Control 3 (Pauta) de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 07 de Octubre, 2013

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Calcule $\displaystyle\sum_{i=10}^{33}\left(\frac{3^{2i+3}\cdot 2^{2i+5}}{10^{i+2}}-\frac{6^{34}}{5}\right)$

   Solución: Para simplificar nuestros cálculos resolveremos cada una de las sumas involucradas por separado.

$$
\begin{aligned}
(a)\ \sum_{i=10}^{33}\left(\frac{3^{2i+3}\cdot 2^{2i+5}}{10^{i+2}}\right) &= \sum_{i=10}^{33}\left(\frac{3^{2i}\cdot 3^{3}\cdot 2^{2i}\cdot 2^{5}}{10^{i}\cdot 10^{2}}\right) = \frac{3^3\cdot 2^5}{10^2}\sum_{i=10}^{33}\left(\frac{3^{2i}\cdot 2^{2i}}{10^{i}}\right)\\
&= \frac{3^3\cdot 2^5}{5^2\cdot 2^2}\sum_{i=10}^{33}\left(\frac{3^{2}\cdot 2^{2}}{10}\right)^i = \frac{3^3\cdot 2^3}{5^2}\sum_{i=10}^{33}\left(\frac{18}{5}\right)^i\\
&= \frac{6^3}{5^2}\cdot\frac{(\frac{18}{5})^{10}-(\frac{18}{5})^{34}}{1-\frac{18}{5}}
\end{aligned}
$$

$$
(b)\ \sum_{i=10}^{33}\frac{6^{34}}{5} = \frac{6^{34}}{5}\cdot(33-10+1) = \frac{24\cdot 6^{34}}{5}
$$

Ahora juntando ambos resultados tendremos,

$$\begin{aligned}\sum_{i=10}^{33}\left(\frac{3^{2i+3}\cdot 2^{2i+5}}{10^{i+2}}-\frac{6^{34}}{5}\right) &= \sum_{i=10}^{33}\left(\frac{3^{2i+3}\cdot 2^{2i+5}}{10^{i+2}}\right)-\sum_{i=10}^{33}\frac{6^{34}}{5}\\ &= \frac{6^3}{5^2}\cdot\frac{(\frac{18}{5})^{10}-(\frac{18}{5})^{34}}{1-\frac{18}{5}}-\frac{24\cdot 6^{34}}{5}\end{aligned}$$

2. Calcule la suma de los 50 primeros términos de la siguiente suma

$$\frac{1}{2\cdot 3}-5+\frac{1}{3\cdot 4}-7+\frac{1}{4\cdot 5}-9+\cdots$$

Solución: Notemos que los términos positivos de la suma son de la forma

$$\frac{1}{(i+1)(i+2)},$$

con i partiendo desde 1.
Por otra parte, los términos negativos de la suma son de la forma

$$2i+3,$$

con i partiendo desde 1.
Por lo tanto, la suma de los 50 primeros términos de la suma será

$$\sum_{i=1}^{25}\left(\frac{1}{(i+1)(i+2)}-(2i+3)\right).$$

Para simplificar nuestros cálculos resolveremos cada una de las sumas involucradas por separado.

$$(a)\ \sum_{i=1}^{25}\frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{25}\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{27} = \frac{27}{54}.$$

$$(b)\ \sum_{i=1}^{25}(2i+3) = 2\sum_{i=1}^{25} i+\sum_{i=1}^{25}3 = 2\cdot\frac{25\cdot 26}{2}+3\cdot 25 = 725$$

Ahora juntando ambos resultados tendremos,

$$\sum_{i=1}^{25}\left(\frac{1}{(i+1)(i+2)}-(2i+3)\right)=\frac{27}{54}-725$$