Control 8 (Pauta) de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 16 de Diciembre, 2013

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Demuestre que existe por lo menos un $x \in \mathbb{R}$ que cumple con la siguiente ecuación

$$x^2 = xsen(x) + cos(x).$$

Solución: Consideremos $f(x) = xsen(x) + cos(x) - x^2$ y notemos que encontrar un valor que cumpla la anterior igualdad es quivalente a encontrar un cero de la función f. Luego, observamos

(a) $f(0) > 0$.
(b) $f(\pi/2) < 0$.
(c) f es una fucnión continua al ser multiplicación, potencia, suma y resta de las funciones continuas x, $sen(x)$ y $cos(x)$.

Por lo tanto, el teorema de Bolzano nos asegura que hay un $c \in (0, \pi/2)$ con $f(c) = 0$, con lo cual tendremos

$$c^2 = c \cdot sen(c) - cos(c).$$

2. Analice si la siguiente función es continua en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(2x) - 2sen(x)}{2x} & \text{si } x > 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Solución: Para que la anterior función f sea continua en 0 se debe cumplir:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

En el caso de nuestra función sabemos que $f(0) = 0^2 - 0 = 0$. Además la función tiene un cambio en $x = 0$, por lo que hay que calcular límites laterales para saber si el límite a 0 existe.

(a) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(2x) - 2sen(x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{sen(2x)}{2x} - \frac{2sen(x)}{2x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(2x)}{2x} - \lim_{x\to 0^+} \frac{2sen(x)}{2x} = \lim_{u\to 0^+} \frac{sen(u)}{u} - \lim_{x\to 0^+} \frac{sen(x)}{x}\\ &= 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 - x) = 0^2 - 0 = 0.$

Así, teniendo límites laterales iguales (ambos cero) obtenemos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ y por lo tanto se tiene $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, es decir, f es continua en $x = 0$.