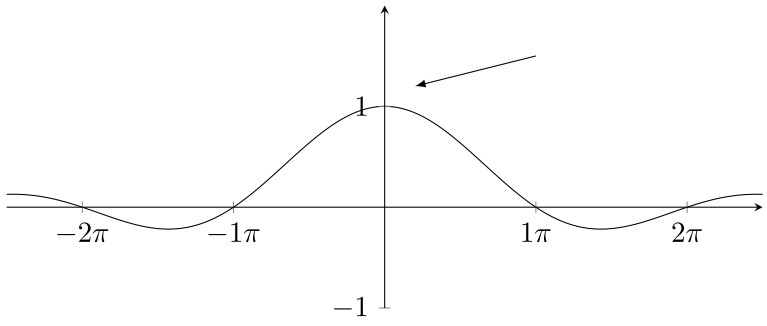


Figura 3.31: $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Observar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a} = -\operatorname{sen} a$. Usando la fórmula trigonométrica:

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \operatorname{sen} \frac{x + x_0}{2},$$

tenemos que ,

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - \cos a}{x-a} &= \frac{2\,\text{sen}\,\frac{x-a}{2}\,\text{sen}\,\frac{x+a}{2}}{x-a} \\ &= -\,\text{sen}\,\frac{x+a}{2}\,\frac{\text{sen}\,\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $x \to a$ tenemos que $u = \dfrac{x-a}{2} \to 0$ y entonces podemos usar el límite 5 y concluir que el valor de este límite es $-\,\text{sen}\,a$.

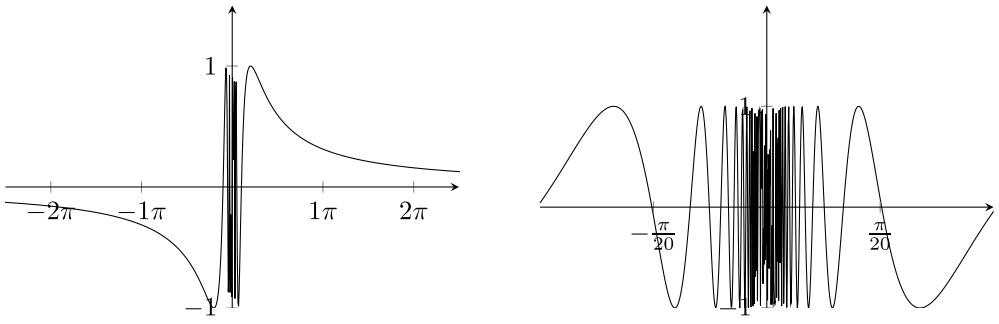
7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$ no existe.
La función $f(x) = \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$ tiene por dominio a $\mathbb{R} - \{0\}$.

Si $x > 0$; $\text{sen}\,\dfrac{1}{x} = 1$ si y sólo si $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, es decir, cuando $x = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$.
$\sin\dfrac{1}{x} = -1$ cuando $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, es decir, cuando $x = \dfrac{2}{(4n+3)\pi}$.

Así vemos que la sucesión $x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ es tal que $x_n > 0$, $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$.

Pero también existe la sucesión $y_n = \dfrac{2}{(4n+3)\pi}$ que también converge a cero, cuando n crece, pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = -1$. Esto significa que la función oscila entre 1 y -1 cuando $x \to 0^+$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$ no existe.



(a) $-3\pi < x < 3\pi$ (b) $-\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{10}$

Figura 3.32: Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0.$

9. **Límites de la tangente**

   - Si x_0 pertenece al dominio de la tangente, usando la aritmética de límites y los límites anteriormente calculados, tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \tan x &= \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x_0}{\cos x_0} \\ &= \tan x_0. \end{aligned}$$

   - **Asíntotas de la tangente**
     Las rectas $x = (n+1)\dfrac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ son asíntotas verticales de la función $y = \tan x$. En efecto: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim\limits_{x \to s\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ como $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{sen} x = 1$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+$ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0^-$, entonces $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

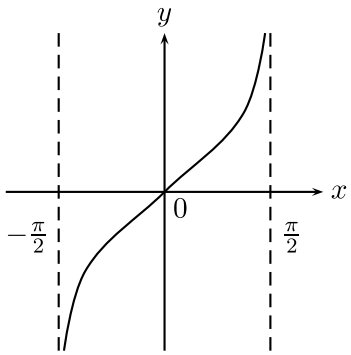


Figura 3.33: $y = \tan x$

10. $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ no existe. Si $x > 0$

$$\operatorname{sen} x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad ; n \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{sen} x = 0 \iff x = 2n\pi \; ; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, cualquiera sea $M > 0$. Por la propiedad arquimediana existe n tal que $2n\pi > M$ y $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi > M$.

Si $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = L$ existiera, entonces llamando $f(x) = \operatorname{sen} x$ tenemos:

$$|L - f(2n\pi)| < \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad |L - f(2n\pi + \frac{\pi}{2})| < \frac{1}{3}.$$

Lo que implica :

$$|f(2n\pi) - f(2n\pi + \frac{\pi}{2})| = 1 < |L - f(2n\pi)| + |L - f(2n\pi - \frac{\pi}{2})| < \frac{2}{3}.$$

Contradicción que proviene de suponer que $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ existe.

3.3.2. Ejercicios resueltos

1. *a*) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x}$.

   b) Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$.

Solución:

a) $\dfrac{5x}{4x}\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot\dfrac{4x}{\operatorname{sen} 4x}=\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot\dfrac{4x}{\operatorname{sen} 4x}$.

Cuando $x\to 0$ $4x$ y $5x\to 0$, por tanto $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x})=\dfrac{5}{4}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{5}{4}$.

b) Con los mismos pasos se llega a que este límite es $\dfrac{m}{n}$.

2. Esbozar los gráficos de las funciones:

a) $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

b) $g(x)=x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

c) $h(x)=\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

Solución:

a) $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$. Como la función es acotada por 1, es decir, $|\operatorname{sen} u|\leq 1$, entonces tenemos que:

$$-1\leq \operatorname{sen}\frac{1}{x}\leq 1.$$

Por lo cual su gráfico se encuentra en la franja $[-1,1]$ del eje Y.

Como hemos visto en el ejemplo 2.4.19 caso 4, $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ no existe, pues la función oscila.

$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0^+}\operatorname{sen} t=0$, usando el teorema 2.4.35 y el límite relevante 1.

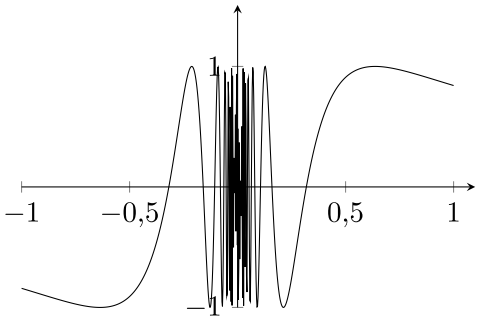


Figura 3.34: Gráfico de $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

b) $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$-x \leq g(x) \leq x$$

Lo que nos dice que el gráfico de $g(x)$ está comprendido entre las rectas $y = -x$, $y = x$.

$$\lim_{x\to 0} -x \leq \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq \lim_{x\to 0} x$$

Usando el teorema 2.4.32, vemos que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.

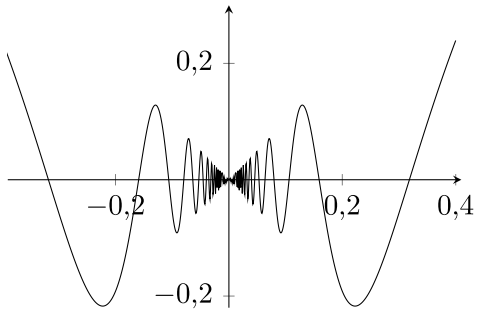


Figura 3.35: Gráfico de $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

c) El gráfico de $h(x)$ está comprendido entre las hipérbolas $y = \pm\frac{1}{x}$. Con un cálculo semejante al de las dos funciones anteriores obtenemos que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 0.$$

En las cercanías de $x = 0$ la función cruza infinidad de veces el eje X oscilando entre sus valores extremos que están sobre las hipérbolas. Su gráfico es el que vemos en la figura 1.4.40.

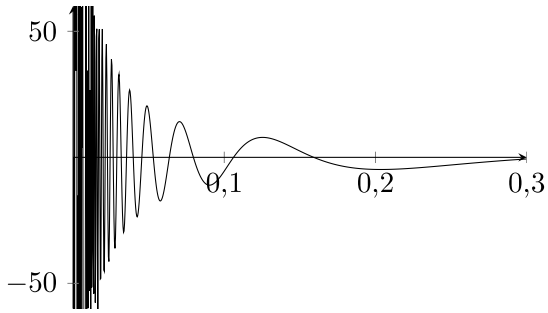


Figura 3.36: Gráfico de $h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

3. Calcular: $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}+\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x+\cos x}$.

Solución: La evaluación directa da origen a una forma indeterminada de tipo $\dfrac{0}{0}$. Para evitarla debemos transformar la expresión.
Reemplazando $\cos x$ por $1-2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}$ y $\operatorname{sen} x$ por $2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}+1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1+4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+1-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)+\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}{2\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)+4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\left(1-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(1+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{2\left(1-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)\left(1+2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\left(1+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{2\left(1+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(1+2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Cuando $x=\pi$ la última expresión vale $\dfrac{1}{4}$.

4. Resuelva la ecuación $\tan x\tan^2\dfrac{x}{2}+2\tan\dfrac{x}{2}-\tan x=0$,tomando como incógnita $\tan\dfrac{x}{2}$, y encuentre los límites de las raíces de esta ecuación cuando $\tan x\to\infty$ y $\tan x\to 0$.

Solución: Tenemos :

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}=-\frac{1}{\tan x}\pm\sqrt{\frac{1}{\tan^2 x}+1}.$$

Si $\tan x\to\infty$, entonces $\tan\dfrac{x}{2}\to\pm 1$.
Si $\tan x\to 0$, separando las raíces tenemos que:

$$\begin{aligned}\tan\frac{x}{2} &= \frac{-1+\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}\\ &= \frac{\tan^2 x}{\tan x(\sqrt{1+\tan^2 x}+1)}\\ &= \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}+1}.\end{aligned}$$

Por tanto, si $\tan x \to 0$, entonces $\tan \dfrac{x}{2} \to 0$.

Para la otra raíz tenemos:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \tan^2 x}}{\tan x}.$$

Si $\tan x \to 0$, entonces $\tan \dfrac{x}{2} \to \infty$.

5. *a*) Demuestre que valores pequeños de x, $x \approx \tan x$.

   b) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos \dfrac{x}{2} \cdot \cos \dfrac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos \dfrac{x}{2^n}) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. cuando $x \neq 0$.

Solución:

a) Es equivalente a demostrar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

En efecto:

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) Usando inductivamente la fórmula del ángulo doble, tenemos las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}; \quad \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4}$$
$$\operatorname{sen} \frac{x}{2^2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2^3} \cdot \cos \frac{x}{2^3}, \ldots, \operatorname{sen} \frac{x}{2^{n-1}} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}$$

Remplazando, nos queda:

$$\operatorname{sen} x = 2^n \operatorname{sen} \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n}$$

si $x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n}$$

Como para x fijo, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{x}{2^n}} = 1$, se tiene lo que queríamos demostrar.

3.3.3. Ejercicios propuestos

3.3.4. Continuidad de las funciones circulares

Teorema 3.3.1 Las funciones $x \longmapsto \operatorname{sen} x$ y $x \longmapsto \cos x$ son continuas para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:
Es consecuencia de los límites de referencia 3 y 4 y la definición de continuidad. □

Ejemplo 3.3.2

1. La función $\operatorname{sen}(x^5 - 4x^2 + 1)$ es continua, para todo $x \in \mathbb{R}$, por ser compuesta de dos funciones continuas.

2. La función
$$h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
es discontinua en el punto $x = 0$, porque no se cumple la condición $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, al ser $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ distinto de $h(0)$.

3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ puede extenderse de manera que sea continua en $x = 0$ definiendo $f(0) = 1$.

4. $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ se puede redefinirse de modo que resulte continua en $x = 0$. Para ello basta definir $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Teorema 3.3.3 El recorrido de las funciones seno y coseno es $[-1\ ,\ 1]$.

Demostración:
La continuidad de ambas funciones y dado que ellas toman el valor 1 y -1, aplicando el teorema del valor intermedio 2.5.15, ellas toman todos los valores entre -1 y 1.

Ejemplo 3.3.4 Ejemplo de una función que toma todos los valores en un intervalo sin ser continua
La propiedad descrita por el teorema 2.5.15 no caracteriza a todas las funciones continuas, es decir, existen funciones que tienen dicha propiedad sin ser continuas. Por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, pero como ya hemos visto no es continua.

Teorema 3.3.5 Las funciones trigonométricas: $\tan x, \operatorname{cotan} x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ son continuas en todo punto a de $\mathbb{R}$ que no anula el denominador.

Es consecuencia de la continuidad de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. □

3.3.5. Las inversas de las funciones circulares

Las funciones períodicas no son inyectivas, por tanto, para analizar la existencia de inversas de las funciones trigonométricas, se debe restringir de manera conveniente el dominio, como veremos en cada uno de los siguientes casos. Los gráficos de estas funciones los veremos mas adelante en la sección 4.3.

1. **La inversa de seno: la función arcoseno** $h(x) = \operatorname{sen} x$, con $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es estrictamente creciente y su recorrido es $[-1, 1]$. Así, la función h es biyectiva y existe h^{-1}. La continuidad de seno y el teorema 2.5.22 implican que $h^{-1}(x)$ es continua en $[-1, 1]$. A la función $h^{-1}(x)$ se le llama *arcoseno de* x y se denota $y = arcsenx$.

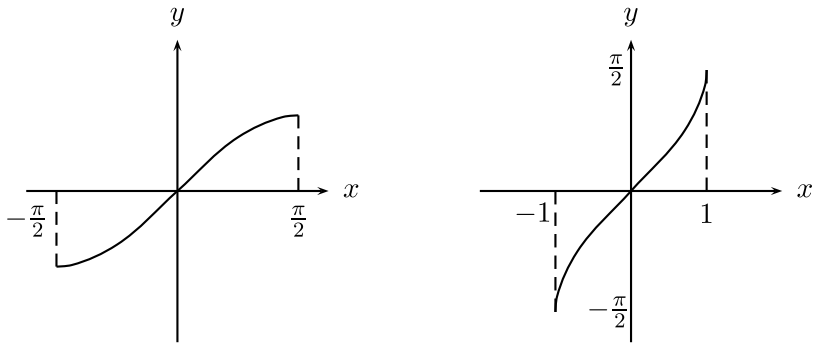


Figura 3.37: La función $\operatorname{sen} x$ y su inversa

2. **La inversa de coseno: la función arcocoseno** $y = \operatorname{arc\,cos} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ es la función inversa de $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, de modo que se cumple

$$y = \operatorname{arc\,cos} x \iff x = \cos x.$$

3. **La inversa de tangente: la función arcotangente** $y = \arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es la función inversa de $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, es decir,

$$y = \arctan x \iff x = \tan y.$$

4. **La inversa de cotangente: la función arcocotangente** $y = \operatorname{arctan} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ es la función inversa de $\operatorname{cotan} x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, tal que

$$y = \operatorname{arccotan} x \iff x = \operatorname{cotan} x.$$

5. **La inversa de secante: la función arcosecante** $y = arc\sec x : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ es la función inversa de $\sec x : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, tal que
$$y = \operatorname{arcsec} x \iff x = \sec y.$$

6. **La inversa de cosecante: la función arcocosecante** $y = \operatorname{arccosec} x : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ es la función inversa de $\operatorname{cosec} x : [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, tal que
$$y = \operatorname{arccosec} x \iff x = \operatorname{cosec} y.$$

3.3.6. Problemas resueltos

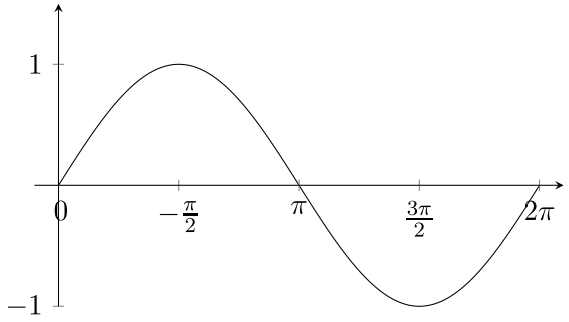


Figura 3.38: $y = \operatorname{sen}(x)$

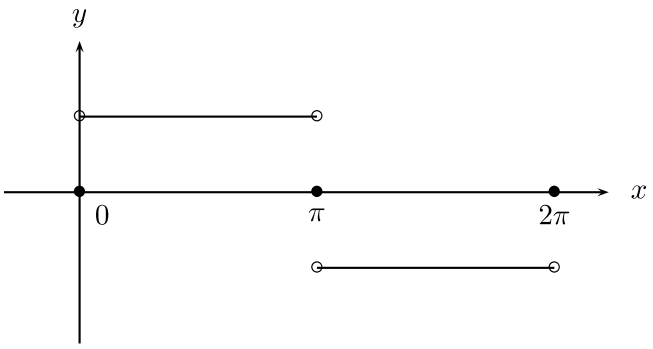


Figura 3.39: $y = \operatorname{signo}(\operatorname{sen} x)$

1. Analice la continuidad de
$$f(x) = \operatorname{signo}\ (\operatorname{sen} x).$$

Solución: Por ser sen x una función periódica de período 2π, $f(x+2\pi) = \text{signo}(\ \text{sen}\,(x+2\pi)) = \text{signo}(\ \text{sen}\, x) = f(x)$. Entonces, vemos que f también es una función periódica con período 2π, lo que nos permite restringir el análisis al intervalo $[0, 2\pi]$.

$$f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0.$$

Si $x \in (0,\pi), f(x) = 1$, en cambio, si $x \in (\pi, 2\pi), f(x) = -1$. Por consiguiente, la función es continua en los intervalos $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$, y es discontinua en los puntos $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Considere las sinusoides $\varphi_1(x) = a_1 \,\text{sen}\,\omega_1 x + b_1 \cos\omega_1 x$, si $x < 0$ y $\varphi_2(x) = a_2 \,\text{sen}\,\omega_2 x + b_2 \cos\omega_2 x$, si $x > 0$. ¿ Cuáles deben ser sus amplitudes para que ellas definan una función continua en $\mathbb{R}$? ¿Es la nueva función una sinusoide ? **Solución:** Como $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi_1(x) = b_1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi_2(x) = b_2$, entonces si $b_1 = b_2 = b$, la función:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \varphi_2(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$. Si $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ es la amplitud de $\varphi_i(x)$ debemos tener $A_1^2 - a_1^2 = A_2^2 - a_2^2$. Si $\varphi(x)$ fuese una sinusoide debería ser de la forma $a\,\text{sen}\,\omega x + b\,\text{sen}\,\omega x$, entonces como:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \ \text{ para } \ x < 0 \ \text{ y } \ \varphi(x) = \varphi_2(x) \ \text{ para } \ x > 0,$$

debemos tener $a_1 = a_2$ y $\omega_1 = \omega_2$ (además $b_1 = b_2$). Por tanto, genéricamente el acoplamiento de sinusoides no es una sinusoide.

3.3.7. Problemas propuestos

1. Analice la continuidad de la función parte entera de coseno $f(x) = [\cos x]$.

2. Considere la sinusoide $f(x) = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi)$ definida para $x < 0$. ¿Cómo debe ser la amplitud y el desfase para que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$?

3. Analice la continuidad de la siguiente función definida mediante un doble proceso de límite:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos\, m!\pi x)^n\,.$$

3.4. Función Exponencial y Logaritmo

3.4.1. Potencias de exponente entero

La definición de potencia de exponente natural es ejemplo de aplicación del Principio de Recurrencia.

Definición 3.4.1 Potencia de exponente entero positivo
Si a es un número real y n un entero positivo, se define:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^n &= a^{n-1} \cdot a \quad \text{si} \quad n > 1 \end{aligned}$$

El número a se llama base de la potencia, n se llama exponente y a^n es la potencia enésima de a.

Observemos que la aplicación sucesiva de la definición 3.4.1 conduce a :

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a \\ \ldots &= \ldots \\ a^n & \quad \text{expresa la multiplicación de n factores} \\ & \quad \text{iguales al número } a. \end{aligned}$$

Teorema 3.4.2 *Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$, se tienen las siguientes propiedades:*

1. $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$.
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
4. *Si* $0 < a < b$, *entonces* $a^n < b^n$.
5. *Si* $0 < a < 1$, *entonces* $0 < a^{n+1} < a^n < 1$.
6. *Si* $1 < a$, *entonces* $1 < a^n < a^{n+1}$.

Demostración: Indicación:Todas estas demostraciones relativas a números naturales se hacen usando el Principio de Inducción. Como se hace habitualmente cuando hay más de un número natural involucrado, se aplica inducción sobre uno de ellos y los demás se dejan fijos.

Definición 3.4.3 Potencia de exponente cero
Si a es un número real distinto de cero, se define:

$$a^0 = 1$$

Con esta definición se puede extender la segunda parte de la definición 3.4.1 cuando $n = 1$:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a \tag{3.8}$$

La expresión 0^0 no está definida.

Definición 3.4.4 Potencia de exponente entero negativo
Si a es un número real no nulo y n un entero positivo, a^{-n} designa al número $\dfrac{1}{a^n}$.
Es decir,

$$a \in \mathbb{R}\,, a \neq 0\,; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Debemos destacar que las potencias de exponente entero negativo no pueden tener base nula, por ejemplo, $0^{-3} \notin \mathbb{R}$.

3.4.2. Potencias de exponente racional

La existencia de raíces es una consecuencia del Axioma del Supremo y así, aparecen los números irracionales más elementales. Todas las raíces cuadradas de números naturales que no son cuadrado de otro número natural son irracionales. En la época de Platón (-428 ,-348), se conocía la naturaleza irracional de $\sqrt{2}$ hasta $\sqrt{17}$, con la excepción de la raíz cuadrada de $4, 9$ y 16.

Para extender las potencias a exponente racional debemos, en primer lugar, considerar los números racionales no enteros, de la forma $\dfrac{1}{q}, q \in \mathbb{N}$.

Definición 3.4.5 (i) Si $a \in \mathbb{R}^+$, $q \in \mathbb{N}$, denotaremos por $a^{1/q}$ ó $\sqrt[q]{a}$ al único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^q = a$

(ii) Si $a \in \mathbb{R}^-$, $q \in \mathbb{N}$, q impar, denotaremos por $a^{1/q}$ ó $\sqrt[q]{a}$ al único $y \in \mathbb{R}^-$ tal que $y^q = a$

(iii) Si $a = 0$ se define $0^{1/q} = \sqrt[q]{0} = 0$.

El número $\sqrt[q]{a}$ se lee *raíz q-ésima de a o la potencia* $\dfrac{1}{q}$ *de a.*

El siguiente teorema justifica la definición 3.4.5.

Teorema 3.4.6 Existencia de raíces.

(i) Si $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces existe un único $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^n = a$.

(ii) Si $a < 0$ y $n \in \mathbb{N}$ es impar, entonces existe un único $x \in \mathbb{R}^-$ tal que $x^n = a$.

Demostración: La idea central es demostrar que el conjunto:

(i)
$$A = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \geq 0 \ , \ y^n \leq a\},$$

es es no vacío y acotado superiormente.

Luego el Axioma del Supremo asegura la existencia en $\mathbb{R}$ de $\sup A$. Si denotamos por $x = \sup A$, la definición de x, implica que es único. A continuación se demuestra que $x^n = a$ descartando las posibilidades que que $x^n > a$ ó $x^n < a$. □

A pesar, que la naturaleza de las raíces no es en esencia algebraica, ellas pueden caracterizarse en lenguaje algebraico:

- Si $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, la raíz $\sqrt[2n]{a}$, es la única solución positiva de la ecuación
$$x^{2n} = a.$$

- Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la raíz $\sqrt[2n+1]{a}$, es la única solución, con el mismo signo de a, de la ecuación
$$x^{2n+1} = a.$$

Definición 3.4.7 Dado $a \in \mathbb{R}^+$ y un racional $r = \dfrac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, entonces $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$.

Teorema 3.4.8 Dados: $a \in \mathbb{R}^+$ y un racional $r = \dfrac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, entonces $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$.

3.4.3. Propiedades de las potencias de exponente racional

Si $a \ , \ b \in \mathbb{R}^+$, $r \ , \ s \in \mathbb{Q}$, se tiene que:

1. **Multiplicación de potencias de base igual**
$$a^r \times a^s = a^{r+s}$$

2. **División de potencias de base igual**

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

3. **Potencia de una potencia**

$$(a^r)^s = a^{r\times s}$$

4. **Multiplicación de potencias de exponente igual**

$$a^r \times b^r = (a \times b)^r$$

5. **Comparación de potencias de igual exponente**
Si $0 < a \leq b$, entonces $a^r \leq b^r$.

6. **Comparación de potencias de base igual**

   a) Si $0 \leq a \leq 1$ y $r \leq s$, entonces $a^r \geq a^s$.

   b) Si $a \geq 1$ y $r \leq s$, entonces $a^r \leq a^s$.

Observación 3.4.9 Si a es negativo, la propiedad de la multiplicación de exponentes racionales no se cumple en general. Por ejemplo,

$$[(-5)^2]^{1/2} = 5 \neq (-5)^{2\cdot 1/2} = -5.$$

3.4.4. Los números irracionales

Esta subsección puede ser omitida. Está dirigida a quienes se interesen en entender más profundamente la naturaleza de los números.

A pesar de que los griegos trabajaron sólo con números enteros positivos y desconocieron el cero, encontraron geométricamente los números irracionales a través de los segmentos inconmensurables, es decir, aquellos que no tienen una medida común. Este hecho tuvo para ellos, en particular para la Escuela Pitagórica (siglo 5 a.C), un efecto destructor, pues contradecía la base misma de su concepción discreta de las cosas. Para ellos las figuras geométricas estaban constituidas por cantidades finitas de puntos. El teorema de Pitágoras implica la existencia de magnitudes (segmentos) inconmensurables. Para ello basta tomar un cuadrado cuyo lado tenga longitud 1 y se tiene que el lado y la diagonal son inconmensurables; por tanto, estos segmentos no pueden estar formados por una cantidad finita de puntos (¿ por qué ?). Fue el primer choque en la historia de la matemática entre lo discreto y lo continuo, lo finito y lo infinito.

Teorema 3.4.10 $\sqrt{2}$ no es racional

Demostración: Por definición, $\sqrt{2}$ es un número $x > 0$, tal que de $x^2 = 2$. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, entonces es de la forma p/q, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Luego $(p/q)^2 = 2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p y q no tienen factores comunes (si los tienen podemos simplificarlos). Entonces $p^2 = 2q^2$ y p debe ser par, pues si no lo es, $p = 2k+1$ para algún entero k en este caso $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$, lo cual es una contradicción pues teníamos que p^2 era par. Por tanto p es par, es decir, $p = 2k$, para algún k entero. Se sigue entonces de $p^2 = 2q^2$, que $q^2 = 2k^2$, y por los mismos argumentos de antes tenemos que q debe ser par. Luego p y q tienen como factor común a 2, lo cual es una contradicción con nuestro supuesto inicial que p y q no tienen factores comunes. En conclusión, x no puede ser racional y satisfacer que $x^2 = 2$. □

Teorema 3.4.11 Si m, n son números naturales primos entre sí y $n \neq 1$, entonces $\dfrac{m^2}{n^2}$ no es un número natural.

Como aplicación del teorema 3.4.11 tenemos la existencia de infinitos números no racionales: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, etc. Además, este mismo teorema nos dice que la operación de extraer raíz cuadrada no es cerrada en $\mathbb{Q}$. El teorema 3.4.6 nos muestra que en general las raíces son supremos de ciertos conjuntos de números racionales. Es decir, la insuficiencia de $\mathbb{Q}$ desde este punto de vista se arregla agregando a $\mathbb{Q}$ todos los supremos de todos los posibles conjuntos de racionales. Es por esta razón que todo conjunto acotado en $\mathbb{R}$ tiene supremo e ínfimo en $\mathbb{R}$ y con esta propiedad no se necesita agregar más cosas y se logra la continuidad de $\mathbb{R}$.

3.4.5. La función exponencial

Las potencias de exponente irracional

Para definir las potencias de exponente irracional se necesita el siguiente resultado sobre la naturaleza de los irracionales.

Teorema 3.4.12 Todo número irracional x es el límite de una sucesión de números racionales.

Es decir, existe $\{r_n\}$, con $r_n \in \mathbb{Q}$, tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} r_n = x.$$

Ejemplo 3.4.13 1. Dado un número positivo x, la sucesión definida por recurrencia, con valor inicial $x_1 > 0$,

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_{n-1}} + x_{n-1}\right), n > 1.$$

Converge a $\sqrt{x}$. Si el valor inicial se elige racional, se tiene una sucesión de racionales que converge a $\sqrt{x}$. La mayoría de las raíces cuadradas de números racionales son irracionales.

2. En la sección de sucesiones hemos visto que la sucesión

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

converge al número irracional e.

3. Con el cálculo integral se demuestra la fórmula de Wallis, que da una sucesión de racionales que converge a π.

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2.$$

Definición 3.4.14 Si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, existe una sucesión, $\{r_n\}$, con $r_n \in \mathbb{Q}$, que podemos suponer monótona, tal que

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = x.$$

Bajo estas condiciones se define,

$$\boxed{a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}.}$$

La definición tiene sentido:

- Si $r_n \uparrow x$, entonces $r_n < r_{n+1}$. Lo que implica, $a^{r_n} < a^{r_{n+1}}$ si $a > 1$. Por tanto, en este caso la sucesión es estrictamente creciente. Por otra parte, dicha sucesión es acotada superiormente, ya que:

$$a^{r_n} < a^{[x]+1} \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El teorema de la sucesiones monótonas, nos asegura la existencia, en $\mathbb{R}$, de

$$L = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}.$$

- La definición no depende de la sucesión $\{r_n\}$ elegida.
  Sean $\{r_n\}, \{r'_n\}$ dos sucesiones de racionales que convergen hacia x. Por tanto, $r_n - r'_n \to 0$ y $a^{r_n - r'_n} \to a^0 = 1$. Usando las propiedades de las potencias de exponente racional, tenemos que,
  $$\frac{a^{r_n}}{a^{r'_n}} \to 1, \text{ si } n \to +\infty.$$
  Por propiedades de los límites de sucesiones se tiene que ,
  $$\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r'_n}.$$

Propiedades de las potencias de exponente real

Basada en las propiedades de las potencias de exponente racional y la aritmética de límites se pueden extender a exponente real las propiedades de las potencias de exponente racional.

Teorema 3.4.15 Si $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
2. $(a^x)^{-1} = (a^{-1})^x = a^{-x}$.
3. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$.
4. Si $a > 1$ y $x < y$,entonces $a^x < a^y$.
5. Si $a < 1$ y , $x < y$, entonces $a^x > a^y$.

Ejemplo 3.4.16

1. $\sqrt{2}^0 = 1$.
2. $(\sqrt{2})^{-2} = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2}$.
3. $\sqrt{2}^3 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
4. $(-2)^{\sqrt{2}}$ no está definido.

1. Explique en palabras qué significa $3^{\sqrt{2}}$ y calcule una aproximación de él.
2. Explique en palabras qué significa 3^{π} y calcule una aproximación de él.

Definición 3.4.17 Se llama función exponencial de base a, $a > 0$, a la función:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

Teorema 3.4.18 1. La función exponencial de base a es estrictamente decreciente, si $0 < a < 1$.

2. La función exponencial de base a es estrictamente creciente, si $a > 1$.

3. La función exponencial de base a es la función constante 1, si $a = 1$.

Demostración: Ejercicio.

Teorema 3.4.19 La función exponencial de base a no es acotada superiormente.

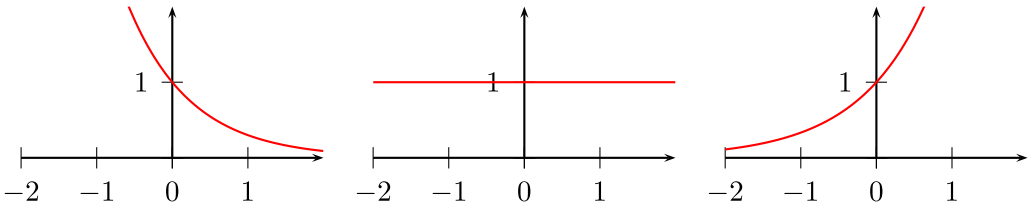
Demostración: Ejercicio.

De los teoremas (3.4.18) y (3.4.19) se obtienen los siguientes límites de referencia de la función exponencial.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$$

De particular importancia en muchas aplicaciones es la función exponencial de base e, llamada *función exponencial*, sin hacer referencia a la base y que se denota por $e^x = \exp(x)$. Más adelante veremos que cualquier función exponencial de base a puede ser expresada en términos de $\exp(x)$.



(a) $0 < a < 1$ (b) $a = 1$ (c) $a > 1$

Figura 3.40: Gráfico de a^x.

Teorema 3.4.20 Continuidad de la función exponencial

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto y = a^x$$

1. Es continua en $x = 0$.

2. Es continua en cada $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

1. Para demostrar que a^x es continua en $x = 0$ calcularemos el límite por la derecha y por la izquierda y veremos que estos valores coinciden con $a^0 = 1$.

   Supondremos que $a > 1$. Sea x positivo y cercano a 0, en particular , $x < 1$. Así $\dfrac{1}{x} > 1$ y existe $n = \left[\dfrac{1}{x}\right]$. Como $n \leq \dfrac{1}{x}$ tenemos que $0 < x \leq \dfrac{1}{n}$, siendo $a > 1$, f es una función estrictamente creciente y por tanto, $1 < a^x < a^{\frac{1}{n}}$. Si hacemos tender x a 0^+ entonces $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ y $n \to +\infty$. En virtud del teorema 2.4.32 y ejercicio 3 de la sección 2.1, tenemos que:

   $$\lim_{x \to 0^+} a^x = 1.$$

   Si x es negativo. Supongamos $-1 < x < 0$. Entonces, $x = -\mid x \mid$ y tomando $n = \left[\dfrac{1}{\mid x \mid}\right]$, tenemos que $-\dfrac{1}{n} \leq x < 0$, por tanto, $a^{-\frac{1}{n}} \leq a^x < 1$. Pero, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$. Esto nos dice que:

   $$\lim_{x \to 0^-} a^x = 1.$$

2. Si $x \in \mathbb{R}$, tenemos que : $f(x+h) = a^{x+h}$; $f(x) = a^x$; $f(x+h) - f(x) = a^x(a^h - 1)$. Cuando $h \to 0, a^h \to 1$, usando lo demostrado en el ítem anterior. Por tanto, $f(x+h) - f(x) \to 0$ cuando $h \to 0$.

   Para el caso en que $a < 1$, como $\dfrac{1}{a} > 1$, por lo recién demostrado tenemos que $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ es continua para todo x. En virtud del teorema 2.4.27 podemos concluir la continuidad de a^x. □

El siguiente teorema es la generalización a variable continua del resultado visto en sucesiones:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 3.4.21 ▪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

- $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Demostración:

- Si $x \to +\infty$.
  Sea $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Esta función tiene por dominio al conjunto

$$\left\{x:\ 1+\frac{1}{x}>0\right\} =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[.$$

  Sabemos que si en particular $x = n$ entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

  Para extender este límite para una variable continua, lo haremos por acotación.
  Si x no es un entero y, como nos interesan los valores grandes de x, existe $m \in \mathbb{N}$, tal que,

$$m < x < m+1$$
$$\frac{1}{m} > \frac{1}{x} > \frac{1}{m+1}$$

  y por tanto:

$$1+\frac{1}{m} > 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{m+1}$$

  Como la función exponencial es estrictamente creciente cuando la base es mayor que 1, tenemos que,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^x > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^x$$

  Pero como la función exponencial es creciente en el exponente, significa que para $b > 1$ y $m < x < m+1$ tenemos que $b^m < b^x < b^{m+1}$ Luego,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1+\frac{1}{m}\right)^x > f(x) > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^x > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m$$

  Lo que equivale a tener que,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} > f(x) > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m.$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\left(1+\frac{1}{m}\right) > f(x) > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m+1}\right)}.$$

Si $x \to \infty$ entonces $m \to \infty$ y

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to e \quad ; \quad \left(1+\frac{1}{m}\right) \to 1$$

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \to e \quad ; \quad \left(1+\frac{1}{m+1}\right) \to 1$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

- Si $x \to -\infty$.
  Entonces $x = -|x|$ y podemos escribir:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-\frac{1}{|x|})^{-|x|} = (\frac{|x|}{|x|-1})^{|x|} \\ &= (1+\frac{1}{|x|-1})^{|x|-1}\cdot(1+\frac{1}{|x|-1}) \\ &= f(|x|-1)(1+\frac{1}{|x|-1}) \end{aligned}$$

Si $x \to -\infty$, $|x| \to +\infty$, $1+\dfrac{1}{|x|-1} \to 1$, y $f(|x|-1) \to e$, por lo demostrado en el item anterior.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e$. □

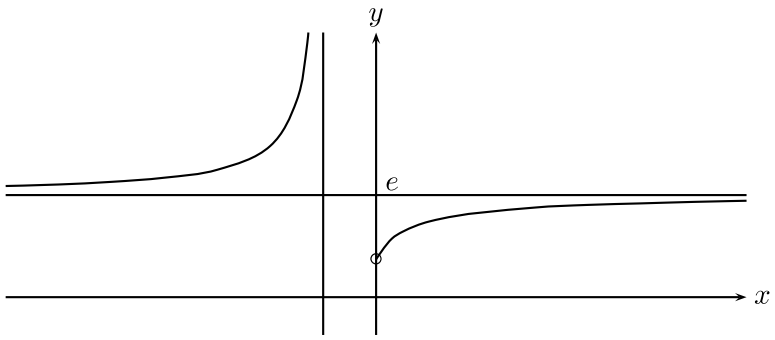


Figura 3.41: Gráfico de $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Ejercicios resueltos

1. Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones:

   a. – $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ b. – $f(x) = (\operatorname{sen} x)^x$ c. – $f(x) = (x^2-1)^{\sqrt{x}}$

   d. – $f(x) = e^{\operatorname{arc\,sen} x}$ e. – $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ f. – $f(x) = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^x$

Solución:

1. *a)* $\mathrm{D}\left(x^{\operatorname{sen} x}\right) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$.

   b) $\mathrm{D}\left((\operatorname{sen} x)^x\right) = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

   c) $\mathrm{D}\left((x^2-1)^{\sqrt{x}}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2-1>0 \text{ y } x>0\right\} =]1, +\infty[$.

   d) $\mathrm{D}\left(e^{\operatorname{arc\,sen} x}\right) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 1\ \} = [-1, 1]$.

   e) $\mathrm{D}\left(\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x-1} > 0\ \right\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

   f) $\mathrm{D}\left(\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^x\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > 0\ \right\} = \left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^+}]2k\pi, (2k+1)\pi[\right] \cup \left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^-}](2k-1)\pi, 2k\pi[\right]$.

2. Calcular los siguientes límites:

$$a)\quad \lim_{x\to 1} e^{(x^2-1)} \qquad b)\quad \lim_{x\to -2} \frac{x^3}{e^{5x}} \qquad c)\quad \lim_{x\to +\infty} e^{-x}\cos x$$

$$d)\quad \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x^2-1}{x^2}} \qquad e)\quad \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} \qquad f)\quad \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

Solución: La mayoría de estos límites resultan de un cálculo directo debido a la continuidad de ellas.

- $\lim_{x\to 1} e^{(x^2-1)} = e^0 = 1.$
- $\lim_{x\to -2} \frac{x^3}{e^{5x}} = \frac{(-2)^3}{e^{-10}} = -8e^{10}.$
- Este límite debemos calcularlo mediante acotamiendo, debido a que las funciones periódicas no tienen límite en el $+\infty$.

  $$-1 \le \cos x \le 1 \iff -e^{-x} \le e^{-x}\cos x \le e^{-x} \iff \lim_{x\to+\infty} -e^{-x} \le \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos x \le \lim_{x\to+\infty} e^{-x}$$

  De donde podemos deducir que

  $$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\cos x = 0.$$

- $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x^2-1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2}} = e^1 = e.$
- $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2}} = e^0 = 1.$
- $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1}} = e^{+\infty} = +\infty.$

3. Dada la función

$$f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}.$$

   a) Analice la continuidad de f en su dominio.

   b) Grafique 2^x y 2^{-x} en un mismo diagrama y deduzca el signo de f.

   c) Demuestre que f es creciente.

d) Demuestre que f^{-1} existe y es continua.

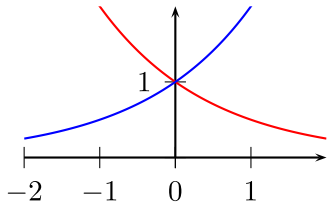
e) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

f) Si $h(x) = \frac{1}{2}2^x, g(x) = -\frac{1}{2}2^{-x}$ demuestre que $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - h(x)) = 0$ y $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0$. ¿Qué puede deducir de este resultado ?

Solución:

a) El dominio de f es $\mathbb{R}$ y por ser suma de funciones continuas, f es continua en cada punto del dominio.

b) Grafique 2^x y 2^{-x} en un mismo diagrama y deduzca el signo de f.



(a) En azul 2^x. En rojo 2^{-x}

Figura 3.42: Gráfico de 2^x y 2^{-x}.

Del gráfico, se deduce que en $\mathbb{R}^-$, la diferencia es negativa, sobre $\mathbb{R}^+$, la diferencia es positiva. POr tanto, la función tiene un único cero en $x = 0$ y es positiva sobre $\mathbb{R}^+$, y negativa sobre $\mathbb{R}^-$.

c) Es una propiedad de la función exponencial con base mayor que 1, el ser creciente. 2^x es creciente y por tanto, 2^{-x} es decreciente y -2^{-x} es creciente. Así, f es suma de dos funciones crecientes, por tanto es creciente.

d) Por ser f estrictamente creciente es inyectiva y f^{-1} existe sobre el recorrido de f. Además, por propiedad de las funciones continuas f^{-1} es continua.

e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

f)
- $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - h(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2^x - 2^{-x}}{2} - \frac{2^x}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2^{-x}}{2}\right] = 0.$
- $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2^x - 2^{-x}}{2} + \frac{2^{-x}}{2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2^x}{2}\right] = 0.$

Que ambos límites sean nulos, significa que :

$$f(x) \approx h(x)$$

cuando x toma valores muy grandes.

$$f(x) \approx g(x)$$

cuando x toma valores muy pequeños.

En palabras más simples, significa que en el $+\infty$ el término que determina el comportamiento de f es 2^x. Análogamente en el caso del $-\infty$.

3.4.6. Ejercicios propuestos

1. Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones:

   a. – $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$ b. – $f(x) = e^{\tan x}$ c. – $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

   d. – $f(x) = (\tan x)^x$ e. – $f(x) = (3e^x - \operatorname{sen} x)^x$ f. – $f(x) = (\pi - \arctan x)^x$

   g. – $f(x) = \sqrt{x^2-4}\, e^{1/x}$ h. – $f(x) = \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^x$ i. – $f(x) = (\operatorname{arc\,sen} x)^x$

2. Usando el teorema 3.4.21, demuestre que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a$, si $a \in \mathbb{R}$.

3. Calcular los siguientes límites:

3.4.7. Función Logaritmo

El teorema 3.4.18 nos dice que la funcion exponencial en base a con $a > 0$ y $a \neq 1$ es inyectiva y el teorema 3.4.19 junto al teorema del valor intermedio 2.5.15, nos asegura que es sobreyectiva . Por tanto, ella es invertible, a esta inversa se le llama ***función logaritmo en base*** a.

Definición 3.4.22 Se llama logaritmo en base a a la función:

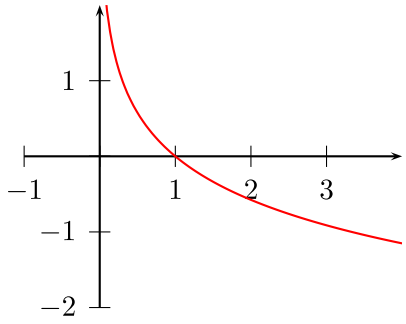
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \log_a x\,, \end{aligned}$$

De modo que,

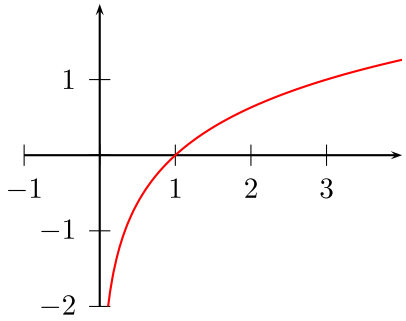
$$\boxed{y = \log_a x \Longleftrightarrow a^y = x.}$$

Así, tenemos las siguientes identidades

$$\log_a(a^x) = x\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$
$$a^{\log_a x} = x\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$



(a) $0 < a < 1$



(b) $a > 1$

Figura 3.43: Gráfico de $\log_a(x)$.

subsubsectionPropiedades aritméticas del logaritmo

Teorema 3.4.23 Sean u , v números reales positivos.

1. $\log_a u \cdot v = \log_a u + \log_a v$
2. $\log_a u^n = n \log_a u; \quad n \in \mathbb{N}$
3. $\log_a \dfrac{1}{v} = -\log_a v$
4. $\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

5. $\log_a u^x = x \log_a u; x \in \mathbb{R}$
6. Fórmula de cambio base de los logaritmos $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

Definición 3.4.24 Se llama *logaritmo natural o neperiano* [1] a la función inversa de $\exp(x)$ y se denota por $\ln x$.

En particular, se cumplen las identidades:

$$\ln(e^x) = x\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$
$$e^{\ln x} = x\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^+.$$

Valores de referencia

$$a^0 = 1 \Longleftrightarrow \log_a 1 = 0.$$
$$a^1 = a \Longleftrightarrow \log_a a = 1.$$

3.4.8. Relación entre las diferentes funciones exponenciales

La función e^x tiene la importante propiedad de ser igual a su derivada. Lo que, desde el punto de vista del cálculo diferencial, la hace muy fácil de manejar. además, cualquier otra función exponencial puede definirse en términos de esta.

$$\boxed{a^x = e^{(\ln a)\, x}.}$$

Análogamente, todo logaritmo en base a puede expresarse en términos del logaritmo natural.

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.}$$

Teniendo esto en mente, podemos limitarnos a trabajar con las funciones exponencial y logaritmo en base e.

3.5. Ejercicios resueltos

1. *a)* Demuestre que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.
   b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e a = \ln a$.
   c) Demuestre que $\lim\limits_{x\to o} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
   d) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

[1] John Napier (1550-1617)

Solución:

a) Sea $x = \log_a b$ y $y = \log_b a$. Entonces, por definición de función inversa tenemos que:

$$a^x = b \quad , \quad b^y = a.$$

Por tanto, $(b^y)^x = b$, como la función exponencial es inyectiva tenemos que $xy = 1$, que es lo que queríamos demostrar.

b) Por continuidad, $a^x \to 1$ cuando $x \to 0$. Entonces, $f(x) = a^x - 1 \to 0$ cuando $x \to 0$, y $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a^x - 1} \to \infty$ cuando $x \to 0$.
Como $a^x = 1 + f(x)$, $x = \log_a(1 + f(x))$. Así,

$$\begin{aligned} \frac{a^x - 1}{x} &= \frac{f(x)}{\log_a(1 + f(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)}} \\ &= \frac{1}{\log_a(1 + f(x))^{(\frac{1}{f(x)})}} \\ &= \frac{1}{\log_a(1 + \frac{1}{g(x)})^{g(x)}} \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log_a(1 + \frac{1}{g(x)})^{g(x)}}.$$

En virtud de la propiedad de la función g y del límite relevante 3.4.21, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}(1 + \frac{1}{g(x)})^{g(x)} = \lim_{g\to\infty} \left(1 + \frac{1}{g}\right)^g = e.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a.$$

c) Si en particular $a = e$, entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_e e} = 1.$$

3.6. Las funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas que son ciertas combinaciones de la función exponencial e^x, aparecen en muchas aplicaciones.

Definición 3.6.1 Se definen las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico, tangente hiperbólica y cotangente hiperbólica por las respectivas fórmulas:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cotanh} x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Todas ellas están definidas para todo x en $\mathbb{R}$, excepto la $\operatorname{cotanh} x$ y la $\operatorname{cosech} x$ que no están definidas para $x = 0$.

La relación fundamental de estas funciones y que, en parte, justifica su nombre es:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \tag{3.9}$$

La cual puede verificarse mediante un cálculo directo. Si escribimos: $x = \cosh t$, $y = \operatorname{senh} t$, la relación (3.9) puede escribirse como

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{3.10}$$

lo que nos dice que, cualquiera sea el valor de $t \in (-\infty, \infty)$, el punto $(x, y) = (\cosh t, \operatorname{senh} t)$ se mueve a lo largo de una rama de la hipérbola (3.10), la que se encuentra en el primer y cuarto cuadrante.
Las funciones hiperbólicas satisfacen algunas propiedades similares a las de las trigonométricas como veremos en los siguientes teoremas.

Teorema 3.6.2 Teorema de adición
Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \\
\operatorname{senh}(a+b) &= \operatorname{senh} a \cosh b + \cosh a \operatorname{senh} b. \\
\cosh(a-b) &= \cosh a \cosh b - \operatorname{senh} a \operatorname{senh} b \\
\operatorname{senh}(a-b) &= \operatorname{senh} a \cosh b - \cosh a \operatorname{senh} b.
\end{aligned}$$

Demostración:

$$\cosh(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a e^b + e^{-a} e^{-b}}{2}. \tag{3.11}$$

Por otro lado:

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x \quad \cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}.$$

Reemplazando estas igualdades con $x = a,\ b, -a, -b$ en (3.11) se obtiene el Teorema. □

Paridad de las funciones hiperbólicas

- Coseno y secante hiperbólicas son funciones pares, así:

$$\cosh(-x) = \cos(x), \quad \operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x); \quad \text{paratodo } \in \mathbb{R}.$$

- Seno, tangente, cosecante y cotangente hiperbólicas son funci impares, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sinh}(-x) = -\operatorname{sinh}(x) && \tanh(-x) = -\tanh(x) \\
&\operatorname{cosech}(-x) = -\operatorname{cosech}(x) && \operatorname{cotanh}(-x) = -\operatorname{cotanh}(x)
\end{aligned}$$

Identidades de las funciones hiperbólicas

$$\begin{aligned}
&\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 && \operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \\
&\tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1 && \cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \\
&\operatorname{cotanh}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1 && \operatorname{cosech}^2 x - \operatorname{sech}^2 x = \operatorname{cosech}^2 x \operatorname{sech}^2 x
\end{aligned}$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \qquad \tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$$

$$\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y) = 2 \operatorname{senh} x \cosh y \qquad \operatorname{senh}(x+y) - \operatorname{senh}(x-y) = 2 \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x+y) + \cosh(x-y) = 2 \cosh x \cosh y \qquad \cosh(x+y) - \cosh(x-y) = 2 \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$\operatorname{senh}(x+y)\operatorname{senh}(x-y) = \operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh}^2 y = \cosh^2 x - \cosh^2 y$$

$$\cosh(x+y)\cosh(x-y) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 y = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

$$\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\cosh x - \cosh y = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x-y)$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2\operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

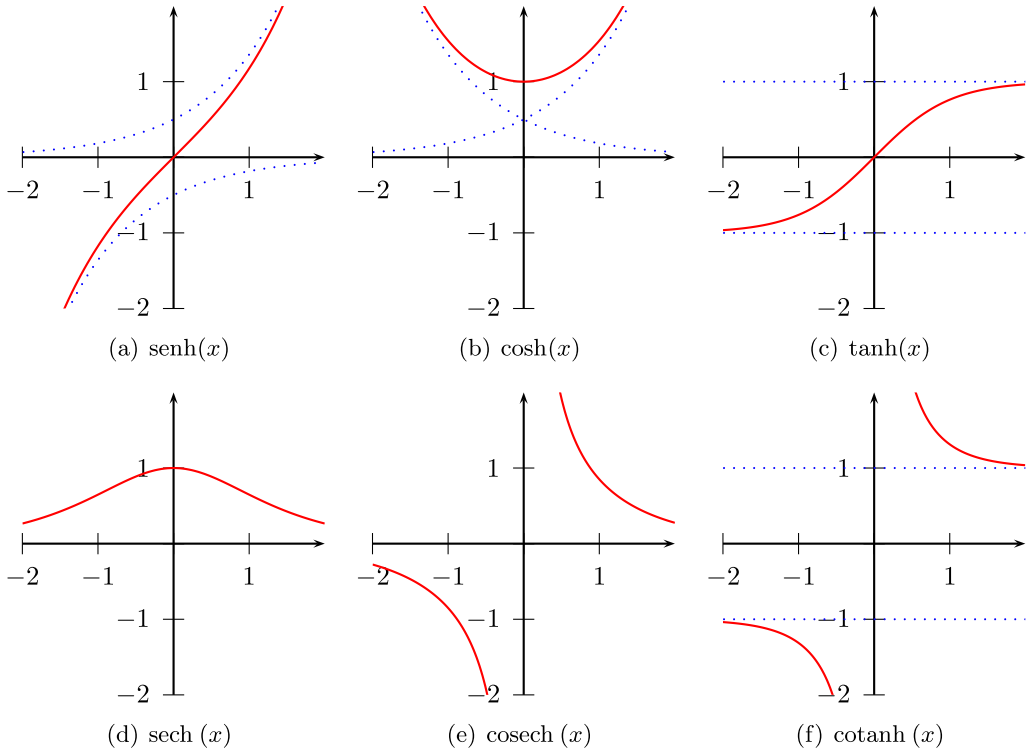
$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$$

$$\operatorname{senh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x - 1)} \qquad \cosh\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\cosh x + 1)}$$

$$\tanh\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x} \qquad \tanh\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x + 1}$$

Gráficos de las funciones hiperbólicas

A continuación se muestran los gráficos de las funciones hiperbólicas.



(a) senh(x) (b) cosh(x) (c) tanh(x)

(d) sech (x) (e) cosech (x) (f) cotanh (x)

Figura 3.44: Funciones hiperbólicas

3.7. Las funciones hiperbólicas inversas

Teorema 3.7.1 Las funciones hiperbólicas inversas.
Las funciones hiperbólicas senh x, cosh x, tanh x, cotanh x, sech x, cosech x tienen inversas que denotaremos respectivamente por:
arcsenh x, arccosh x, arctanh x, arccotanh x, arcsech x, arccosech x.

Demostración:

1. Del estudio del gráfico hemos visto que senh x es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, por tanto inyectiva con recorrido igual a $\mathbb{R}$. Así, existe su función inversa de

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Calculemos su expresión analítica:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{senh} x \Longleftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Longleftrightarrow 2y = e^2 - e^{-x} \\ 2ye^x &= e^{2x} - 1 \Longleftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Longleftrightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} \\ e^x &= y \pm \sqrt{y^2+1} \\ x &= \ln(y + \sqrt{y^2+1}), \text{ Pues } y - \sqrt{y^2-1} < 0. \text{ Así,} \end{aligned}$$

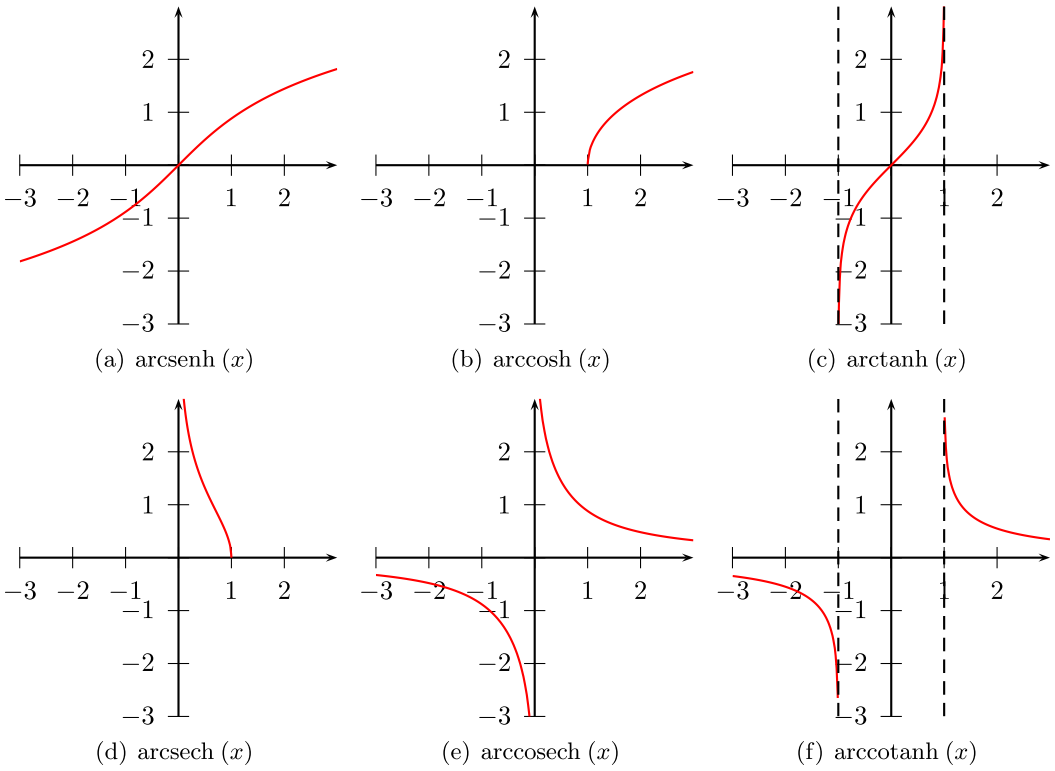
$$\boxed{\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).}$$

En cambio la función $\cosh x$ no es inyectiva sobre $\mathbb{R}$. Puede invertirse sobre $[0, +\infty[$ o $]-\infty, 0]$. Para obtener la fórmula de esta inversa se sigue un procedimiento similar al hecho para arcsenh y se obtiene una de las dos posibilidades:

- $y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, con dominio $[1, +\infty[$ y recorrido $(0, +\infty)$.
- Si se invierte sobre $]-\infty, 0]$, entonces $y = \operatorname{arccosh} x = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$, con dominio $[1, +\infty[$ y recorrido $]-\infty, 0]$.

2. $\operatorname{arctanh} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ para $x \in (-1, 1)$

3. $\operatorname{arccotanh} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}$ para $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. □



(a) arcsenh (x) (b) arccosh (x) (c) arctanh (x)

(d) arcsech (x) (e) arccosech (x) (f) arccotanh (x)

Figura 3.45: Funciones hiperbólicas inversas

Formas indeterminadas exponenciales el cálculo de límites que involucran a las funciones exponencial y logaritmo pueden conducir a formas indeterminadas exponenciales de uno de los siguientes tipos: 0^0, 1^∞ y ∞^0
Estas pueden ser tratadas usando que e^x es la inversa de $\ln x$. Entonces,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \underbrace{\lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)\right]}}_{\text{Usando la continuidad de la función exponencial}}$$

Así, debemos calcular $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot \ln f(x)]$ quedando, en general, una forma inderminada algebraica.

Los ejemplos y ejercicios de este tipo de límites se verán en la seccion 4.4.

Bibliografía del Tercer Capítulo

[AA85] M.A. Laurentiev y otros A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov. *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Alianza Universidad, 1985.

[Apo65] T. Apostol. *Calculus.* Reverté, 1965.

[BS89] R. Bartle and D. Sherbert. *Introducción al análisis matemático de una variable.* Editorial Limusa, 1989.

[dp60] Réunion de professeurs. *Exercises de trigonométrie.* Ligel, París, 1960.

[Gra91] F. Granero. *Cálculo.* McGraw - Hill. Madrid, 1991.

[GU02] J. Guajardo and J. Urrea. *Cuarenta problemas resueltos de cálculo integral.* Trabajo de Titulación, Fac de Ciencias, 2002.

[Kit86] J. Kitchen. *Cálculo.* McGraw - Hill, 1986.

[KKVM] I. D. Kudriávtsev, A.D. Kutásov, V.I.Chejlov, and M.I.Shsbunin. *Problemas de Análisis Matemático.* Ed. Mir Moscú.

[Kur61] K. Kuratowski. *Introduction to calculus.* Pergamon Press, 1961.

[Lar53] H. Larsen. *Tables, Formulas and curves.* 1953.

[Lim89] E. Lima. *Análise real.* IMPA, 1989.

[Max59] E. A. Maxwell. *An analytical calculus.* Cambridge University Press, 1959.

[Rot59] R. Rothe. *Matématica superior. Tomos I y II.* Editorial Labor, 1959.

[San] Colección H.E.C. Santiago, editor. *Elementos de trigonometría.*

[Spi70] M. Spivak. *Calculus.* Reverté, 1970.

Índice alfabético

Abscisa, 116
Aceleración
  media, 484
Altura de una montaña, 247
Amplitud, 233
  de la sinusoide, 230
Ángulo
  de fase, 230, 233
  de incidencia, 463
  de reflexión, 463
  formado por dos rectas, 378
  medición de, 201
Apolonio, 390
Aritmética
  de derivadas, 298
  de funciones, 110
  de límites finitos, 154
  de límites infinitos, 140
  de sucesiones, 74, 76
Asíntota, 169
  de la tangente, 252
  horizontal, 148, 149, 170, 358
  oblicua, 171
  vertical, 144, 170, 358
Axioma del Supremo, 3, 45, 47, 50, 51
Axiomas de cuerpo, 3, 4, 45

Barrow, 424
Bifolio, 451

Cálculo
  análisis de curvas, 404
  de áreas y volúmenes de sólidos de revolución, 668
de continuidad de funciones, 183
de derivadas, 305, 332
de ecuaciones
  con valor absoluto, 38
de funciones
  exponenciales, 278
  logarítmicas, 278
  trigonométricas, 216, 228
de inecuaciones, 25
  con valor absoluto, 38
de integrales, 630
  elípticas, 683
  impropias, 710
de límites
  por acotamiento, 79
de límites
  de funciones de variable contínua, 159
  de funciones trigonométricas, 260
  de sucesiones, 87
  por acotamiento, 157
  regla de L'Hopital, 350
de longitudes de curvas, 653
de máximos y mínimos, 458
de polinomios y series de Taylor, 803
de razón de cambio, 476
de series
  de funciones, 780
  numéricas, 752
de supremos e ínfimos, 52

gráfico de funciones, 118, 354
Caracol de Pascal, 452
Cardioide, 430, 451
Cicloide, 443
Circunferencia, 200
unitaria, 201, 202
Cisoide, 402
Cóncava, 322
Concavidad, 357, 363
Concoide de Nicomedes, 452
Cónica, 390, 431
Conjunto
$\mathbb{R}$, 3, 11, 45
$\overline{\mathbb{R}}$, 67
último elemento, 48, 49, 56, 58
de números reales, 3
irracionales, 265
primer elemento, 48, 49, 57, 58
Continuidad
de funciones elementales, 178
de la función compuesta, 178
de la inversa, 183
de la suma de funciones, 178
de las funciones circulares, 258
discontinuidad no removible, 184
discontinuidades removibles, 179
funciones continuas, 175
interpretación geométrica, 177
y sucesiones, 178
Convergencia de la media aritmética, 101
Convexa, 322
Coordenadas
paramétricas, 432
polares, 434
curva expresadas en, 444
rectangulares, 116
Cota
inferior, 46–48, 52–54, 56, 57, 59
superior, 45–49, 51–54, 56–59
Criterio
de la primera derivada, 321
de la segunda derivada, 323
Cuociente, 178
Curva
dada por ecuaciones paramétricas, 432
de grado mayor que dos, 401
en coordenadas polares, 444
en el plano, 434
intersección de dos curvas, 376

Derivada, 292
a la derecha, 297
a la izquierda, 297
de funciones trigonométricas, 303
derivación implicita, 424
segunda derivada de f, 304
Desigualdad
de Bernoulli, 82
triangular, 35, 38, 42
Diagrama de Cauchy, 214
Diferencia, 178
Diferencial, 478
Directriz, 391
directrices y excentricidad, 391
Distancia
a un punto inaccesible, 244
de un punto a una recta, 405
entre dos puntos, 374
entre dos puntos inaccesibles, 245

Ecuación
de la parábola, 387
de segundo grado, 397
clasificación de, 400
curvas representadas por, 380
de una circunferencia, 380
de una elipse, 381
de una hipérbola, 384
trigonométrica, 225
Ecuación

de segundo grado, 16
Eje
conjugado, 385
imaginario, 385
transversal, 385
traslación de los ejes de coordenadas, 392
Elipse, 381
centro de la, 383
ecuación, 381
Espiral
de Arquimedes, 453
hiperbólica, 453
Estrofoide recta, 424

Foco, 391
Forma indeterminada, 67
del tipo $0 \cdot \infty$, 344
del tipo $\frac{0}{0}$, 341
del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, 343
del tipo $\infty - \infty$., 344
Fórmula
de Cardano-Tartaglia, 18
de factorización, 6
de la distancia en el plano, 200
de Wallis, 267
del binomio, 7
Fracciones Parciales, 513
Fracciones parciales, 95
Frecuencia
de la sinusoide, 230
natural, 487
Fricción, 488
Función, 111, 113, 176
acotada, 111
arcocosecante, 260, 331
arcocoseno, 259, 329
arcocotangente, 259, 330
arcosecante, 260, 331
arcoseno, 259, 328
arcotangente, 259, 329
Beta, 709
cero de una función, 112
circulares o trigonométricas, 200, 202
comparación usando límites, 158
cóncava, 322
concavidad, 357, 363
constante, 109
continua, 175, 177
continua a tramos, 177
convexa, 322
cosecante, 209, 211
coseno, 203
cotangente, 209, 210
creciente en sentido amplio o creciente, 111
cuadrática, 109
de Bessel, 787
decreciente en sentido amplio o decreciente, 111
derivable, 297
derivada, 297
diferenciable, 297
estrictamente creciente, 111, 182, 321
estrictamente decreciente, 111, 321
exponencial, 268
extremo, 112
Gama, 708
hiperbólicas, 280
identidades, 281
paridad, 281
hiperbólicas inversas, 283
igualdad de funciones, 110
impar, 113, 131
ínfimo, 198
inversa, 133
inyectiva, 114, 132
lineal no constante, 109
logaritmo, 276

máximo, 112, 316, 333, 334
mínimo, 112, 316, 333, 334
monótona, 111
par, 113
parte entera, 112, 184, 261
periódica, 113, 224
polinomial, 109
punto de inflexión, 333, 334, 358
racional, 109
representación gráfica de funciones, 116
secante, 209, 211
signo, 196
sinusoidal, 229
sobreyectiva, 114
supremo, 198
tangente, 209
asíntotas, 252
límites, 252
trascendente, 199
trigonométrica, 200, 202
derivadas, 303
identidades básicas, 212

Galileo, 391
Geometría analítica, 374

Hipérbola
asíntotas de la, 386
ecuación, 384
equilátera, 386
focos, 385
hipérbolas conjugadas, 386
vértices, 385
Hipocicloide de cuatro vértices o astroide, 439
Hoja de Descartes, 429

Identidades
de funciones trigonométricas, 212
funciones hiperbólicas, 281
Igualdad de funciones, 110

Inecuación
de segundo grado, 21
de tercer grado, 22
Ínfimo, 47–49, 52–55, 57
Integración
de $f(x) = x^p(ax^n + b)^q$ $p, q, n \in \mathbb{Q}$., 546
de funciones irracionales simples, 544
de funciones racionales, 512, 516
de funciones racionales de x y $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, 549
de funciones trigonométricas, 524
de funciones trigonométricas inversas, 534
del tipo $\int P(\ln x)dx$; donde $P(x)$ es un polinomio, 540
del tipo $\int P(x)(\ln x)^m dx$., 542
del tipo $\int P(x)a^x dx$, donde $P(x)$ es un polinomio, 539
del tipo $\int f(a^x)\,dx$., 538
del tipo $\int x^n(\ln x)^m dx$; $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$., 541
fórmulas básicas de, 495
fracciones parciales, 516
métodos de
fórmulas de reducción, 505
fracciones parciales, 512
numéricos, 678
por partes, 497
por substitución, 497
substituciones hiperbólicas, 536
substituciones trigonométricas, 531
Integral
de Riemann, 555, 564, 574, 600, 691, 722
cálculo de integrales, 570
propiedades, 594
definida, 561, 564
inferior, 563

superior, 564
elíptica, 675
de primera clase, 676
de segunda clase, 676
de tercera clase, 676
impropia, 691
convergente, 692
de primera clase, 691
de segunda clase, 699
divergente, 692
indefinida, 493, 494
ejercicios, 504
propiedades, 497
partición, 561
Intersección de dos curvas, 376
Intervalo
no acotado, 49
acotado, 49

Kepler, 390

Leibniz, 327
Lemniscata de Bernoulli, 402, 403, 447, 451
Lemniscata de Gerono, 436
Ley de Tricotomía, 11
Límite
a la derecha, 150
a la izquierda, 150
de una función, 150
interpretación geométrica, 154
polinomial, 146, 147, 156
racional, 147, 156
tangente, 252
trigonométrica, 248
de una sucesión, 69, 73
interpretación geométrica, 73
límites finitos en un punto x_0, 149
límites infinitos, 138, 141, 145
límites infinitos en una vecindad de x_0, 142
límites laterales, 150
Logaritmo natural o neperiano , 278
Lugar geométrico, 380

Máximo, 316, 333, 334
Problemas, 458
Media
geométrica, 93
Mínimo, 316, 333, 334
Problemas, 458
Movimiento oscilatorio
amortiguado, 488
amortiguado y forzado, 488
conservativo, 488

Número
e, 85, 267
algebraico, 199
irracional, 265
real, 3, 11, 45
densidad, 15
trascendente, 199
Números
reales, 3

Ordenada, 116
Ovalos de Cassini, 452

Parábola
directriz, 388
ecuación, 387
Paridad
de las funciones hiperbólicas, 281
Partición de un intervalo, 594
Pendiente, 378
Período, 233
de funciones seno y coseno, 204
Potencia
de exponente cero, 263
de exponente entero negativo, 263
de exponente entero positivo, 262

de exponente irracional, 266
de exponente racional, 263
de exponente real, 268
Principio
de Arquímedes, 49
de inducción, 64
del buen orden, 64
Problemas
de análisis de curvas, 404
de áreas y volúmenes de sólidos de revolución, 668
de continuidad de funciones, 183
de derivadas, 305, 332
de diferenciales, 476
de ecuaciones
con valor absoluto, 38
de funciones
exponenciales, 278
logarítmicas, 278
trigonométricas, 216, 228
de gráficos de funciones, 354
gráficos de funciones, 118
de inecuaciones, 25
con valor absoluto, 38
de integrales, 630
elípticas, 683
impropias, 710
de límites
de funciones de variable contínua, 159
de funciones trigonométricas, 260
de sucesiones, 87
usando regla de L'Hopital, 350
de longitudes de curvas, 653
de máximo y mínimo, 458
de polinomios y series de Taylor, 803
de series
de funciones, 780
numéricas, 752
de supremos e ínfimos, 52
Producto, 178
Progresión
aritmética, 64
geométrica, 65
Propiedad
arquimediana de los números reales, 45, 50, 52
de Tricotomía, 11
Punto
crítico, 322
de inflexión, 326, 333, 334, 358

Raíz
existencia de raíces, 264
q-ésima, 263
Radián, 202
Rapidez del movimiento, 483
Razón de cambio, 476
instantánea, 476
promedio, 476
Recta
normal, 295, 296, 305
pendiente o inclinación, 378
que pasa por el origen, 377
secante, 294
tangente, 305
Referencia
ceros y signo de las funciones seno y coseno, 208
límites de funciones trigonométricas, 248
valores de referencia de seno y coseno, 209
Regla
de Barrow, 612, 694, 702
de L'Hôpital, 341, 350
de la cadena, 302, 311
de Simpson, 680
del trapecio, 678
Resolución de ecuaciones algebraicas
de grado mayor o igual a 3, 17
de primer grado, 6

Roce, 488
Rosa
de n pétalos, 453
de cuatro pétalos, 430, 453

Sólido de revolución, 660
Serie
absolutamente convergente , 742
armónica, 741
armónica alternada, 741
binomial, 798, 810
condicionalmente convergente , 742
convergente, 732
criterios de convergencia
Abel, 743
comparación, 736
comparación al límite, 737
condicional, 742
de la raíz, 739
Dirichlet, 743
integral, 734
Leibniz, 740
razón o cuociente, 737
de coseno, 797
de funciones, 767
puntualmente convergente, 769
uniformemente convergente, 769
de Maclaurin, 795
de potencias, 773
armónica, 776
armónica alternada, 776
convergencia, 773
diferenciación, 772
integración, 771
intervalo de convergencia, 775
producto, 780
radio de convergencia, 775
suma, 780
de seno, 798
de términos alternados, 740
de Taylor, formal, 793
divergente, 732
criterio de divergencia, 733
exponencial, 795
Gauss, 752
geométrica, 83, 733, 798
geométrica de razón r, 84
hiperarmónica, 736
Kummer, 751
multiplicación de series de términos positivos, 745
numéricas, 732
Polinomial, 765
producto, 747
Raabe, 752
suma, 732
suma parcial, 732
término general de, 732
Sucesión, 65
acotada, 66
convergente, 74
convergente no monótona, 73
creciente, 65
de Fibonacci, 96
de números reales, 63
divergente, 67, 74
estrictamente creciente, 65
estrictamente decreciente, 65
monótona, 66
monótona acotada, 69
monótona no acotada, 67
Suma
de Riemann, 561, 562, 648, 678, 766
inferior, 558
superior, 558
Supremo, 46–49, 53–57

Teorema
de Bolzano - Weierstrass, 179, 192
de densidad de los números reales, 15

de la función inversa, 326
de recurrencia, 64
de Riemann, 744
de Rolle, 317, 318
de Taylor, 792
de uninicidad del límite de una función, 153
de Weierstrass, 181, 192
del coseno, 237, 239
del seno, 237, 239
del valor intermedio, 185
del valor intermedio o de Darboux, 180
del Valor Medio
para integrales, 599, 600
del valor medio de Cauchy, 341
del valor medio de Cauchy, 319
del valor medio de Lagrange, 318
interpretación física, 318
del valor medio para dos funciones, 319
Fundamental de Cálculo, 611
unicidad del límite, 74
Torre de pie
accesible, 246
inaccesible, 246
Traslación de los ejes de coordenadas, 392
Tricotomía, 11

Valor absoluto, 34–36, 38–40, 42
Vecindad de un punto, 141
Velocidad, 483
inicial, 484
instantánea, 483
media, 483