Control Optativo (Pauta) de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Viernes 20 de Diciembre, 2013

Elija sólo un problema.

1. Calcule la derivada de la función dada por $f(x) = \sqrt{tan(\frac{\pi}{2}sen(x))}$. Además encuentre la ecuación de recta tangente a f en el punto $(\pi/6, f(\pi/6))$.

   Solución: Para calcular la derivada de f usaremos todas la reglas de derivación que conocemos.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(tan\left(\frac{\pi}{2}sen(x)\right)\right)^{-1/2} \cdot \left(tan\left(\frac{\pi}{2}sen(x)\right)\right)' \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\left(tan\left(\frac{\pi}{2}sen(x)\right)\right)^{-1/2} \cdot sec^2\left(\frac{\pi}{2}sen(x)\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}sen(x)\right)' \\ f'(x) &= \frac{1}{2}\left(tan\left(\frac{\pi}{2}sen(x)\right)\right)^{-1/2} \cdot sec^2\left(\frac{\pi}{2}sen(x)\right) \cdot \frac{\pi}{2}cos(x) \end{aligned}$$

   Una vez conocida la derivada de f estamos casi listos para calcular la recta tangente a a f en el punto $(\pi/6, f(\pi/6))$. La ecuación de ésta recta esta dada por

$$y - f(\pi/6) = f'(\pi/6)(x - \pi/6).$$

   Para hacer todos nuestro cálculos usaremos

$$sen(\pi/6) = 1/2, \quad cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2, \quad cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad tan(\pi/4) = 1.$$

   Luego,

   (a) $f(\pi/6) = \sqrt{tan(\frac{\pi}{2}sen(\pi/6))} = \sqrt{tan(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{1} = 1.$

   (b) $f'(\pi/6) = \frac{1}{2}\left(tan\left(\frac{\pi}{2}sen(\pi/6)\right)\right)^{-1/2} \cdot sec^2\left(\frac{\pi}{2}sen(\pi/6)\right) \cdot \frac{\pi}{2}cos(\pi/6)$

   $= \frac{1}{2}\left(tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1/2} \cdot sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2}\,(1)^{-1/2} \cdot \frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a a f en el punto $(\pi/6, f(\pi/6))$ es

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{\sqrt{3}\pi}{4}(x-\pi/6) \\ y-1 &= \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\cdot x - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\cdot \pi/6 \\ y &= \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\cdot x + \left(1 - \frac{\sqrt{3}\pi^2}{24}\right) \end{aligned}$$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cos(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Determine si existe $f'(0)$.

   Solución: Para saber si $f'(0)$ existe debemos recurrir a la definición de derivada en un punto.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-cos(x)}{x}-0}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+cos(x)}{1+cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+cos(x)} \\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la derivada de f en $x=0$ existe y su valor es $f'(0)=\frac{1}{2}$.