Capítulo 5

Teorema del Binomio

5.1. Factoriales

Definición 1

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Vamos a definir inductívamente $n!$ (se lee n factorial) mediante

$$\begin{array}{ll} 1) & 0! = 1 \\ 2) & (n+1)! = n!\,(n+1) \end{array}$$

Ejemplo 1

$$\begin{aligned} &3! = 2! \cdot 3 = 1! \cdot 2 \cdot 3 = 0! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ &n! = (n-1)! \cdot n = (n-2)! \cdot (n-1)n = 1! \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot (n-2)(n-1)n \\ &n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot (n-1) \cdot n \end{aligned}$$

5.2. Coeficientes Binomiales

Definición 1

Sean $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se define el símbolo $\binom{n}{k}$, (se lee " n sobre k") mediante

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} & \text{si } \ k \leq n \\ 0 & \text{si } \ k > n \end{cases}$$

Ejemplo 1

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10, \qquad \binom{2}{3} = 0$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1, \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n$$

Notación.

Tambien es usual denotar al coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, por C_k^n

Propiedad 1

$\forall\, k \leq n,$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\; k}$$

Nótese que, en ésta fracción hay en el numerador k factores decrecientes a partir de n, y en el denominador, los mismos k factores crecientes a partir de 1.

Demostración.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot\;\cdot (n-k)(n-k+1) \cdot \;\cdot\;\cdot (n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot\;\cdot (n-k) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\; k}$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\; k}$$

Ejemplo 2

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$\binom{k}{2} = \frac{k\,(k-1)}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}\,k(k-1)$$

Propiedad 2

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

3) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, $k \geq 1$

Demostración.

$\forall\, k < n,$

1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{n!}{[n-(n-k)]!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

2) $\displaystyle \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}$

$$= n!\frac{k+1+n-k}{(n-k)!\,(k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{[n+1-(k+1)]!\,(k+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{k+1}$$

3) $\displaystyle k\binom{n}{k} = k\,\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = k\frac{(n-1)!\,n}{(n-k)!\,(k-1)!\,k}$

$$= n\frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$\forall\, k \geq n$, es inmediato.

El cuadro de números que aparece a continuación se llama triángulo de Pascal, que, como veremos se puede expresar mediante los coeficientes binomiales.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\end{array}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Observemos que las propiedades de los coeficientes binomiales se cumplen en éste último cuadro, tales como la propiedad $1)$ como la 2) por ejemplo: la propiedad 1) se encuentra en cada linea del triángulo y la propiedad 2) para construir una fila en base a la anterior, exceptúandose el primer y último elemento de la fila, es decir supongamos construído el triángulo hasta la cuarta fila , cada elemento de la quinta fila (excepto el primero y último que son 1) lo construímos sumando los dos números inmediatos a él en la fila precedente, así:

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}=\binom{5}{1}, \qquad \binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2},\ \binom{4}{2}+\binom{4}{3}=\binom{5}{3},\ldots$$

.

Ejemplo 3

Demostrar que

$$\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}$$

Demostración.

Partiendo del primer miembro, se tiene

$$\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}]+[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}]$$
$$=\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k+1}=\binom{n+2}{k+1}$$

Ejemplo 4

i) $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}=\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}=\binom{n+2}{n+1}$

ii) $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}=\binom{n+2}{n+1}+\binom{n+2}{n}=\binom{n+3}{n+1}$

El ejemplo 4, nos sugiere la siguiente propiedad

Propiedad 3

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}=\binom{2n+1}{n+1}$$

Demostración.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{n}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{2n-1}{n}+\binom{2n}{n}$$
$$=\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{2n-1}{n}+\binom{2n}{n}$$

$$= \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+2}{n} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n}$$

$$= \binom{n+3}{n+1} + \binom{n+3}{n} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n}$$

$$= \binom{n+4}{n+1} + \binom{n+4}{n} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \binom{2n-2}{n+1} + \binom{2n-2}{n} + \binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n}$$

$$= \binom{2n-1}{n+1} + \binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$

Propiedad 4

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Demostración.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} \quad \text{pués} \quad \binom{k}{r} = 0 \quad \text{cuando} \quad k < r$$

Entonces vamos a demostrar por inducción que $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

i) Para $n = 1,$ se tiene $\displaystyle\sum_{k=r}^{1} \binom{k}{r} = \binom{2}{r+1} \Leftrightarrow \binom{1}{1} = \binom{2}{2}$ lo que es verdadero. Note que r en éste caso no puede tomar otro valor que no sea 1.

ii) Sea válido para $n,$ con $n > r$ luego se cumple

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1} \qquad (H.I.)$$

Por demostrar para $n+1,$ o sea que

$$\sum_{k=r}^{n+1} \binom{k}{r} = \binom{n+2}{r+1} \qquad (T.)$$

En efecto

$$\sum_{k=r}^{n+1}\binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r} = \binom{n+2}{r+1}.$$

5.3. Teorema del Binomio

Teorema.

Sea $n \in \mathbb{N}$, y a, b reales. Entonces,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Demostración.

Por inducción.

i) Para $n = 1$, $(a+b) = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k} a^{1-k}b^k \Leftrightarrow (a+b) = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$

que es verdadero.

ii) Sea válido para n o sea se cumple que,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k \qquad (H.I.)$$

Por demostrar para $n+1$, esto es

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k \qquad (T.)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}b^k + b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} [\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}] \, a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \, b^k$$

Propiedad 5

1) $\quad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \, b^k$

2) $\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Demostración.

1) $(a-b)^n = [\, a + (-b) \,]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \, b^k$$

2) Eligiendo $a = b = 1$ se tiene

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

5.4. Ejercicios Resueltos

1. En el desarrollo $(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x})^9$. Hallar:

   a) El quinto término.

   b) El término que contiene a x^5.

   c) El término independiente de x.

Solución.

El término de orden $k+1$, en éste caso está dado por

$$T_{k+1} = \binom{9}{k}(\frac{3}{2}x^2)^{9-k}(-\frac{1}{3x})^k = \binom{9}{k}(\frac{3}{2})^{9-k}(-\frac{1}{3})^k x^{18-3k}, \qquad (1)$$

Por tanto:

a) El quinto término $\Rightarrow k+1=5 \Leftrightarrow k=4 \Rightarrow T_5 = \binom{9}{4}(\frac{3}{2})^5(-\frac{1}{3})^4 x^6$

b) En (1), se debe tener que $18-3k=5 \Leftrightarrow k=\frac{13}{3}$ lo que nos indica que no existe tal término pués k no puede ser fraccionario.

c) De igual forma que en b), se debe tener $18-3k=0 \Leftrightarrow k=6$ lo que en este caso si existe tal término que resulta ser

$$T_7 = \binom{9}{6}(\frac{3}{2})^3(-\frac{1}{3})^6 = \frac{7}{18}$$

2. Encontrar el coeficiente de x^n, en

$$\left(1-x+x^2\right)(1+x)^{2n+1}$$

Solución.

Note que

$(1-x+x^2)(1+x)^{2n+1} = (1+x)^{2n+1} - x(1+x)^{2n+1} + x^2(1+x)^{2n+1}$

Debemos buscar el coeficiente de: x^n, x^{n-1} y x^{n-2} en $(1+x)^{2n+1}$, así

El coef. de x^n en $(1+x)^{2n+1}$ es $\binom{2n+1}{n}$, el coef. de x^{n-1} es $\binom{2n+1}{n-1}$

y el de x^{n-2} es $\binom{2n+1}{n-2}$.

Por tanto el coeficiente de x^n resulta: $\binom{2n+1}{n} - \binom{2n+1}{n-1} \quad + \binom{2n+1}{n-2}$

3. Si x^r se encuentra en el desarrollo de $(x+\frac{1}{x})^n$, hallar su coeficiente.

Solución.

Como $(x+\frac{1}{x})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}(\frac{1}{x})^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-2k}$

El exponente de x tomará el valor r cuando $n-2k=r \Leftrightarrow k=\frac{n-r}{2}$

luego el coeficiente pedido resulta $\binom{n}{\frac{n-r}{2}}$, solo hay solución si $n-r$ es par o cero.

4. Probar que los coeficientes de x^2 y x^3 en el desarrollo de $(x^2+2x+2)^n$ son: $2^{n-1}n^2$ y $\frac{1}{3}n(n^2-1)\,2^{n-1}$.

Prueba.

$$(x^2+2x+2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(x^2+2x)^k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}2^{n-k}\binom{k}{j}2^{k-j}x^{k+j}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}2^{n-j}x^{k+j}$$

Para obtener el coeficiente de x^2 se debe tener $k+j=2;\ j\leq k$ esto es para: $j=0,k=2$ y $j=1,k=1$ por tanto dicho coeficiente resulta ser

$$\binom{n}{2}\binom{2}{0}2^n+\binom{n}{1}\binom{1}{1}2^{n-1}=n^2\,2^{n-1}$$

De igual manera para el coeficiente de x^3, $k+j=3;\ j\leq k$ esto es:

$j=0,k=3$ y $j=1,k=2$ por tanto

$$\binom{n}{3}\binom{3}{0}2^n+\binom{n}{2}\binom{2}{1}2^{n-1}=\frac{1}{3}n(n^2-1)\,2^{n-1}$$

5. Demuestre que

$$\frac{1\binom{n}{1}}{\binom{n}{0}}+\frac{2\binom{n}{2}}{\binom{n}{1}}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\frac{n\binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}}=\binom{n+1}{2}$$

Solución.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k\frac{n!}{(n-k)!k!}}{\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}}=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$$

$$=n+(n-1)+\cdot\cdot\cdot+2+1=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n+1}{2}$$

6. Encuentre el valor de n, si $\binom{n}{n-2}=10$

Solución.

Por la propiedad simétrica $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow$

$n_1 = 5$ y $n_2 = -4$, entre estas dos soluciones solo se considera $n = 5$.

7. Encuentre el término central de $$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$$

Solución.

Notemos que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$ tiene 13 términos, luego el término central resulta el séptimo es decir para $k = 6$ en

$T_{k+1} = \begin{pmatrix} 12 \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}(\frac{1}{x})^k = \begin{pmatrix} 12 \\ k \end{pmatrix} x^{12-2k}$ por tanto $T_7 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

8. Hállese la relación que debe existir entre r y n, para que los coeficientes de los términos de lugares $3r$ y $r+2$ en el desarrollo de $(1+x)^{2n}$, sean iguales.

Solución.

En el desarrollo $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$; el término de lugar $3r$ es para $k = 3r - 1$ y el término de lugar $r+2$ es para $k = r+1$ luego se debe cumplir que

$\binom{2n}{3r-1} = \binom{2n}{r+1} \Leftrightarrow \binom{2n}{3r-1} = \binom{2n}{2n-(3r-1)} = \binom{2n}{r+1} \Leftrightarrow 2n - 3r + 1 = r + 1$

de donde $n = 2r$.

9. Demuestre que

$$\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{n!}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} &= \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n(n+1) \cdot \cdot \cdot (2n-1) \cdot 2n}{n!\,n!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{n!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdot \cdot 2n}{n!} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{n!} 2^n \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot n}{n!} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot \cdot (2n-1)}{n!} 2^n$$

10. Demostrar para $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$,

a) $n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdot \cdot \cdot \cdot + n\binom{n}{n}x^{n-1}$

b) $1^2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdot \cdot \cdot \cdot + n^2\binom{n}{n} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$

c) $1\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdot \cdot \cdot \cdot + (-1)^{n-1}(n)\binom{n}{n} = 0$

Demostración.

a) $$(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(n-1)!}{(n-1-k)!k!}x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!k}{[n-1-(k-1)]!(k-1)!k}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdot \cdot \cdot \cdot + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

b) $$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+k^2-k)\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} \qquad (*)$$

Para la primera sumatoria, haciendo $x = 1$ en la parte a) se obtiene

$$\sum_{k=1}^{n}k\tbinom{n}{k} = n\,2^{n-1}$$

Para la segunda sumatoria

$$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\tbinom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\binom{n}{k+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\frac{n!}{(n-k-2)!(k+2)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k-2)!(k+2)!}$$

$$= \ n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{(n-k-2)!(k)!} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}$$

$$= n(n-1)\,2^{n-2}$$

Luego, remplazando en $(*)$ resulta

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

c) $$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x^k = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)!\,k}{(n-k)!(k-1)!\,k}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k\,n!}{(n-k)!\,k!}x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

Haciendo $x = -1$ se tiene; $0 = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}(-1)^{k-1}$ de donde

$$1\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \cdot\cdot\cdot\cdot + (-1)^{n-1}(n)\binom{n}{n} = 0$$

11. Demostrar $\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]^2 = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$

Demostración.

Se sabe que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \Leftrightarrow \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]^2 = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$

12. Usando la identidad $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(x+1)^n$, demuestre que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + \binom{n}{n}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Demostración.

Como $(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}x^k$ el coeficiente de x^n es $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ $\quad (1)$

Por otra parte el coeficiente de x^n en

$$(1+x)^n(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{j}x^{n+k-j}$$

se obtiene para $k=j$, con k y $j=0,1,2,\ldots,n$ por tanto dicho coeficiente en este caso resulta

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{n}{n}^2 \qquad (2)$$

Como (1) y (2) ambos, son coeficientes de x^n entonces

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{n}{n}^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

13. Demostrar:

a) $1\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+\cdot\cdot\cdot\cdot+n\binom{n}{n}^2=n\binom{2n-1}{n}$

b) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdot\cdot\cdot\cdot=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdot\cdot\cdot\cdot$

Demostración.

a) $n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}n\binom{n-1}{k}x^k=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$ $\quad (1)$

por otra parte

$$(1+x)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j \qquad (2)$$

multiplicando miembro a miembro (1) y (2) resulta

$$n(1+x)^{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}k\binom{n}{k}\binom{n}{j}x^{k+j-1}$$

Ahora, el coeficiente de x^{n-1} en $n(1+x)^{2n-1}$ es

$$n\binom{2n-1}{n-1}=n\binom{2n-1}{n} \quad (3)$$

en $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}k\binom{n}{k}\binom{n}{j}x^{k+j-1}$ se obtiene para $k+j-1=n-1 \Leftrightarrow k+j=n$

esto es: $k=n \wedge j=0;\ k=n-1 \wedge j=1;\ \cdots, k=1 \wedge j=n-1.$

luego dicho coeficiente es

$$n\binom{n}{n}\binom{n}{0}+(n-1)\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\cdot\cdot\cdot\cdot+1\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}$$

y por la propiedad simétrica

$$n\binom{n}{n}\binom{n}{n}+(n-1)\binom{n}{n-1}\binom{n}{n-1}+\cdot\cdot\cdot\cdot+1\binom{n}{1}\binom{n}{1}$$

es decir: $1\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+\cdot\cdot\cdot\cdot+n\binom{n}{n}^2 \qquad (4)$

finalmente (3) y (4) representan al mismo coeficiente, en este caso de x^{n-1} entonces

$$1\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+\cdot\cdot\cdot\cdot+n\binom{n}{n}^2=n\binom{2n-1}{n}$$

b) De inmediato

$$[1+(-1)]^n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k \Leftrightarrow 0=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

de aquí: $$-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdot\cdot\cdot\cdot=0$$

finalmente

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdot\cdot\cdot\cdot=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdot\cdot\cdot\cdot$$

14. Probar que:

$$\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\cdot\cdot\cdot=2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\cdot\cdot\cdot=n\,2^{n-2}$$

Prueba.

Previo estableceremos que:

$S_n=\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdot\cdot\cdot+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0,$ para lo cuál

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k$$

$=n\,[1+(-1)]^{n-1}=0,$ por tanto

$$\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\cdots=2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\cdots=A,$$

y de aquí: $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+\cdots\cdot=2A$ pero sabemos que

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots\cdot n\binom{n}{n}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\,2^{n-1}\text{ (ejercicio 10)}$$

entonces $A=n\,2^{n-2}$, luego

$$\binom{n}{1}+3\binom{n}{3}+5\binom{n}{5}+\cdots=2\binom{n}{2}+4\binom{n}{4}+6\binom{n}{6}+\cdots=n\,2^{n-2}$$

15. Demuestre que:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{i}\binom{n}{j}=2^{n-1}(2^n-1)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}3^i\binom{n}{k}$$

Demostración.

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{i}\binom{n}{j}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}=2^{n-1}[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}-\binom{n}{0}]$$

$$=2^{n-1}(2^n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}3^i\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{3^k-1}{3-1})\binom{n}{k}=\frac{1}{2}\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k-\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(1+3)^n-1-(2^n-1)\}=\frac{1}{2}(4^n-2^n)=2^{n-1}(2^n-1)$$

16. Demuestre que:

$$\binom{n}{0}^2+2\binom{n}{1}^2+3\binom{n}{2}^2+\cdots\cdot+(n+1)\binom{n}{n}^2=\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$$

Demostración.

Notemos que

$$\binom{n}{0}^2+2\binom{n}{1}^2+3\binom{n}{2}^2+\cdots\cdot+(n+1)\binom{n}{n}^2=$$

$$\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + 3\binom{n}{3}^2 + \cdot\cdot\cdot + n\binom{n}{n}^2 + [\,\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdot\cdot\cdot + \binom{n}{n}^2]$$

$$= n\binom{2n-1}{n} + \binom{2n}{n}$$

Observemos que se han ocupado los resultados de los problemas 13. a) y 12.

17. Demuestre que el coeficiente del término central de $(1+x)^{2n}$, es igual a la suma de los coeficientes de los dos términos centrales de $(1+x)^{2n-1}$

Demostración.

El término central de $(1+x)^{2n}$ se obtiene para $k = n \Rightarrow \binom{2n}{n}$ es el coef. del término central.

Analogamente en $(1+x)^{2n-1}$ los términos centrales se obtienen para

$k = \dfrac{2n-1}{2} - \dfrac{1}{2} = n-1$ y para $k = \dfrac{2n-1}{2} + \dfrac{1}{2} = n$, con lo que sus coeficientes son respectívamente:

$$\binom{2n-1}{n-1} \text{ y } \binom{2n-1}{n} \text{ luego } \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n}.$$

18. Demostrar que:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}x^k = (1+x)^{n-1}[1+(n+1)x]$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k}5^k = 6^{n-1}(10n+6)$

Demostración.

a) $$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}x^k + (1+x)^n$$

$$= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1} + (1+x)^n$$

$$= n(1+x)^{n-1}x + (1+x)^n$$

$$= (1+x)^{n-1}[1+(n+1)x]$$

b) $$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{n}{k}5^k = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}5^k + \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}5^k$$

Para la primera sumatoria se hace $x = 5,$ en el resultado de la parte a)

$$= 6^{n-1}(5n+6) + n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}5^k$$

$$= 6^{n-1}(5n+6) + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}5^{k+1}$$

$$= 6^{n-1}(5n+6) + 5n(1+5)^{n-1} = 6^{n-1}(10n+6)$$

19. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd)\binom{n}{k} = (2a+nd)2^{n-1}$$

Demostración.

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd)\binom{n}{k} = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + d\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = a\,2^n + d[\,n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}]$$

$$= a2^n + dn\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} = a\,2^n + d\,n2^{n-1} = (2a+nd)2^{n-1}$$

20. Demuestre que

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1} + \binom{n}{1}\binom{n}{2} + \cdot\cdot\cdot\cdot + \binom{n}{n-1}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$$

Demostración.

$$(1+x)^n(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{i}x^{n+k-i}$$

$(1+x)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{i}x^{n+k-i}$; en esta expresión por una parte el coeficiente de x^{n-1} es $\binom{2n}{n-1}$, por otra parte el mismo coeficiente se obtiene para

$n+k-i=n-1 \Leftrightarrow i-k=1$ lo que se dá para los siguientes casos de i y $k:$ $k=0 \wedge i=1,\, k=1 \wedge i=2, \ldots, k=n-1 \wedge i=n$ de donde resulta que, éste coeficiente es $\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

como ambos números son el coeficiente de x^{n-1}, entonces deben ser iguales, así

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}=\frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$$

21. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}=\frac{1+n2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

Demostración.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(n+1)(n+2)(k+1)}{(k+2)(n-k)!\,k!(k+1)(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}(k+1)$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\Big[\binom{n+2}{k+2}(k+2)-\binom{n+2}{k+2}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}(k+2)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big[\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}(n+2)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k+2}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big[(n+2)\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}-\sum_{k=2}^{n+2}\binom{n+2}{k}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big[(n+2)\big(2^{n+1}-1\big)-\big\{2^{n+2}-\binom{n+2}{1}-\binom{n+2}{0}\big\}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left[n\,2^{n+1}+1\right]$$

22. Demuestre que

$$\binom{2n}{0}\binom{4n}{2n}-\binom{2n}{1}\binom{4n-2}{2n}+\binom{2n}{2}\binom{4n-4}{2n}-\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot=4^n$$

Demostración.

Usando la identidad $[\,(1+x)^2-1\,]^{2n}=x^{2n}(2+x)^{2n}$ se tiene

$$[\,(1+x)^2-1\,]^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(1+x)^{4n-2k}(\,-1)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(\,-1)^k\binom{2n}{k}\ \sum_{j=0}^{4n-2k}\binom{4n-2k}{j}x^j$$

Para obtener el coeficiente de x^{2n}, se debe tener $j=2n$ con lo que resulta

$$\sum_{k=0}^{2n}(\,-1)^k\binom{2n}{k}\binom{4n-2k}{2n}=\binom{2n}{0}\binom{4n}{2n}-\binom{2n}{1}\binom{4n-2}{2n}+\cdot\cdot\cdot$$

note que $k\le n$.

Por otra parte el coeficiente de x^{2n}, en $[\,(1+x)^2-1\,]^{2n}=(2+x)^{2n}x^{2n}$

$=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}2^{2n-j}x^{2n+j}$, se obtiene para $j=0$ y esto dá $\binom{2n}{0}2^{2n}=4^n$

Por tanto

$$\binom{2n}{0}\binom{4n}{2n}-\binom{2n}{1}\binom{4n-2}{2n}+\binom{2n}{2}\binom{4n-4}{2n}-\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot=4^n$$

5.5. Ejercicios Propuestos

1. Sinplificar:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ b) $\dfrac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n}{2}}$ c) $\binom{4n}{3n}\binom{3n}{2n}\binom{2n}{n}$

d) $\dfrac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}$ e) $\dfrac{(n+1)!-(n-1)!}{n!}$

Respuesta.

a) n b) $\frac{1}{3}(n+1)$ c) $\frac{(4n)!}{(n!)^4}$ d) $\frac{n+1}{r+1}$ e) $n+1-\frac{1}{n}$

2. En el desarrollo

$$\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)^9$$

Determine: a) El séptimo término.

b) El término que contiene a x^7.

c) La suma de los coeficientes de los dos términos centrales.

Respuesta.

a) $\dfrac{567}{16}$ b) No existe. c) $-\dfrac{147}{16}$

3. Determinar el coeficiente de x^{15} en el desarrollo

$$\left(3x-\frac{x^3}{6}\right)^9$$

Respuesta.

283.5

4. Encuentre el término independiente de x en los desarrollos:

a) $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$ b) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$ c) $(2x+1)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{700}$

Respuesta.

a) $(-1)^n\dfrac{(3n)!}{n!\,(2n)!}$ b) 0 c) 2801

5. Encuentre el coeficiente de $\dfrac{1}{x}$ en el desarrollo de

$$(1+x)\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$$

Respuesta.

$$\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}$$

6. Determine el valor de k si los coeficientes de x^k y de x^{k+1} en el desarrollo $(3x+2)^{19}$ son iguales.

Respuesta.

$k = 11$

7. Encuentre el coeficiente de x^4 en:

a) $(1-x)(1+x)^5$ b) $(1+x)(1-x)^n$

Respuesta.

a) 5 b) $\frac{1}{24}\,n(n-1)(n-2)(n-7)$

8. Encuentre el coeficiente de x^n en el desarrollo

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{2n}$$

Respuesta.

$$\binom{2n}{n}$$

9. Encuentre el término central en el desarrollo

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$$

Respuesta.

$$\binom{2n}{n}$$

10. Demuestre que el término independiente de x en el desarrollo de

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 (1+x)^n$$

esta dado por $\binom{n+2}{2}$

11. Encuentre el coeficiente de x^r en: $\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

a) $(1-x)(1+x)^n$ b) $(1+2x+x^2)(1+x)^n$

Respuesta.

a) $\dfrac{n!(n-2r+1)}{r!(n-r+1)!}$ b) $\dfrac{(n+2)!}{r!\,(n-r+2)!}$

12. Demuestre que:

a) $\binom{n}{k}+3\binom{n}{k-1}+3\binom{n}{k-2}+\binom{n}{k-3}=\binom{n+3}{k}$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}=2^{n+1}-1$

13. Si $(2+3x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, entonces

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{21-3k}{2k+2}$$

y de aquí demuestre que: $a_0<a_1<a_2<a_3$ y $a_4>a_5>a_6>a_7$

14. Calcular el valor de a, $a\in\mathbb{R}$; tal que la suma de los coeficientes centrales sea igual al término independiente de x, en

$$\left(x-\frac{a}{x^2}\right)^9$$

Respuesta.

$a=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{11}{12}}$

15. Determine el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo

$$(1-x)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{24}$$

Respuesta.

$-1748.$

16. Demuestre que

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

17. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+4+4^2+\cdots+4^{k-1}\right)\binom{n}{k}=\frac{1}{3}(5^n-2^n)$$

18. Determine el valor de n, para que los términos de los desarrollos $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ y $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ sean iguales.

Respuesta.

$n=4$

19. Pruebe que el producto de los n primeros números impares es $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\dbinom{2n}{n}n!$

20. Demostrar $\forall\, m>n$, que

$$\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m}{n+1}+\cdot\cdot\cdot\cdot+\binom{m}{m-n}\binom{m}{m}=\frac{(2m)!}{(m-n)!\,(m+n)!}$$

21. Demostrar que

$$1^2\binom{n}{0}+2^2\binom{n}{1}+\cdot\cdot\cdot\cdot+(n+1)^2\binom{n}{n}=2^n+3n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}$$

22. Pruebe que

$$1\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}+\cdot\cdot\cdot\cdot+(n-1)\binom{n}{n}=1+(n-2)2^{n-1}$$

23. Encuentre el valor de

$$\left(x+\sqrt{2}\right)^4+\left(x-\sqrt{2}\right)^4$$

Respuesta.

$2(x^4+12x^2+4)$

24. Sean m,n y r números naturales tales que: $r\le m$ y $r\le n$. Ocupe la identidad $(1+x)^m(1-x)^n=(1+x)^{m+n}$ para probar que

$$\binom{m}{r}\binom{n}{0}+\binom{m}{r-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{r-2}\binom{n}{2}+\cdot\cdot\cdot+\binom{m}{0}\binom{n}{r}=\binom{m+n}{r}$$

25. Demuestre que

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}\left(2+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{12}\,n(n-1)(4n+7)$$

26. Demuestre que

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{1}{n+1}$$

27. Probar que

$$\binom{n}{0}\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{3} + \binom{n}{2}\binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-2}\binom{n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+2)!(n-2)!}$$

28. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

Sugerencia:determine el coeficiente de x^{2n} en cada uno de los miembros de la identidad y luego iguale.

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n} = (1-x^2)^{2n}$$

29. Si el término del centro del desarrollo de $(1+x)^{2n}$ es el mayor término, probar que:

$$1 - \frac{1}{n+1} < x < 1 + \frac{1}{n}$$

30. Sea $(1+x^2)^2(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$ y si C_0, C_1, C_2 están en $P.A.$ entonces hay sólo dos valores posibles para n, encuéntrelos.

Respuesta.

$n = 2 \vee n = 3$

31. Considerando el desarrollo

$$(1+x+x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$$

demuestre i) $a_{2n-k} = a_k$

ii) $2\sum_{k=0}^{n-1} a_k = 3^n - a_n$