Control 7 (Pauta) de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 9 de Diciembre, 2013

Elija sólo un problema.

1. Use la fórmula de $sen(\alpha \pm \beta)$ para calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(a+x)+sen(a-x)-2sen(a)}{x^2}\right).$$

Solución: Sabemos que $sen(a\pm x) = sen(a)cos(x) \pm cos(a)sen(x)$. Por lo tanto,

$$sen(a+x)+sen(a-x) = 2sen(a)cos(x).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{sen(a+x)+sen(a-x)-2sen(a)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2sen(a)cos(x)-2sen(a)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2sen(a)(1-cos(x))}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2sen(a)(1-cos(x))}{x^2}\cdot\frac{1+cos(x)}{1+cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2sen(a)\cdot sen^2(x)}{x^2(1+cos(x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2sen(a)\cdot sen^2(x)}{x^2(1+cos(x))}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2sen(a)}{(1+cos(x))}\cdot\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{sen(x)}{x}\\
&= \frac{-2sen(a)}{2}\cdot 1\cdot 1\\
&= -sen(a)
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(a+x)+sen(a-x)-2sen(a)}{x^2}\right) = -sen(a).$$

2. Encuentre el(los) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$, de manera que el siguiente límite sea igual a 2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \alpha x}{sen(\alpha^2 x)}.$$

Solución: Usaremos límites conocidos para calcular el anterior límite y luego analizaremos.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \alpha x}{sen(\alpha^2 x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{x(x - \alpha)}{sen(\alpha^2 x)} \\
&= \lim_{x \to 0} (x - \alpha) \cdot \frac{x}{sen(\alpha^2 x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \alpha)}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2 x}{sen(\alpha^2 x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \alpha)}{\alpha^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\alpha^2 x}{sen(\alpha^2 x)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \alpha)}{\alpha^2} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{u}{sen(u)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(x - \alpha)}{\alpha^2} \cdot \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{sen(u)}{u}} \\
&= \frac{(0 - \alpha)}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{1} \\
&= -\frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $\alpha = -1/2$ se tiene $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \alpha x}{sen(\alpha^2 x)} = 2$.