Pauta control 1 de Matemáticas I

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Viernes 27 de Septiembre, 2013

Tiempo: 15 minutos.

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Demuestre por contradicción que la siguiente proposición es verdadera

   "Si n es un número natural y $5n^2 + 3$ es par, entonces n es impar".

   Si en la proposición cambiamos número natural por número real, seguiría siendo ésta cierta?

   Solución:

$$\begin{aligned} \textit{Hipótesis} &: \ n \text{ es un número natural y } 5n^2+3 \text{ es par.} \\ \textit{Por demostrar:} &: \ n \text{ es un número impar.} \end{aligned}$$

   Para demostrar por contradicción supongamos que n es un número par, es decir, $n = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$5n^2 + 3 = 5(2k)^2 + 3 = 20k^2 + 3 = 20k^3 + 2 + 1 = 2(10k^2 + 1) + 1, \quad \text{con } 10k^2 + 1 \in \mathbb{Z}.$$

   Es decir, $5n^2 + 3$ es un número impar, lo cual es imposible por hipótesis.

$$\therefore n \text{ es un número impar.}$$

Ahora, si en la proposición cambiamos número natural por número real ésta no seguiría siendo cierta, pues si consideramos $n = \sqrt{3}$, entonces la hipótesis será cierta pero la conclusión falsa.

2. Considere las siguientes funciones proposicionales, dependiendo de un número real x:

$$\begin{aligned} p(x) &: x - 2 > 0. \\ q(x) &: x^2 \geq 5. \\ r(x) &: x + 10 > 0. \end{aligned}$$

Decida si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, si son ciertas demuéstrelas, en el caso contrario encuentre un contraejemplo.

(a) $p(x) \Rightarrow q(x)$.

(b) $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\neg p(x) \vee r(x)$.

Solución:

(a) Falsa, pues para $x = 2,1$ se tiene que $p(x)$ es verdadera y $q(x)$ es falsa.

(b) Verdadera, pues si tomamos cualquier $x \in \mathbb{R}$ se cumplirá:

i. $x \leq 2$, en tal caso $\neg p(x)$ es verdadero, es decir, se cumple $\neg p(x) \vee r(x)$.

ii. $x < 2$, en tal caso $r(x)$ es verdadera, es decir, se cumple $\neg p(x) \vee r(x)$.