

Séptima Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Diciembre, 2013

1. Calcular si los siguientes límites existen

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \text{ donde } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} g(x), \text{ donde } g(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 14 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3 - |x|}{3 + x}.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x + 1|}{2 + x}.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x + 1|}{2 + x}.$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - |x - 7| - 49}{|x - 7|}.$$

2. Halle las asíntotas verticales y horizontales (si existen) de:

$$a) \frac{x + 2}{x + 3} \quad b) \frac{2 - x}{(x - 1)^2} \quad c) \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \quad d) x + x \operatorname{sen}(1/x)$$

$$e) \sqrt{x^2 + 1} \quad f) \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad g) \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$$

3. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 0$.

4. Encuentre todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $3\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) + \cos(x) = 0$.

5. Calcular

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen}(x/3)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x)$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x \cos(3x)}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}(1/x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}(x - a)}{x^2 - a^2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(2x - 2)}{x^3 - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(\pi x)}{x - 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{(2x)^3}$$

$$\tilde{n}) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(a + h) - \operatorname{sen}(a)}{h}$$

$$h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a + h) - \cos(a)}{h}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3 \tan(x)}$$

6. Grafique las siguientes funciones:

$$(a) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = -2\operatorname{sen}(x + \pi).$$

$$(b) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = 3\cos(2x).$$

$$(c) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x - \pi).$$

7. Una rueda de radio 2 metros gira a razón de 10 vueltas por minuto, en torno al origen. En el instante $t = 0$ hay un punto A en la ubicación $(2, 0)$. Describa la altura $y(t)$ del punto A con respecto al tiempo. Grafique la función $y(t)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ Ax + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine el o los valores de $A \in \mathbb{R}$, de manera que f posea límite en $x = 1$.

9. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2x)}{3x} & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Determine el o los valores de $A \in \mathbb{R}$, de manera que f sea continua en $x = 0$.

10. Sea $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x)}{\text{sen}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Determine el o los valores de $A \in \mathbb{R}$, de manera que f sea continua en $x = 0$.

11. Encuentre las discontinuidades de las siguientes funciones dadas. Si son evitables, arregle $f(x)$ de manera que f sea una función continua en todos los reales.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} & \text{si } x \neq -2 \text{ y } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 1 & \text{si } x = -2 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

12. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Demuestre que f es una función epiyectiva. ¿Es f una función inyectiva?

13. Demuestre en cada una de las siguientes ecuaciones que existe por lo menos un $x \in \mathbb{R}$ que cumple

- a) $x^2 = x \text{sen}(x) + \cos(x)$
- b) $x^5 + x + 1 = 0$
- c) $\text{sen}(x) + 2x + 1$
- d) $\text{sen}(x) = x$

14. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua y biyectiva tal que $f(0) = 0$. Muestre que $f(1) = 1$.

15. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua que cumple con que $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$. Muestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \neq 0$ y $f(7) = 20$. Demuestre que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq x^4 + x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en cero. (Ayuda: Pruebe que $f(0) = 0$).