Tercera Guía de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Martes 8 de Octubre, 2013

1. Determine cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera demuestra por inducción y en caso de ser falsa muestre un contraejemplo.

   a) La suma de los primero n números impares es igual al $n-$ésimo cuadrado.

   b) El número n^2+n+1 es un número primo para todo $n \in \mathbb{N}$.

   c) El número 9 divide $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

   d) El número 3 divide $7^n - 4^n$, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

2. Por inducción demuestre que para todo número natural n se cumple:

   a) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = n\frac{(3n-1)}{2}$

   b) $2 + 5 + 13 + \cdots + (2^{n-1} + 3^{n-1}) = 2^n - 1 + \frac{3^n - 1}{2}$

   c) $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \forall q \neq 1$

   d) $1 - 4 + 9 - 16 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + \cdots + n)$

   e) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \cdots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$

   f) $n^2 + n$ es divisible por 2

   g) $n^3 + 2n$ divisible por 3

   h) $n^5 - n$ es divisible por 5

   i) $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ divisible por 7

   j) $x^2n - 1$ es divisible por $x + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

3. Considerese la proposición:

$$p(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n^2 + n - 6}{2}$$

   a) Demuestre que $p(k)$ cierta $\Rightarrow p(k+1)$ cierta.

   b) ¿Es $p(n)$ válida $\forall\, n \in \mathbb{N}$?

4. Se define la sucesión u_n , $n \in \mathbb{N}$, por la relación $u_{n+1} = 2u_n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$u_n = 2^{n-1}(u_1 + 1) - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

5. Observe que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} \\ \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Deduzca una ley general y demúestrela por inducción.

6. Pruebe que $n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+p-1)$ es divisible por p, para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

7. Pruebe que $\frac{(n+2)!}{n!} = n^2 + 3n + 2$.

8. Probar que para todo n natural se tiene

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

9. Calcule y simplifique

   a) $(2x^3 + \frac{1}{x^2})^3$
   b) $(y^4 - \frac{1}{y^5})^2$
   c) $(2a + 5b)^8$
   c) $(3a - \frac{1}{a})^5$

10. Calcular

   a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$
   b) $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}$
   c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^{i+1}$
   d) $\sum_{i=0}^{423} \binom{423}{i}$
   e) $\sum_{i=0}^{1012} \binom{1012}{i}(-1)^i$
   d) $\sum_{i=0}^{2013} 6\binom{2013}{i} 3^i$

11. Encuentre los términos centrales y los términos independientes de x (cuando se pueda).

   a) $(3x - \frac{6}{x})^{10}$
   b) $(\frac{4x}{5} - \frac{5}{2x})^5$
   c) $(\sqrt{10 - x} + \sqrt{20 - x})^{24}$