Control 6 (Pauta) de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 18 de Noviembre, 2013

1. En una población de 5 mil personas se está transmitiendo una infección estomacal por bacterias. Sea $p(t) = 100 - \frac{99}{t+1}$ el número de personas infectadas t semanas después del comienzo de la epidemia.

   (a) (2 ptos.) ¿Existen dos más instantes en que la cantidad de persona infectadas sea la misma?

   (b) (2 ptos.) ¿Existe un máximo o mínimo de personas infectadas?

   (c) (2 ptos.) Encuentre una función (dominio, recorrido y fórmula) que modele el tiempo en función de la cantidad de personas infectadas.

   Solución: Para modelar nuestro problema debemos considerar $Dom(p) = \mathbb{R}_0^+$.

   (a) (2 ptos.) Veamos que pasa si consideramos $t_1, t_2 \in Dom(p)$ con $p(t_1) = p(t_2)$.

$$
\begin{array}{rrcl}
 & p(t_1) & = & p(t_2) \\
\Rightarrow & 100 - \dfrac{99}{t_1+1} & = & 100 - \dfrac{99}{t_2+1} \\
\Rightarrow & \dfrac{99}{t_1+1} & = & \dfrac{99}{t_2+1} \\
\Rightarrow & 99(t_2+1) & = & 99(t_1+1) \\
\Rightarrow & t_2 & = & t_1
\end{array}
$$

   Por lo tanto la única manera de obtener $p(t_1) = p(t_2)$ es con $t_1 = t_2$, es decir, no existen dos instantes en que la cantidad de personas infectadas sea la misma.

(b) (2 ptos.) Para saber si existe un máximo o mínimo de personas infectadas, necesitamos conocer el recorrido la función, para esto consideremos,

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= = 100 - \frac{99}{t+1} \\ \frac{99}{t+1} &= = 100 - y \\ \frac{99}{100-y} &= = t+1 \\ t &= \frac{99}{100-y} - 1 \end{aligned}$$

Con esto tendremos que el posible recorrido de función es $\mathbb{R} - \{100\}$, pero hay que considerar el hecho que $t \geq 0$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{99}{100-y} - 1 \\ 0 &\leq \frac{y-1}{100-y} \end{aligned}$$

Haciendo una tabla de signos obtenemos que $y \in [1, 100[$, es decir, $Rec(p) = [1, 100[$.

(c) (2 ptos.) Lo primero es darnos cuenta la función modela el tiempo en función de la cantidad de personas infectadas es p^{-1}. Usando la información obtenida en parte (a) y (b) sabemos que $p : \mathbb{R}_0^+ \to [1, 100[$ es una función es biyectiva. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p^{-1} : [1, 100[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{99}{100-x} - 1 \end{aligned}$$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 0. \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(a) (2 ptos.) Grafique $f(x)$.

(b) (3.5 ptos.) Grafique $|-f(x+3)+1|$.

(c) (0.5 pts.) Calcule (gráficamente) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

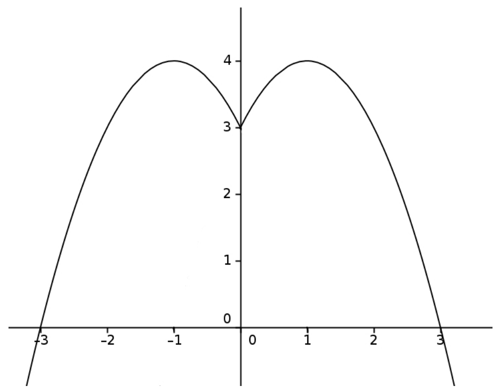
Solución:

(a) Antes de graficar f notemos que:

(i) $-x^2 - 2x + 3$ es una parábola hacia abajo, con vértice en el punto $(-1, 4)$ e intersección con el eje x en $x = -3$ y $x = 1$.

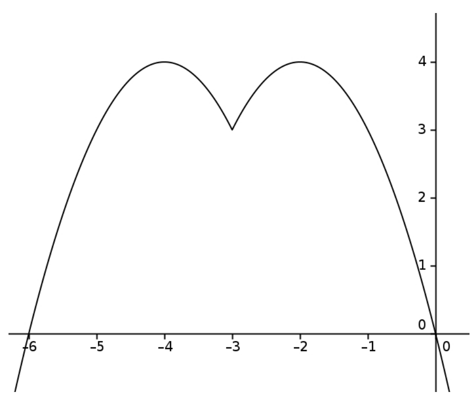
(ii) $-x^2 + 2x + 3$ es una parábola hacia abajo, con vértice en el punto $(1, 4)$ e intersección con el eje x en $x = -1$ y $x = 3$.

Con toda esta información tendremos que el gráfico de f será

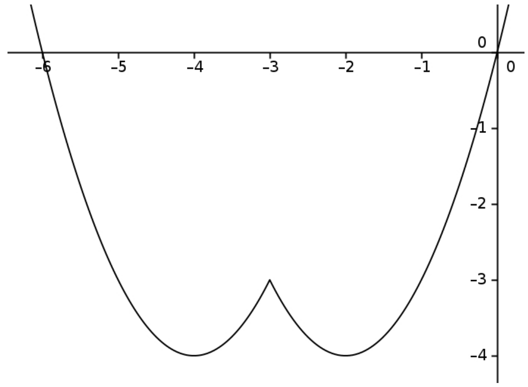


(b) Para graficar $|-f(x+3)+1|$, lo haremos caso a caso.

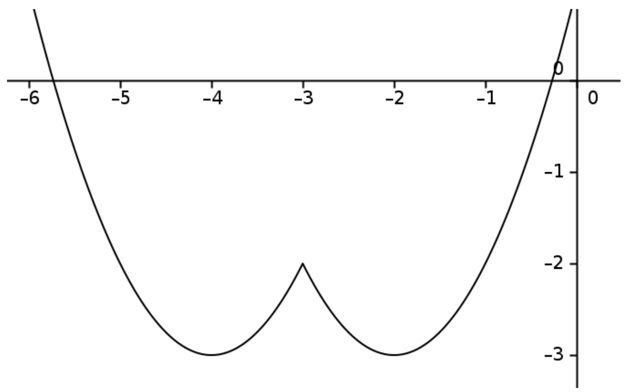
(i) $f(x+3)$



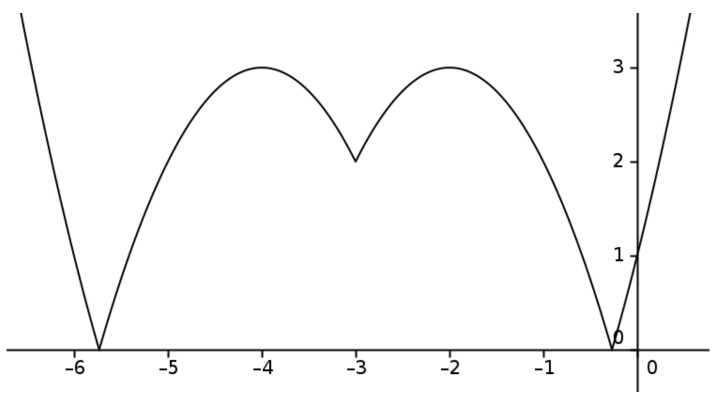
(ii) $-f(x+3)$



(iii) $-f(x+3)+1$



(iv) $-f(x+3)+1$



(c) Se puede ver del primer gráfico que $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$.