

Cuarta Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Octubre, 2013

1. Demuestre:

a) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.

b) $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$.

2. ¿Es cierto que si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} > 0$?. Encuentre una relación similar para $x < 0$.

3. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$.

4. Demuestre que

a) Si $0 \leq a \leq b$ y $0 \leq x \leq y$, entonces $ax \leq by$.

b) Si $0 < a < b$, entonces $b^{-1} < a^{-1}$.

c) Si $a < b < 0$, entonces $b^{-1} < a^{-1}$.

d) Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

e) Si $a < b < 0$, entonces $a^2 > b^2$.

5. ¿Es cierto que si $0 < a$, entonces $a < a^2$?

6. Considere un rectángulo de lados “ x ” e “ y ” y perímetro 100. Encuentre un número real a (términos de x e y) tal que los lados del rectángulo se puedan escribir en la forma $100 + a$ y $100 - a$.

Use este resultado para demostrar que entre los rectángulos de perímetro 100, el cuadrado es el que tiene mayor área. ¿Podría generalizar este resultando si cambiamos el rectángulo de perímetro 100 por un rectángulo de perímetro P ?

7. Sean a, b reales positivos. Pruebe:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

b) $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(a + b) \geq 4$.

c) $a + b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

8. Resuelva las siguientes desigualdades en \mathbb{R} .

a) $x^2 + x > 2$.

b) $\frac{x-1}{x^2-3x} \geq 0$.

c) $\frac{2x+1}{x+2} \geq 1$.

d) $x < x^2 - 12 < 4x$.

e) $(x + 1)(x - 2) > 0$.

f) $\frac{3}{x-9} > \frac{x}{x+2}$.

g) $x^2 + 2x \leq 3$.

h) $-3 < 2x + 5 < 7$.

i) $(x + 2)(x - 3)(x + 5) > 0$.

j) $\frac{(x-5)(x+2)}{(2x-2)} \geq 0$.

k) $1 - \frac{x+2}{x-3} > 6$.

9. Resuelva las siguientes desigualdades con valor absoluto

a) $|2x - 3| + |4 - x| < 2$.

b) $|2x + 3| \leq 6$.

c) $|x + 1| - |x - 1| \geq 3x + 2$.

d) $|3 - 2x| < 5$.

e) $2 < |x^2 - 1| < 3$.

f) $|x^2 - 1| \leq 3$.

g) $|\frac{6-5x}{3+x}| > \frac{1}{2}$.

h) $|x + 7| > 4$.

i) $|x + 2| + |x - 3| > 12$.

j) $|2x - 1| + |x - 3| > 9$.

k) $|3x - 2| - |x - 7| < 6$.

10. Problemas de Planteo.

- a) Las utilidades de un fabricante de cierto producto "A" están determinadas por la expresión: $U(x) = (120 - x)(x - 20)$, en miles de pesos, donde x representa el precio de venta de cada artículo. Determina entre qué valores se debe vender los productos de manera que las utilidades sean superiores a 1600000.

- b) Los ingresos de la empresa “A” están determinados por la expresión $IA(x) = (5-2x)$, y los ingresos de la empresa “B” por la expresión $IB(x) = (x+3)^2$, donde x es la cantidad de artículos vendidos (en miles). Determine el intervalo para x en el cual los ingresos de “B” superan a los de “A”.
- c) El departamento de recursos humanos de una institución emplea un test de 30 preguntas para determinar la aptitud de un postulante en una sección que atiende público. De acuerdo al tiempo t , en minutos, que emplea en responder el test se calcula un coeficiente de aptitud mediante la fórmula:

$$C.A(t) = \frac{5,5t - 3(30 - t) + 135}{200}.$$

Se ha establecido considerar como aptitud normal a toda persona cuyo C.A. no sea inferior a 0,85 ni mayor de 1,20.

- (a) Determine el tiempo mínimo que debe emplear un postulante para obtener un C.A. normal.
- (b) Determine el tiempo máximo que debe emplear un postulante para obtener un C.A. normal.