

Octava Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Diciembre, 2013

1. Pruebe que la función $f(x) = x^{1/3}$ es continua en $x = 0$ y no diferenciable en $x = 0$.
2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x|x|$. Determine si f es diferenciable.
3. Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $x = 2$ de las siguientes funciones

a) $f(x) = 3x(x^2 - \frac{2}{x})$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \tan(\pi x)$

4. Encuentre la derivada de las siguientes funciones

a) $f(x) = \cos(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x - \sin(x)}$

c) $f(x) = \frac{1/x - 2/x^2}{2/x^3 - 3/x^4}$

d) $f(x) = \frac{2x^5 + 4x}{\cos(x)}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \tan(x) + \frac{1}{\tan(x)}$

f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

5. Sabiendo que f es diferenciable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^2 f(x) - 2f(-2x)$

b) $g(x) = \frac{f(x+1)}{x^2}$

c) $g(x) = \frac{x^2}{f^2(x)}$

d) $g(x) = \frac{1+x f(x)}{f^3(\sqrt{x})}$

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tales que $f(0) = g(0)$ y $f'(x) \geq g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x > 0$.
7. Se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba a una velocidad constante de 600m/h . A 50 metros del punto de lanzamiento se encuentra un observador que sigue la trayectoria del proyectil. Determine la razón de cambio instantánea del ángulo de elevación del observador, el proyectil ha recorrido 100 metros.
8. Un nadador se lanza desde un trampolín de altura 32 pies sobre el nivel de la piscina. La posición del nadador después de t segundos desde que salto es $h(t) = -16t^2 + 16t + 32$ pies. Determine la velocidad del nadador en el momento que impacta el agua.
9. Pruebe que toda función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que posee derivada nula en todos los puntos $x \in (a, b)$ es constante.
10. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas, derivables en (a, b) y tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + c$ para todo $x \in [a, b]$.
11. Demuestre que para todo x e y en \mathbb{R} se cumple $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$.
12. Demuestre que la función dada por $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ interseca sólo una vez al eje x .
13. Encontrar los valores extremos (máx. y mín. locales y globales) de las funciones dadas por
 - a) $f(x) = 3\cos(x/2)$, $0 \leq x \leq 2\pi$.
 - b) $f(x) = 5\sen(x/2)$, $0 \leq x \leq 4\pi$.
 - c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
14. Dada $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$. Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$. Encuentre si los hay puntos críticos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos. Intersecciones de $f(x)$ con los ejes coordenados. Grafique.
15. Solucione el problema anterior para
 - a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$
 - b) $f(x) = \frac{2(x^2+9)}{\sqrt{x^2-4}}$
16. Haga una análisis de la gráfica de
 - a) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$.
 - b) $f(x) = x^4 - 4x^3$.

- c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
 d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
 e) $f(x) = \frac{-5x-3}{x+1}$.

17. La concentración C de cierto producto químico en la sangre, t horas después de ser inyectado en el tejido muscular viene dado por

$$C(t) = \frac{3t}{27 + t^3}$$

¿Cuándo es máxima la concentración?

18. Al nacer un bebé perderá peso normalmente durante unos pocos días y después comenzará a ganarlo. Un modelo para el peso medio W de los bebés durante las 2 primeras semanas de vida es $P(t) = 0,015t^2 - 0,18t + 3,3$. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de P .
19. Calcular las dimensiones del mayor rectángulo inscrito en un círculo de radio r .
20. Determine cuál es el punto de la curva $f(x) = 1/x$ en el primer cuadrante que está mas cerca del origen.
21. Se requiere cerrar un potrero de forma rectangular, donde uno de los lados es el borde de un río para que los animales beban agua. Se dispone de 10000 metros de alambre y el cerco debe ser de tres corridas de alambre. Determine las dimensiones del potrero de mayor area que se puede cercar con el alambre.
22. La reacción del cuerpo a las drogas con frecuencia está dada por una relación del tipo

$$R(D) = D^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right),$$

donde D es la dosis y C (una constante) es la dosis máxima que puede administrarse. La razón de cambio de $R(D)$ con respecto a D se denomina sensibilidad. Encuentre el valor de D para el que la sensibilidad es máxima.

23. Un rectángulo tiene su base en el eje x y sus dos vértices superiores sobre la parábola $y = 12 - x^2$. ¿Cuál es la mayor área posible del rectángulo y cuáles son sus dimensiones?