

Capítulo 2

Conjuntos

En este capítulo introduciremos el lenguaje de los conjuntos y estudiaremos sus propiedades haciendo uso de las herramientas de la lógica vistas en el capítulo 1. Enunciaremos las propiedades fundamentales de las operaciones entre conjuntos que constituyen lo que se conoce como **álgebra Booleana** en honor al matemático irlandés George Boole (1815-1864) quien las introdujo en sus estudios de lógica. Pero fué a comienzos del siglo XX con los trabajos del matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) cuando se inició el estudio sistemático de los conjuntos. Así que una parte importante de las matemáticas se desarrolló sin hacer uso de ellos. Sin embargo, hoy en día son imprescindibles. Se puede decir, sin exagerar, que todas las teorías matemáticas se pueden expresar en términos de la noción de conjunto.

En este capítulo comenzaremos a hacer *demostraciones*. Demostrar es una forma muy especial de justificar una afirmación. En una demostración se debe dar un razonamiento lógicamente correcto que tenga como conclusión la afirmación en cuestión. Las demostraciones son similares a las deducciones que estudiáramos en la sección 1.2.2. En matemáticas las afirmaciones, para ser consideradas válidas, deben ser demostradas. Está fuera de los objetivos de este texto el dar una definición precisa de esta noción, sin embargo al final de este capítulo haremos una aproximación a una definición de la noción de demostración en matemáticas. Esperamos que los numerosos ejemplos de demostraciones que veremos le den una idea al lector de cómo hacerlas.

2.1. Nociones básicas

Un conjunto es una colección de objetos. Usaremos letras mayúsculas como A , B , X para denotar conjuntos y letras minúsculas como a , b , c , x para denotar los objetos. Un objeto a que pertenece a un conjunto X se dice que es un **miembro** o **elemento** de X . Escribiremos $a \in X$ para indicar que a es un elemento del conjunto X . En caso que a no pertenezca a X escribiremos $a \notin X$. La expresión $a \in X$ puede leerse de varias maneras equivalentes: *a pertenece a X*, *a es un elemento de X*, *a está en X*.

2.1.1. Definiciones por comprensión y por extensión

Comenzaremos esta sección presentando algunos ejemplos de conjuntos.

Ejemplos 2.1. 1. Consideremos el conjunto formado por los números 1,2,3 y 4. Denotaremos este conjunto con el símbolo

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

Las llaves $\{ \}$ se usarán siempre en las definiciones de conjuntos. Es indiferente el orden en que se escriban los elementos de un conjunto. El conjunto anterior es igual a

$$\{3, 1, 4, 2\}.$$

Cuando un conjunto se define dando la lista completa de todos sus miembros decimos que el conjunto está definido por **extensión**.

2. En muchos casos no es posible o no es fácil dar la lista completa de todos los elementos de un conjunto, en su lugar se da una propiedad que satisfacen única y exclusivamente los elementos del conjunto. Por ejemplo, consideremos el conjunto formado por todos los números naturales que dividen a 2346. Denotemos con la letra A este conjunto. Si quisiéramos, podríamos dar la lista completa de todos los elementos de A , pero nos tomaría mucho tiempo hacerlo. Por ejemplo $2 \in A$, $6 \in A$, $7 \notin A$, $\frac{1}{4} \notin A$. Podemos expresar la definición de A de la manera siguiente

$$A = \{n : n \text{ es un número natural que divide a } 2346\}.$$

Este tipo de definiciones, muy frecuentes en matemáticas, se llaman definiciones por **comprensión**. Todas ellas tienen la siguiente forma

$$\{ : \}.$$

Antes de los dos puntos $:$ (que se leen *tal que*) se coloca una variable (por ejemplo n , x) que denota los objetos que forman al conjunto que estamos definiendo. Después de los dos puntos se escribe la propiedad que satisfacen única y exclusivamente los objetos que pertenecen al conjunto en cuestión.

3. Consideremos el conjunto de todos los números naturales que al dividirlos por 5 dan resto 2. Denotemos este conjunto con la letra A . Podemos verificar fácilmente que $7 \in A$ y $8 \notin A$. Si alguien nos dice un número podemos, después de algunos cálculos sencillos, determinar si el número en cuestión pertenece o no al conjunto A . Sin embargo, no podemos dar la lista completa de los elementos de A pues es infinita. Podemos expresar la definición de A de la manera siguiente

$$A = \{n : n \text{ es un número natural que al dividirlo por 5 da resto } 2\}.$$

Más adelante veremos otros ejemplos similares.

□

Algunos conjuntos en matemáticas aparecen con tanta frecuencia y son de tal importancia que han recibido una notación especial. Veamos algunos de ellos: El conjunto de los **números naturales** se denota con el símbolo $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

El conjunto de los **números enteros**

$$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

que está formado por los números naturales junto con sus opuestos y lo denotamos con $\mathbb{Z}$. El conjunto de los **números racionales**, denotado con el símbolo $\mathbb{Q}$, consiste de los números fraccionarios, es decir, de las expresiones de la forma $\frac{n}{m}$ donde n y m son enteros y m es distinto de cero. Por ejemplo, los siguientes números son racionales

$$\frac{1}{2}, \frac{35}{6}, -\frac{3}{5}, \frac{12}{55}, \frac{3}{7}.$$

Los números racionales contienen a todos los enteros, pues la fracción de la forma $\frac{n}{1}$ representa al entero n . Por ejemplo, $\frac{2}{1}$ es el número 2 y $\frac{-5}{1}$ es el -5 .

Los **números reales** se representan con expresiones decimales finitas e infinitas de la forma

$$3,141592653589\dots \quad 1,414213562373095\dots$$

(por cierto, el primero es una aproximación del famoso número π que corresponde a la mitad de la longitud de una circunferencia de radio 1 y el segundo es una aproximación de $\sqrt{2}$). El conjunto de los números reales se denota por $\mathbb{R}$.

Teniendo estos conjuntos a nuestra disposición, ahora es más fácil definir otros conjuntos por comprensión.

Ejemplos 2.2. 1. El orden de los números enteros lo denotamos con el símbolo $<$. La expresión $n < m$ se lee “ n es menor que m ”. También escribiremos $m > n$ para indicar lo mismo que $n < m$. En general, también usará el símbolo $<$ para el orden entre los números reales. El símbolo $\leq$ se lee “*menor o igual que*”. Por ejemplo $n \leq m$ indica que n es menor que m o que n es igual a m . Esto también se escribe $m \geq n$.

Podemos usar $<$ para definir conjuntos. Por ejemplo:

$$\{m : m \in \mathbb{Z} \text{ y } -4 < m\}$$

que consiste de todos los enteros mayores que -4 . Observe que después de los dos puntos se escribe la condición que deben tener los elementos del conjunto que estamos definiendo. En este caso, pedimos dos condiciones: que sean enteros y que sean mayores que -4 .

2. Consideremos el siguiente conjunto

$$\{m : m \in \mathbb{Q} \text{ y } -4 < m\}.$$

Notemos la similitud de esta definición con la que aparece en el ejemplo anterior. Sin embargo, estos dos conjuntos no son iguales, pues $\frac{-7}{2}$ pertenece al que acabamos de definir pero no pertenece al que definimos en el ejemplo anterior (¿por qué?).

3. También es común usar la siguiente notación

$$\{m \in \mathbb{Z} : -4 < m\}$$

que de inmediato le indica al lector el tipo de objetos que forman el conjunto que se define, en este caso, el conjunto contiene sólo números enteros. Es importante que el lector comprenda que estas dos formas de describir los conjuntos son equivalentes. Es decir,

$$\{m : m \in \mathbb{Z} \text{ y } -4 < m\} = \{m \in \mathbb{Z} : -4 < m\}.$$

4. En general la forma de definir conjuntos por comprensión es la siguiente: Tenemos un conjunto X y una propiedad P . Definimos otro conjunto como sigue

$$\{x \in X : x \text{ tiene la propiedad } P\}.$$

Es decir, la definición por comprensión consiste en separar una parte del conjunto X por medio de una propiedad: La parte de X que contiene exactamente todos los elementos de X con la propiedad en cuestión.

5. El siguiente es otro ejemplo de un conjunto definido por comprensión

$$\{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x < 8\}.$$

En este caso es fácil dar una lista completa de sus elementos

$$\{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

6. Recuerde que es irrelevante la letra usada para la variable en las definiciones por comprensión. Por ejemplo

$$\{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x < 8\} = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n < 8\}.$$

□

Ejemplo 2.3. Considere el siguiente conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x = n^2 - n \text{ para algún } n \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

El conjunto A está definido por comprensión. Sin embargo, en este caso podemos también dar una descripción de A por extensión, es decir, podemos dar una lista completa de todos sus elementos:

n	$n^2 - n$
1	0
2	2
3	6
4	12

En resumen, tenemos que

$$A = \{0, 2, 6, 12\}.$$

Note que la frase “*para algún $n \in \{1, 2, 3, 4\}$* ” indica que la variable n puede tomar cualquiera de los valores 1, 2, 3 o 4 y además, para hacer la lista completa de los elementos de A , debemos considerar todas esas alternativas.

□

El primer conjunto definido en los ejemplos 2.2 también suele representarse de la siguiente manera

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Los 3 puntos $\dots$ es la manera de decir *etcétera* en matemáticas. El contexto debe aclarar el significado de $\dots$. Es importante tener presente que este tipo de notación para conjuntos es algo ambigua, pues presupone que el lector es capaz de inferir los otros elementos del conjunto.

Ilustraremos ahora otra manera de presentar los conjuntos definidos por comprensión. Considere el conjunto X de todos los números naturales que son el cuadrado de algún natural. Podemos expresar la definición de X de la siguiente forma:

$$X = \{n \in \mathbb{N} : n = m^2 \text{ para algún número natural } m\}.$$

Por ejemplo tenemos que $4 \in X$, $6 \notin X$, $9 \in X$, $7 \notin X$. Sin embargo, es más frecuente usar la siguiente notación para describir al conjunto X

$$X = \{m^2 : m \in \mathbb{N}\}.$$

Queremos resaltar que estas dos maneras de describir la colección de todos los cuadrados de números naturales son equivalentes, es decir,

$$\{n \in \mathbb{N} : n = m^2 \text{ para algún número natural } m\} = \{m^2 : m \in \mathbb{N}\}.$$

La ventaja que tiene la segunda descripción, aparte de ser más corta, es que ella señala explícitamente el procedimiento que debemos seguir para obtener todos los elementos del conjunto. En nuestro ejemplo, el procedimiento consiste en tomar el cuadrado de los números naturales. Podemos también describir al conjunto X usando la notación ambigua que mencionamos anteriormente

$$\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \dots\}.$$

Con esta notación ambigua uno espera que el lector adivine cuál es el procedimiento que debe seguirse para obtener todos los elementos del conjunto.

Veamos otros ejemplos que usaremos con frecuencia.

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\} \quad \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\}.$$

El lector seguramente reconoció que el primero es el conjunto de los números naturales **pares** y el segundo es el de los números **impares**. Si quisiéramos evitar la ambigüedad de los $\dots$ podemos describir estos conjuntos de la manera siguiente:

$$\{2n : n \in \mathbb{N}\} \quad \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

A veces se usa o mas bién se abusa del símbolo de igualdad y se describen conjuntos de la siguiente manera

$$\{2n : n = 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Esta notación quiere indicar que la variable n puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 ó 4. Tenemos entonces que

$$\{2n : n = 0, 1, 2, 3, 4\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Ejemplo 2.4. Considere el siguiente conjunto

$$A = \{6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, \dots\}$$

Lo que observamos de los elementos que nos dan de A es que la diferencia entre dos consecutivos es 4. Por lo tanto entre el primero 6 y el tercero 14 la diferencia es de $2 \cdot 4$. Esto sugiere lo siguiente:

$$A = \{4n + 2 : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 1\}$$

Insistimos que la última descripción del conjunto A es mejor que la primera.

2.1.2. Igualdad de conjuntos.

Hemos usado el símbolo de igualdad entre conjuntos de manera intuitiva: dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos. El concepto de igualdad de conjuntos es muy simple pero sumamente importante en matemáticas y por esta razón lo resaltamos a continuación.

Definición 2.5. *Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Es decir $A = B$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- (i) *Todo elemento de A también pertenece a B .*
- (ii) *Todo elemento de B también pertenece a A .*

Dos conjuntos A y B no son iguales si existe un elemento de A que no pertenece a B ó si existe algún elemento de B que no pertenece a A . Por ejemplo, si A es el conjunto $\{1, 4, 5\}$ y B es el conjunto $\{4, 5\}$ entonces $A \neq B$, pues $1 \in A$ pero $1 \notin B$. Cuando dos conjuntos no son iguales escribimos $A \neq B$.

Ejemplos 2.6. 1. Considere los conjuntos A y B definidos a continuación

$$\begin{aligned} A &= \{2n^3 : n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq n \leq 3\} \\ B &= \{2, 0, 16, 54\} \end{aligned}$$

Queremos saber si A es igual a B . Por la forma en que A está definido, podemos dar una lista completa de sus elementos como lo hicimos en el ejemplo 2.3. Tenemos que

$$A = \{0, 2, 16, 54\}$$

Como A y B contienen los mismos elementos, entonces son iguales.

2. Considere ahora los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}A &= \{1, 2\} \\ B &= \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

Por inspección se obtiene que $3 \in B$, pero $3 \notin A$. En consecuencia, $A \neq B$.

Observe que para mostrar que dos conjuntos no son iguales basta conseguir un elemento de uno de ellos que no pertenece al otro conjunto.

2.1.3. El conjunto vacío

Ahora introduciremos un conjunto muy especial. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}\{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 2\} & \qquad \{r \in \mathbb{R} : r^2 < 0\} \\ \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ y } q > 7\} & \qquad \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}\end{aligned}$$

Estos cuatro conjuntos tienen una propiedad en común: no contienen elementos. Así que todos ellos son iguales (nótese que cada par de ellos satisfacen la definición de igualdad de conjuntos dada en la definición 2.5). Al conjunto que no tiene elementos se le llama **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$.

El conjunto vacío pudiera parecer inútil, pero no lo es. El juega un papel tan importante en la teoría de conjuntos como lo hace el número cero en la aritmética.

2.1.4. Subconjuntos

Otro concepto que está muy relacionado con la igualdad de conjuntos es el de subconjunto.

Definición 2.7. Sean A y B dos conjuntos, diremos que A es un **subconjunto** de B y escribiremos $A \subseteq B$ si todo elemento de A también pertenece a B .

Simbólicamente, $A \subseteq B$ si para todo $x \in A$, se cumple que $x \in B$.

Ejemplos 2.8. 1. Por inspección se verifica que $\{1, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Ya sabemos que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

3. Considere los conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n(n-1)(n-2) = 0\}$$

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Para determinar si $A \subseteq B$ ó $B \subseteq A$ debemos primero conocer los elementos de A . Por simple inspección vemos que $0 \in A$, $1 \in A$ y $2 \in A$ ¿habrán otros? Para que un número natural n pertenezca a A debe satisfacer la ecuación

$$n(n-1)(n-2) = 0.$$

Recordemos que el producto de varios enteros es igual a cero sólo cuando alguno de ellos es igual a cero. De esto obtenemos que $n(n-1)(n-2) = 0$, sólo si $n = 0$, $n-1 = 0$ ó $n-2 = 0$. Por lo tanto los únicos elementos de A son 0, 1 y 2, es decir $A = \{0, 1, 2\}$. Ahora es fácil verificar que $A \subseteq B$.

Por otra parte, como $4 \in B$ y $4 \notin A$, entonces B no es un subconjunto de A . Esto usualmente se escribe

$$B \not\subseteq A.$$

□

La relación de subconjunto satisface lo siguiente:

Para cualquier conjunto A :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \subseteq & A \\ A & \subseteq & A \end{array}$$

¿Puede el lector justificar estas afirmaciones?

Observemos que dos conjuntos A y B son iguales si se cumple que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Este hecho simple lo usaremos repetidamente y por esta razón lo resaltamos a continuación

Para mostrar que dos conjuntos A y B son iguales, es suficiente mostrar que

$$A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A$$

2.1.5. El conjunto potencia

Podemos formar conjuntos cuyos elementos sean a su vez conjuntos. Por ejemplo,

$$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 3, 6\}\}$$

es un conjunto con tres elementos: $\{1\}$, $\{2, 3\}$ y $\{1, 3, 6\}$. Otro ejemplo es $\{\emptyset\}$ cuyo único elemento es $\emptyset$. Observemos que $\emptyset \in \{\emptyset\}$ y como $\emptyset$ no contiene elementos, entonces tenemos que $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

El conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto dado A se llama el **conjunto potencia** o **conjunto de partes** de A y lo denotamos por $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Notemos que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y también que $A \in \mathcal{P}(A)$ para cualquier conjunto A .

Ejemplos 2.9. 1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2. Consideremos el conjunto $\{1\}$. Los subconjuntos de $\{1\}$ son $\emptyset$ y $\{1\}$. Por esto

$$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}.$$

En general, si un conjunto A tiene un sólo elemento, digamos por ejemplo $A = \{a\}$, entonces los subconjuntos de A son $\emptyset$ y $\{a\}$. Es decir,

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

3. Si $A = \{1, 2\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$.

4. Considere ahora los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{P}(\{1, 2\}) \\ Y &= \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \end{aligned}$$

Por inspección se obtiene que $\{3\} \in Y$, pero $\{3\} \notin X$, pues $\{3\} \not\subseteq \{1, 2\}$. En consecuencia, $X \neq Y$.

5. Si A tiene 3 elementos, digamos que $A = \{a, b, c\}$, entonces

$$\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}.$$

6. Notemos que $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ tiene 2^3 elementos. Un resultado general, que se verá más adelante, dice que si A tiene n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos. Por ejemplo, $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ tiene 2^5 elementos.

7. Podemos repetir la operación de tomar el conjunto potencia. Por ejemplo, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$. Para calcular todos sus elementos recordemos que $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Por esto

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \emptyset\}$$

Observe que este conjunto tiene 2^{2^1} elementos.

8. El tamaño de los conjuntos obtenidos al tomar repetidamente el conjunto potencia crece con mucha rapidez. Por ejemplo,

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\})))$$

tiene $2^{2^2} = 2^{16} = 65.536$ elementos. Si aplicamos una vez más la operación de tomar el conjunto potencia, tenemos

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))))$$

Este conjunto tiene $2^{2^{2^2}} = 2^{2^{16}} = 2^{65536}$. Intente el lector calcular este número (necesitará varias páginas para escribirlo).

□

Ejemplo 2.10. Le recomendamos al lector que preste especial atención al uso de los símbolos de pertenencia, $\in$, y de inclusión, $\subseteq$. Con cierta frecuencia lo estudiantes al comienzo no los usan correctamente. Por ejemplo, suponga que $A \subseteq \mathbb{N}$, las siguiente expresiones son equivalentes:

$$3 \in A \text{ y } \{3\} \subseteq A.$$

Pero no tiene sentido decir que $3 \subseteq A$.

En general, observe que decir que $x \in A$ es equivalente a decir que $\{x\} \subseteq A$. Pero puede ocurrir que no tenga ningún sentido escribir $x \subseteq A$.

2.1.6. Las operaciones elementales

Comenzaremos definiendo la unión y la intersección.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x : x \in A \text{ ó } x \in B\} \\ A \cap B &= \{x : x \in A \text{ y } x \in B\} \end{aligned}$$

Observemos que para cualquier par de conjuntos A y B se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq A \\ A &\subseteq A \cup B. \end{aligned}$$

Dados dos conjuntos A, B la **diferencia** de A menos B , denotada por $A \setminus B$, se define de la siguiente manera

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ahora usaremos estas operaciones para definir otra. La **diferencia simétrica**, denotada por $A \Delta B$, se define de la siguiente manera

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Observe que x pertenece a $A \Delta B$ cuando ocurre que $x \in A$ ó $x \in B$ pero no ocurre que x pertenezca a ambos conjuntos A y B . En algunos textos se usa el símbolo $\oplus$ para denotar la diferencia simétrica.

Veamos ejemplos de todas las operaciones que hemos definido.

Ejemplo 2.11. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 7\}$, $B = \{2n : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 8\}$ y $C = \{n : n \in \mathbb{N} \text{ y } n \text{ es par}\}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16\} \\ A \cap B &= \{0, 2, 4, 6\} \\ A \setminus B &= \{1, 3, 5, 7\} \\ B \setminus A &= \{8, 10, 12, 14, 16\} \\ A \Delta B &= \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16\} \\ B \setminus C &= \emptyset \\ C \setminus B &= \{2n : n > 8 \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \\ B \Delta C &= \{2n : n > 8 \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \\ A \cap C &= \{0, 2, 4, 6\} \\ A \Delta C &= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2n : n \geq 4 \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.12. Imagínese la siguiente situación. Sobre una mesa hay 6 objetos dorados marcados con las letras a, b, c, d, e y f . Hay cuatro personas A, B, C y D que deben determinar cuales de esos objetos son realmente de oro y cuales son imitaciones. La elección de cada persona la expresaremos por un conjunto que contiene las letras correspondientes a los objetos que la persona considera son de oro.

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, e, f\} & B &= \{a, b, c, d, e\} \\ C &= \{d\} & D &= \{e, f\} \end{aligned}$$

Ahora bien, los objetos realmente de oro son a y f . ¿Quién de las cuatro personas se acercó más a la respuesta correcta? Si sólo nos interesara saber quienes eligieron los objetos correctos tenemos que A sería el que se acercó más a la respuesta. Sin embargo, si también queremos incluir la información adicional sobre los objetos incorrectos que cada persona eligió, entonces debemos escoger a D . Pues D mostró tener mejor criterio que A , ya que eligió uno sólo de los objetos de oro y además eligió sólo uno incorrecto. Por otro lado, A eligió 3 objetos incorrectos, C eligió solamente un objeto incorrecto, pero no eligió ninguno correcto.

Veamos la diferencia simétrica de los conjuntos A, B, C y D con la respuesta correcta $\{a, f\}$

$$\begin{aligned} A \Delta \{a, f\} &= \{b, c, e\} & B \Delta \{a, f\} &= \{b, c, d, e, f\} \\ C \Delta \{a, f\} &= \{a, d, f\} & D \Delta \{a, f\} &= \{a, e\} \end{aligned}$$

Con este ejemplo vemos que la operación de diferencia simétrica nos permite estimar qué tan parecidos son dos conjuntos. El número de elementos que tiene la diferencia simétrica entre la respuesta de cada persona y la respuesta correcta provee de un criterio para decidir cuál de las personas es la ganadora. En nuestro caso vemos que $D \Delta \{a, f\}$ tiene el menor número de elementos, por esta razón podemos decir que D es quien mostró poseer el mejor criterio.

□

Nuestro próximo ejemplo ilustra cómo se puede mostrar una propiedad general sobre las operaciones sobre conjuntos. El lector debería prestarle bastante atención a este ejemplo, pues el método usado en él se repetirá con frecuencia en todo el curso.

Ejemplo 2.13. Sean A y B conjuntos cualesquiera. Mostraremos que

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B). \quad (2.1)$$

Por dicho en la sección 2.1.4 basta mostrar las siguientes afirmaciones:

$$A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B) \quad (2.2)$$

y

$$A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B. \quad (2.3)$$

Veamos la primera afirmación. Lo que deseamos hacer es mostrar que cualquier elemento de $A \setminus B$ también pertenece a $A \setminus (A \cap B)$. Para hacerlo, denotemos con x un elemento cualquiera de $A \setminus B$. Entonces, por definición de la diferencia, se tiene que $x \in A$ y $x \notin B$. Por lo tanto, también se tiene que $x \notin A \cap B$. Como x se tomó en A , hemos mostrado que $x \in A \setminus (A \cap B)$. Ya que x representa un elemento *cualquiera* de $A \setminus B$, podemos concluir que $A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B)$.

La segunda afirmación se trata de manera análoga. Tomemos un elemento cualquiera x en $A \setminus (A \cap B)$. Entonces, por definición de la diferencia, se tiene que $x \in A$ y $x \notin A \cap B$. Por lo tanto, se tiene que $x \notin B$ (pues, si no fuera así, entonces $x \in A \cap B$ lo que no puede ser). Como x se tomó en A , hemos mostrado que $x \in A \setminus B$. Ya que x representa un elemento *cualquiera* de $A \setminus (A \cap B)$, podemos concluir que $A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B$.

Lo dicho hasta ahora es una justificación precisa de que las afirmaciones (2.2) y (2.3) son válidas. En otras palabras, los conjuntos $A \setminus B$ y $A \setminus (A \cap B)$ tienen los mismos elementos. Es decir, la afirmación (2.1) es válida.

Este tipo de justificaciones *precisas y apropiadas* es lo que llamamos **rigor matemático** y es la característica principal de las demostraciones en matemáticas.

□

Los problemas en matemáticas generalmente tratan sobre las propiedades de algún conjunto particular, por ejemplo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. El conjunto en cuestión usualmente se denomina **universo** o **conjunto universal**. En relación a un conjunto universal U prefijado se define el **complemento** de un subconjunto $A \subseteq U$, denotado por A^c , de la siguiente manera

$$A^c = U \setminus A.$$

Esta notación es un poco ambigua pues A^c depende obviamente del conjunto U que se use. Tendremos el cuidado de que cada vez que usemos la operación de complementación el conjunto universal U esté claramente especificado.

Ejemplo 2.14. Supongamos que nuestro universo son los números naturales y sea A el conjunto de números pares, es decir, $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ y $U = \mathbb{N}$. Entonces tenemos que A^c es el conjunto de números impares, pues

$$\mathbb{N} \setminus A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora bien, si nuestro universo hubiese sido el de todos los números enteros, es decir $U = \mathbb{Z}$, entonces tendríamos que

$$A^c = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq -1\} \cup \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

□

Ejemplo 2.15. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es divisible por } 3\}$. Y sea $B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ no es divisible por } 3\}$. Si nuestro universo es $\mathbb{N}$, entonces $A = B^c$ y $B = A^c$. □

Otra noción que se usa con frecuencia es la siguiente. Diremos que dos conjuntos son **disjuntos** si no tienen elementos en común. En símbolos, los conjuntos A y B son disjuntos, si $A \cap B = \emptyset$. Un ejemplo de dos conjuntos disjuntos son el conjunto de los números pares y el de números impares. Veamos un ejemplo. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}.$$

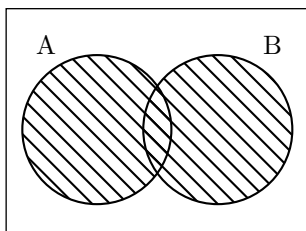
El lector debe convencerse que A y B son disjuntos.

Otro ejemplo de conjuntos disjuntos es el siguiente. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, entonces A y $B \setminus A$ son disjuntos. En símbolos:

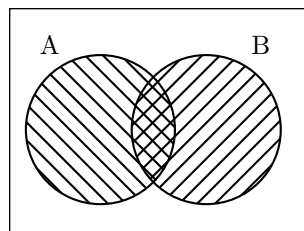
$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

2.1.7. Diagramas de Venn

Una manera de representar las operaciones entre conjuntos es a través de los **diagramas de Venn**. A continuación presentaremos los diagramas correspondientes a las operaciones de unión e intersección:

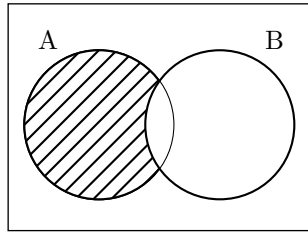


$A \cup B$

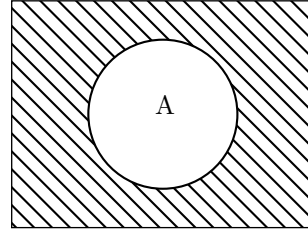


$A \cap B$

Los diagramas correspondientes a las operaciones de diferencia y complementación son los siguientes:



$A \setminus B$

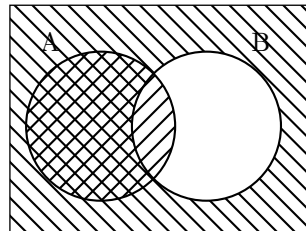


A^c

Observemos que usando la operación de complementación podemos describir la diferencia de dos conjuntos de la manera siguiente: Suponga que A y B son subconjuntos de un conjunto universal U , entonces

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

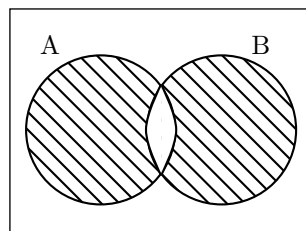
Esto lo podemos verificar fácilmente usando diagramas de Venn. Haremos un diagrama de Venn que represente $A \cap B^c$ y lo compararemos con el que hicimos arriba para $A \setminus B$.



$A \cap B^c$

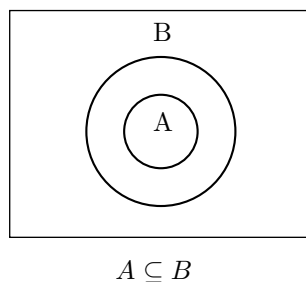
Vemos que ambos diagramas determinan el mismo conjunto. De lo anterior obtenemos otra forma de expresar la diferencia simétrica

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

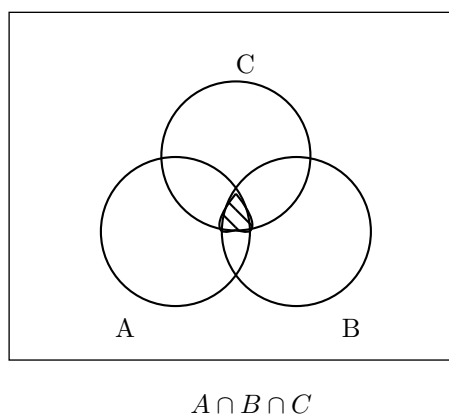


$A \Delta B$

El siguiente diagrama indica la relación de subconjunto



Por último, también podemos representar 3 conjuntos usando diagramas de Venn. Por ejemplo la intersección de tres conjuntos A , B y C se representa de la manera siguiente.



Ejercicios 2.1

1. Dé una lista completa de los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
 - a) $\{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x < 9\}$
 - b) $\{1/n^2 : n \in \mathbb{N}, n \text{ es par y } 0 < n < 11\}$
 - c) $\{z \in \mathbb{Q} : 0 \leq z^2 \leq 10 \text{ y } z^3 \in \mathbb{N}\}$
 - d) $\{x \in \mathbb{Z} : x = n^2 - n^3 \text{ para algún } n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$
 - e) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$
2. Lea cuidadosamente lo dicho en los ejemplos 2.2 y determine si las siguientes definiciones son correctas. En caso que lo sea, halle dos elementos del conjunto y en caso que no sea correcta justifique porqué no lo es.

- a) $A = \{n \in \mathbb{N} : 3n + 2\}$
- b) $A = \{3n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$
- c) $A = \{x \in \mathbb{Q} : y + 1 \geq 6\}$
- d) $A = \{z \in \mathbb{Q} : z = y + 1 \text{ para algún } y \in \mathbb{Q} \text{ con } y \geq 6\}$
- e) $A = \{2x + 1 \in \mathbb{Q} : x \leq 6\}$.
- f) $A = \{y : y \in \mathbb{R}\}$.

3. Halle 6 elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

- (i) $\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$
- (ii) $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$
- (iii) $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$
- (iv) $\{n^3 - 4 : n \in \mathbb{Z}\}$
- (v) $\{1 - n^2 : n \in \mathbb{Z}\}$
- (vi) $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$
- (vii) $\{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < 1\}$
- (viii) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$

4. Determine si los conjuntos A y B son iguales (revise lo hecho en los ejemplos 2.6):

- a) $A = \{2n^2 : n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq n \leq 3\}$
 $B = \{2, 0, 8, 18\}$
- b) $A = \{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N} \text{ y } 0 \leq n \leq 3\}$
 $B = \{x \in \mathbb{Q} : x = n^2 + 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{Q} \text{ con } 0 \leq n \leq 3\}$
- c) $A = \{n \in \mathbb{N} : n + 1 \geq 2\}$
 $B = \{n \in \mathbb{Z} : n + 1 \geq 2\}$
- d) $A = \{n \in \mathbb{N} : 3 \leq n \leq 6\}$
 $B = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ y } 3 \leq x \leq 6\}$
- e) $A = \{n \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\}$
 $B = \{n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Q}\}$
- f) $A = \mathcal{P}(\{1, 2\})$
 $B = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) : 3 \notin X\}$
- g) $A = \{\emptyset\}$ y $B = \emptyset$
- h) $A = \{\emptyset\}$ y $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- i) $A = \{\{\emptyset\}\}$ y $B = \{\emptyset\}$.

5. Considere los conjuntos

$$\begin{array}{ll} A = \{n : n = 0, 1, 2, 3, 4\} & B = \{4n + 1 : n = 0, 1, 2, 3\} \\ C = \{n^2 : n = 1, 2, 3\} & D = \{0, 2, 4\} \end{array}$$

¿Cuál es subconjunto de cuál? Considere las dieciséis posibilidades.

6. Considere los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} & B &= \{4n + 1 : n \in \mathbb{N}\} \\ C &= \{n^2 + 1 : n \in \mathbb{N}\} & D &= \{2n : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

¿Cuál es subconjunto de cuál? Considere las dieciséis posibilidades.

7. Para cada uno de los siguientes conjuntos halle una propiedad que sirva para definirlos por comprensión:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\} & \text{(ii)} & \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, \dots\} \\ \text{(iii)} & \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\} & \text{(iv)} & \{0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots\} \\ \text{(v)} & \{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\} & \text{(vi)} & \{7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \dots\} \\ \text{(vii)} & \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, \dots\} & \text{(viii)} & \{0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots\} \end{array}$$

8. Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$, $D = \{2, 4, 8\}$. Determine por extensión los siguientes conjuntos. En las partes (iii) y (ix) considere primero que el conjunto universal U es

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

y después resuelva las preguntas (iii) y (ix) usando como conjunto universal a $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & A \cup B & \text{(ii)} & A \cap C & \text{(iii)} & (A \cup B) \cap (C^c \cup D) \\ \text{(iv)} & A \setminus B & \text{(v)} & C \setminus D & \text{(vi)} & B \triangle D \\ \text{(vii)} & (A \cap C) \cup B & \text{(viii)} & (A \cup C) \cap B & \text{(ix)} & (B^c \triangle D^c) \triangle A^c \end{array}$$

9. a) Muestre que $\{1, 3\} \triangle \{2\} \neq \{3, 4\}$.

b) Halle un subconjunto C de $\{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\{1, 3\} \triangle C = \{3, 4\}$.

10. Sea A un conjunto. Muestre que $A \triangle A = \emptyset$ y $A \triangle \emptyset = A$.

11. Muestre que A y A^c son disjuntos.

12. Exprese los siguientes enunciados usando las operaciones elementales entre conjuntos.

a) Todos los elementos de A están en B o están en C .

b) Si un elemento de A está en C , entonces también está en B .

c) Los elementos de A y los de B están en C .

d) Todo elemento de A o de B pertenece a C o a D .

13. a) Haga el diagrama de Venn de los siguientes conjuntos: $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$.

b) Halle tres conjuntos A , B y C no vacíos tales que

$$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$$

y halle también tres conjuntos D , E y F tales que

$$(D \cup E) \cap F = D \cup (E \cap F).$$

(Sugerencia: No busque ejemplos complicados, todos los conjuntos pueden ser subconjuntos de $\mathbb{N}$).

14. a) Haga el diagrama de Venn de los siguientes conjuntos: $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
 b) Use los diagramas anteriores para convencerse que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

15. De manera similar a como se hizo en el ejemplo 2.13 justifique las siguientes afirmaciones:

- a) $A \subseteq A \cup B$
 b) $A \cap B \subseteq A \cup B$

para cualquier par de conjuntos A y B .

16. De manera similar a como se hizo en el ejemplo 2.13, justifique las siguientes afirmaciones:

- a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.
 b) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.
 c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
 d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

17. Las siguientes afirmaciones son falsas. Proporcione conjuntos A , B y C que no cumplan con lo expresado.

- a) $A \cup B = A \cap B$.
 b) $A \cap B = A \Delta B$.
 c) $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup B$.
 d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.
 e) $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$.
 f) $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$.

2.2. La lógica y las operaciones sobre conjuntos

En esta sección presentaremos algunas analogías entre los operadores o conectivos lógicos y las operaciones sobre conjuntos. Mas adelante, en la sección 2.4, continuaremos con este tema.

Las operaciones sobre conjuntos y los conectivos de la lógica proposicional son similares. En la tabla que sigue señalamos la analogía existente entre ambas

$A \cap B$	$p \wedge q$
$A \cup B$	$p \vee q$
A^c	$\neg p$

Todas las expresiones que involucran la relación de pertenencia $\in$ y las operaciones elementales entre conjuntos se traducen en proposiciones lógicas:

$x \in A \cap B$	$x \in A$ y $x \in B$
$x \notin A \cap B$	$x \notin A$ ó $x \notin B$
$x \in A \cup B$	$x \in A$ ó $x \in B$
$x \notin A \cup B$	$x \notin A$ y $x \notin B$
$x \in A^c$	$x \notin A$
$x \notin A^c$	$x \in A$
$x \in A \setminus B$	$x \in A$ y $x \notin B$
$x \notin A \setminus B$	$x \notin A$ ó $x \in B$

Es importante que el lector comprenda y recuerde esta tabla pues es fundamental para trabajar con los conjuntos. En particular, observe el significado de $x \notin A \cap B$ y $x \notin A \cup B$. Como es costumbre en matemáticas, no hemos mencionado el conjunto universal, pues el contexto debe indicarlo.

2.2.1. Cuantificadores

El lenguaje de la lógica proposicional es insuficiente para expresar la mayoría de los resultados de la matemática. Hace falta introducir otros símbolos. Por ejemplo, la noción de subconjunto $A \subseteq B$ se define diciendo que todo elemento de A debe pertenecer a B . La expresión “*todo elemento de*” ocurre con mucha frecuencia en matemáticas y refleja una de sus características más importantes: la posibilidad de mostrar hechos generales sobre los elementos del universo que se esté analizando. El símbolo que se usa para abreviar esa expresión es $\forall$, que se lee “para todo”, y se llama **cuantificador universal**.

Ahora podemos enunciar la definición de la relación de subconjunto usando el cuantificador universal:

$A \subseteq B$	$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
-----------------	--

Otro cuantificador que se usa en lógica es el **cuantificador existencial** que se denota con el símbolo $\exists$ y se lee “existe”. Este cuantificador ocurre, por ejemplo, al expresar que un subconjunto no está contenido en otro. En efecto, si $A \not\subseteq B$, entonces debe existir un elemento que pertenece a A y que no pertenece a B . En símbolos:

$A \not\subseteq B$	$\exists x (x \in A \wedge x \notin B)$
---------------------	---

En la siguiente tabla veremos algunas relaciones entre conjuntos que se expresan usando cuantificadores.

$A \subseteq B$	$\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$
$A \not\subseteq B$	$\exists x (x \in A \wedge x \notin B)$
$A = B$	$\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$
$A \neq B$	$\exists x [(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)]$
$A \cap B \neq \emptyset$	$\exists x (x \in A \wedge x \in B)$
$A \cap B = \emptyset$	$\forall x (x \notin A \vee x \notin B)$

La tabla anterior también sirve para ilustrar cómo se comportan los cuantificadores cuando se niega una expresión que los contiene. *Al negar un cuantificador universal se obtiene uno existencial y, viceversa, al negar un cuantificador existencial se obtiene uno universal.*

$\neg \forall x \psi$	$\exists x \neg \psi$
$\neg \exists x \psi$	$\forall x \neg \psi$

También escribiremos $\nexists$ en lugar de $\neg \exists$.

Ejemplo 2.16. (i) Considere la siguiente fórmula:

$$\neg(\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)).$$

Ella es equivalente a

$$\exists x \neg(x \in A \rightarrow x \in B).$$

Ahora recordemos que $\neg(p \rightarrow q)$ es lógicamente equivalente a $p \wedge \neg q$. Por lo tanto, la fórmula original que estamos simplificando es equivalente a

$$\exists x (x \in A \wedge x \notin B).$$

(ii) Veamos otro ejemplo:

$$\begin{aligned} \neg(\exists x (x \notin A \vee x \in B)) &\Leftrightarrow \forall x \neg(x \notin A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \wedge x \notin B) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.17. Las desigualdades con frecuencia se expresan usando $\forall$. Veamos algunos ejemplos. Todo número real elevado al cuadrado no es negativo. En símbolos:

$$\forall x \in \mathbb{R} (x^2 \geq 0).$$

Todo número natural x cumple que $x < x + 1$. En símbolos:

$$\forall x \in \mathbb{N} (x < x + 1).$$

□

Ejemplos 2.18. También es importante saber cuando una afirmación cuantificada es verdadera o no.

1. Considere la afirmación

$$\forall n \in \mathbb{N} (n^3 < 9) \tag{2.4}$$

Para mostrar que ella no es válida, basta observar que si sustituimos n por 3, obtenemos una proposición falsa. En efecto, $3^3 = 27$ y $27 \not< 9$. El 3 se dice que es un **contraejemplo** de la afirmación (volveremos más adelante sobre este tema de los contraejemplos). ¿Puede conseguir otro contraejemplo?

2. Ahora considere la afirmación

$$\forall x \in \mathbb{R} ((x + 1)^2 \geq x^2).$$

Vemos entonces que $x = -1$ es un contraejemplo (verificarlo) y por lo tanto esa afirmación es falsa.

Dejamos a cargo del lector encontrar otros contraejemplos (¿Puede servir de contraejemplo cualquier número negativo?).

3. Considere la afirmación

$$\exists n \in \mathbb{N} (18 < n^2 + 3 < 20). \tag{2.5}$$

Para ver si ella es verdadera, debemos hallar un natural que satisfaga la condición especificada. Si sustituimos en la expresión $n^2 + 3$ la variable n por los valores 0, 1, 2, 3, 4 obtenemos, respectivamente, 3, 4, 7, 12 y 19. Vemos entonces que al sustituir n por 4, obtenemos la siguiente proposición verdadera “ $18 < 4^2 + 3 < 20$ ”. Por lo tanto, la afirmación (2.5) es verdadera, pues al menos existe un natural n tal que $18 < n^2 + 3 < 20$.

4. Observemos que la negación de la afirmación (2.4) es

$$\exists n \in \mathbb{N} (n^3 \geq 9).$$

Como (2.4) es falsa, entonces su negación es verdadera. En efecto, vimos que $3^3 \geq 9$.

□

Ejemplos 2.19. En cada uno de los siguientes casos queremos hallar conjuntos A y B de números naturales que satisfagan la propiedad indicada.

1. $\exists x \in \mathbb{N} (x \in A \wedge x \in B)$.

Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$. Este par de conjuntos satisfacen la propiedad indicada, pues por ejemplo cuando x es igual a 2 se cumple que $x \in A$ y $x \in B$. ¿Qué podemos decir en general?, en otras palabras, ¿Cuáles pares de conjuntos A y B satisfacen esta propiedad? Veamos:

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N} (x \in A \wedge x \in B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} (x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset \end{aligned}$$

Esto nos dice que cualquier par de conjuntos A y B tales que $A \cap B \neq \emptyset$ satisfacen la propiedad indicada.

2. $\nexists x \in \mathbb{N} (x \in A \wedge x \in B)$.

En este caso basta tomar dos conjuntos disjuntos, por ejemplo, $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5\}$. Tenemos que no existe x tal que $x \in A$ y $x \in B$.

De lo visto en el ejemplo anterior, tenemos que

$$\nexists x \in \mathbb{N} (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

3. $\exists x \in \mathbb{N} (x \in A \vee x \in B)$.

Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4\}$ satisface la propiedad indicada. Pues haciendo x igual a 1 se cumple que $x \in A \vee x \in B$. En otras palabras, 1 es un ejemplo de que existe un x con la propiedad indicada. También 4 sirve como ejemplo. En general tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N} (x \in A \vee x \in B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} (x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow A \cup B \neq \emptyset \end{aligned}$$

Esto nos dice que cualquier par de conjuntos A y B tal que $A \cup B$ no sea vacío es un ejemplo donde la propiedad indicada es verdadera.

4. $\exists x \in \mathbb{N} (x \notin A \wedge x \notin B)$.

Considere $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 5\}$. Entonces haciendo x igual a 6 se tiene que $x \notin A$ y $x \notin B$. En general tenemos que

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N} (x \notin A \wedge x \notin B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} (x \in A^c \wedge x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} (x \in A^c \cap B^c) \\ &\Leftrightarrow A^c \cap B^c \neq \emptyset \end{aligned}$$

Por lo tanto, un par de conjuntos A y B satisface la propiedad indicada si y sólo si $A^c \cap B^c$ no es vacío. Observe que esto ocurrió con el ejemplo que dimos antes: Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 5\}$, entonces $A^c \cap B^c = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 5\}$.

5. $\exists x \in \mathbb{N} (x \notin A \vee x \notin B)$.

Los mismos conjuntos A y B que en el ejemplo anterior satisfacen esta propiedad. En general, tenemos que

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N} (x \notin A \vee x \notin B) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} (x \in A^c \vee x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} (x \in A^c \cup B^c) \\ &\Leftrightarrow A^c \cup B^c \neq \emptyset \end{aligned}$$

6. $\nexists x \in \mathbb{N} (x \in A \vee x \in B)$.

En este caso, el único ejemplo es $A = B = \emptyset$. En efecto,

$$\begin{aligned} \nexists x \in \mathbb{N} (x \in A \vee x \in B) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} (x \in A^c \wedge x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N} (x \in A^c \cap B^c) \\ &\Leftrightarrow A^c \cap B^c = \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.20. Considere el siguiente conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} (x \leq 10 + y)\}$$

Para que un número natural x pertenezca al conjunto A debe cumplir cada una de las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} x &\leq 10 + 0 \\ x &\leq 10 + 1 \\ x &\leq 10 + 2 \\ x &\leq 10 + 3 \\ x &\leq 10 + 4 \\ x &\leq 10 + 5 \\ x &\leq 10 + 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hemos colocado $\vdots$ pues el cuantificador “ $\forall y \in \mathbb{N}$ ” impone una condición para cada $y \in \mathbb{N}$. Por inspección podemos convencernos que $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

□

Ejemplo 2.21. También es frecuente usar expresiones donde aparecen ambos cuantificadores. Por ejemplo, para expresar que todo número real positivo tiene una raíz cuadrada lo hacemos de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{R} [x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{R} (y^2 = x)]$$

Se puede simplificar esta expresión introduciendo un símbolo para denotar los números reales positivos, normalmente se usa $\mathbb{R}^+$. Podemos entonces escribir la afirmación anterior de la siguiente manera:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \exists y \in \mathbb{R} (y^2 = x).$$

Esta expresión usualmente se lee así: Para todo x en $\mathbb{R}^+$, existe un y en $\mathbb{R}$ tal que y^2 es igual a x . Observe que la expresión “tal que” no aparece y en su lugar usamos los paréntesis $()$. $\square$

Observación 2.22. Hay algo más sobre el uso de los cuantificadores que queremos mencionar brevemente. Las proposiciones que usan cuantificadores se enuncian referidas a un contexto. Por ejemplo, cuando escribimos $\forall x$ ¿a qué no estamos refiriendo la decir “para todo x ”? Siempre que se use el cuantificador $\forall$ debe haber un contexto (a veces llamado el universo del discurso) donde la variable x toma sus valores. Lo mismo podemos decir acerca del cuantificador $\exists$. En el ejemplo 2.19 el universo fue explícitamente mencionado, pues siempre escribimos $\forall x \in \mathbb{N}$ o $\exists x \in \mathbb{N}$. Para evitar confusiones es conveniente indicar el universo. Sin embargo, por brevedad se tiende a no mencionarlo explícitamente.

Ejercicios 2.2

1. Vea el ejemplo 2.18 para responder este ejercicio.

a) Muestre que $n = 2$ es un contraejemplo a la siguiente afirmación

$$\forall n \in \mathbb{N} (n^4 < 15).$$

¿Puede conseguir otro?

b) Considere la proposición

$$\forall x \in \mathbb{R} ((x - 1)^3 \geq x^3).$$

Muestre que $x = 0$ es un contraejemplo y encuentre otro.

c) Determine si la siguiente afirmación es verdadera

$$\forall n \in \mathbb{N} (33 < n^3 + 2n + 1 < 35).$$

d) Determine si la siguiente afirmación es verdadera

$$\exists n \in \mathbb{N} (33 < n^3 + 2n + 1 < 35).$$

2. Muestre que las siguientes afirmaciones son lógicamente equivalentes.

a) $A \subseteq B$.

b) $\forall x (x \notin A \vee x \in B)$.

c) $\forall x (x \notin B \rightarrow x \notin A)$.

d) $B^c \subseteq A^c$.

En otras palabras, muestre que $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(b) \Leftrightarrow (c)$, $(c) \Leftrightarrow (d)$ y $(d) \Leftrightarrow (a)$. Sin embargo, se puede trabajar un poco menos, mostrando la siguiente cadena de implicaciones: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

3. Muestre que las siguientes afirmaciones son lógicamente equivalentes:

a) $A \cap B = \emptyset$.

b) $\forall x(x \in A \rightarrow x \notin B)$.

c) $\forall x(x \in B \rightarrow x \notin A)$.

d) $\forall x(x \notin B \vee x \notin A)$.

4. Determine si la siguiente afirmación es válida.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \forall x [(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)]$$

5. En cada uno de los ejercicios que siguen, halle conjuntos A, B, C todos ellos subconjuntos de $\mathbb{N}$ que cumplan con la propiedad indicada.

a) $\forall x \in \mathbb{N} (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C)$.

b) $\forall x \in \mathbb{N} (x \notin A \rightarrow (x \in B \vee x \notin C))$.

c) $\exists x \in \mathbb{N} ((x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \in C))$.

d) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} (x \in A \rightarrow y \in B)$.

e) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} [x \in A \rightarrow ((y \in B \cap A) \wedge (y \neq x))]$.

f) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} (x \in A \rightarrow ((y \in B \wedge x \notin C))$.

6. Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y en caso que sean falsas dé un contraejemplo.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x + y \geq 0)$.

b) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (x + y \geq 0)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x^2 + y^2 \geq 0)$.

d) $\forall y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} (x^2 + y^2 > 0)$.

e) $\exists y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} (x^2 + y^2 > 0)$.

7. Simplifique las siguientes fórmulas siguiendo el procedimiento que se ilustra en el ejemplo 2.16.

a) $\neg (\exists y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} (x^2 + y^2 > 0))$.

b) $\neg (\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x^2 + y^2 \geq 0))$.

$$c) \neg (\forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} [y > 0 \rightarrow (x < z < x + y)]).$$

$$d) \neg (\forall x \exists y [(x \in A \wedge y \in B) \rightarrow x \in C]).$$

$$e) \neg (\exists x [x \in C \rightarrow (\exists y (x \in A \wedge y \in B))]).$$

$$f) \neg (\exists x [(\exists y (x \in A \wedge y \in B)) \rightarrow x \in C]).$$

8. Determine al menos un elemento de cada uno de los siguientes conjuntos

$$a) \{x \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} (z \geq 2, z < x \text{ y } z \text{ divide a } x)\}.$$

$$b) \{x \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} (2z \text{ divide a } x)\}.$$

$$c) \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} (y > 0 \rightarrow xy > 0)\}.$$

$$d) \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} (y > 0 \wedge xy > 0)\}.$$

$$e) \{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} [y > 0 \rightarrow (x < z < x + y)]\}.$$

9. Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} : \text{Si } x \geq 9, \text{ entonces } x \text{ es impar}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{N} : \text{Si } x + 5 \geq 10, \text{ entonces } x \leq 20\} \\ C &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq 10 \text{ y } x \geq -8\} \\ D &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -7 \text{ o } x \geq 22\} \end{aligned}$$

Determine cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & 5 \in A \\ \text{(ii)} & 10 \in A \\ \text{(iii)} & 6 \in B \\ \text{(iv)} & 16 \in B \\ \text{(v)} & 9 \in C \\ \text{(vi)} & -15/2 \in C \cap D \\ \text{(vii)} & 35 \in D \\ \text{(viii)} & 7 \in B \cap C \end{array}$$

10. Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$. Considere los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{N} : \text{Si } x \in A, \text{ entonces } x \text{ es par}\} \\ C &= \{x \in \mathbb{N} : x \in A \text{ y } x \text{ es impar}\} \\ D &= \{x \in \mathbb{N} : \text{Si } x \notin A, \text{ entonces } x \text{ es par}\} \end{aligned}$$

Muestre que las siguientes afirmaciones son verdaderas independientemente de quién sea el conjunto A :

$$a) \mathbb{N} = B \cup C.$$

$$b) B \cap D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}.$$

2.3. Propiedades de las operaciones entre conjuntos

En esta sección estudiaremos algunas propiedades básicas de las operaciones entre conjuntos. Pero a diferencia de las secciones anteriores, presentaremos argumentos más precisos para justificar las propiedades de los conjuntos. Estos argumentos se llaman *demostraciones* y son la herramienta fundamental que tienen los matemáticos para validar sus descubrimientos.

2.3.1. Algunas propiedades de la relación $\subseteq$

Comenzaremos con una propiedad que se conoce por el nombre de **propiedad transitiva**.

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

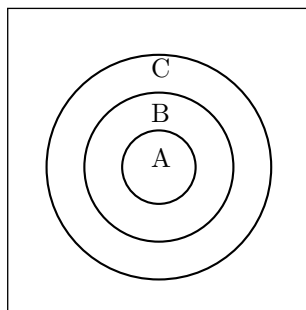
La forma como se enuncia la propiedad transitiva es un ejemplo de una afirmación *condicional*. Pues ella afirma que $A \subseteq C$ bajo la condición de que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. En el enunciado de la propiedad transitiva, la hipótesis consiste de dos afirmaciones: $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Y la conclusión es $A \subseteq C$.

Para mostrar la validez de la propiedad transitiva supongamos que tenemos tres conjuntos A, B y C tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$. Mostraremos que entonces se cumple que $A \subseteq C$. En símbolos, lo que debemos mostrar es que:

$$\forall x (x \in A \rightarrow x \in C).$$

Para ver esto, sea x un elemento de A arbitrario (pero fijo). Queremos mostrar que $x \in C$. En efecto, una de nuestras suposiciones es que $A \subseteq B$ y como x lo tomamos en A , podemos concluir que $x \in B$. La segunda suposición es que $B \subseteq C$, pero como ya mostramos que $x \in B$, podemos finalmente concluir que $x \in C$.

Si representamos con un diagrama de Venn que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ tenemos el siguiente diagrama



Observación 2.23. La propiedad transitiva de $\subseteq$ nos permite usar expresiones como la que sigue sin que haya ninguna ambigüedad

$$A \subseteq B \subseteq C$$

Esta expresión abrevia la conjunción de tres afirmaciones: $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $A \subseteq C$. Por ejemplo, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Algo similar estamos acostumbrados a hacer con números, pues escribimos $x \leq y \leq z$ en lugar de escribir la expresión más larga: $x \leq y$, $y \leq z$ y $x \leq z$.

Observación 2.24. La justificación de la propiedad transitiva que acabamos de ver es un ejemplo de lo que en Matemáticas se llama una **demostración**. Este es además un ejemplo de una demostración de una afirmación condicional. El lector debe tomar nota de lo que hicimos, pues lo encontraremos con bastante frecuencia. A continuación lo resaltamos.

Para demostrar una afirmación condicional
suponga que la hipótesis se cumple
y muestre que la conclusión también se cumple.

□

Observación 2.25. Usualmente la demostración de una afirmación como $A \subseteq C$ comienza con frases como: “*Fijemos un elemento arbitrario x de A ...*” o también “*Sea x un elemento arbitrario, pero fijo, de A .*”. Recomendamos al lector que use estas expresiones o alguna otra equivalente cuando esté demostrando afirmaciones como la anterior. □

Otra propiedad de la relación de subconjunto $\subseteq$ es la siguiente:

Ejemplo 2.26. Sean A y B conjuntos cualesquiera. Mostraremos que:

$$\text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces } B^c \subseteq A^c. \quad (2.6)$$

Para mostrar (2.6) haremos uso de una de las equivalencias lógicas vistas en el capítulo 1. Recordemos que una proposición condicional es lógicamente equivalente a su contrarrecíproca. En símbolos:

$$(\phi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi).$$

Por esto, la afirmación (2.6) es equivalente a la siguiente afirmación:

$$\text{Si } B^c \not\subseteq A^c, \text{ entonces } A \not\subseteq B. \quad (2.7)$$

Por lo tanto para demostrar que (2.6) es válida, basta que mostremos que (2.7) lo es. Supongamos que A y B son conjuntos tales que $B^c \not\subseteq A^c$ y mostremos que $A \not\subseteq B$. Como por hipótesis $B^c \not\subseteq A^c$, entonces existe un elemento x que pertenece a B^c pero no a A^c . Es decir, existe x tal que $x \in B^c$ y $x \notin A^c$. En otras palabras, existe x tal que $x \notin B$ y $x \in A$. Esto precisamente dice que $A \not\subseteq B$ y así hemos mostrado (2.7). □

Otra manera de enunciar la equivalencia lógica de dos proposiciones es a través de la expresión *si, y sólo si*. Es decir, $\phi \Leftrightarrow \psi$ dice lo mismo que ϕ si, y sólo si ψ . Recordemos, además, que esto último también es equivalente a decir que se cumple simultáneamente que $\phi \Rightarrow \psi$ y que $\psi \Rightarrow \phi$. El siguiente ejemplo ilustra el uso del *si, y sólo si*.

Ejemplo 2.27. Sean A y B dos conjuntos. Entonces se cumple que

$$A \cap B = A \text{ si, y sólo si, } A \subseteq B. \quad (2.8)$$

En este ejemplo tenemos las proposiciones:

$$\text{Si } A \cap B = A, \text{ entonces } A \subseteq B \quad (2.9)$$

y

$$\text{Si } A \subseteq B, \text{ entonces } A \cap B = A. \quad (2.10)$$

Recordemos que cuando decimos que “ Q si, y sólo si P ” estamos afirmando que las proposiciones Q y P son *equivalentes*. Esto significa que Q se cumple, si P se cumple y viceversa, P se cumple, si Q se cumple.

Ahora demostraremos (2.8). Primero veremos la afirmación (2.9). Nuestra hipótesis es que $A \cap B = A$. Sabemos que $A \cap B \subseteq B$. Luego sustituyendo iguales por iguales (es decir, sustituyendo $A \cap B$ por A) obtenemos que $A \subseteq B$.

La afirmación (2.10) se demuestra de manera similar. Nuestra hipótesis ahora es que $A \subseteq B$ y queremos mostrar que $A \cap B = A$. Ya sabemos que $A \cap B \subseteq A$ (¿por qué?), así que resta mostrar que $A \subseteq A \cap B$. Tomemos $x \in A$, por hipótesis $A \subseteq B$, luego $x \in B$ y en consecuencia $x \in A \cap B$. $\square$

El ejemplo anterior nos dice que, desde el punto de vista de la lógica, afirmar que un conjunto A es subconjunto de otro conjunto B es equivalente a afirmar que $A \cap B = A$.

El esquema que hemos usado en la demostración anterior se repetirá con mucha frecuencia y es importante que el lector le preste atención:

Para demostrar una afirmación del tipo

$$Q \text{ si, y sólo si, } P$$

se deben mostrar las siguientes afirmaciones condicionales:

- (1) Si P , entonces Q .
- (2) Si Q , entonces P .

Las equivalencias (lógicas) con frecuencia facilitan la búsqueda de la respuesta a una pregunta. Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.28. Queremos determinar todos los conjuntos A que cumplan con la siguiente ecuación

$$A \cap \{1, 3, 5\} = A.$$

Por lo visto anteriormente, sabemos que un conjunto A cumple con esta ecuación si, y sólo si, satisface la siguiente condición

$$A \subseteq \{1, 3, 5\}.$$

Por lo tanto, los únicos conjuntos que cumplen con la ecuación indicada son

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}.$$

□

Por último, recordemos que la expresión

$$“P, \text{ sólo si } Q”$$

dice que Q es una condición necesaria para que P ocurra. En otras palabras, esa expresión equivale a decir que “Si P , entonces Q ”.

2.3.2. Unión e intersección

Comenzaremos con algunas de las propiedades de la unión y de la intersección. En lo que sigue A , B y C denotan conjuntos.

1a	$A \cup B = B \cup A$	Leyes conmutativas
1b	$A \cap B = B \cap A$	
2a	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Leyes asociativas
2b	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
3a	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Leyes distributivas
3b	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
4a	$A \cup A = A$	Leyes de idempotencia
4b	$A \cap A = A$	
4c	$A \cup \emptyset = A$	Leyes de la Identidad
4d	$A \cap \emptyset = \emptyset$	

Estas leyes (junto con otras que veremos más adelante) se conocen como las **Leyes del álgebra de conjuntos** o también como las leyes del **álgebra Booleana** en honor al matemático irlandés George Boole (1815-1864).

Las *leyes conmutativas* dicen que el orden en que se unan o intersecten dos conjuntos es irrelevante. Lo cual es bastante evidente observando las definiciones de la unión y la intersección.

Las *leyes asociativas* son importantes, pues garantizan que el uso de los paréntesis no es necesario en las expresiones que usan sólo uniones o sólo intersecciones. Es decir, ya que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, entonces podemos definir un conjunto a través de la expresión $A \cup B \cup C$ sin que haya ninguna ambigüedad acerca de cuál conjunto estamos definiendo. De manera similar podemos escribir $A \cap B \cap C$ sin problemas de ambigüedad. Esto no sucede, por ejemplo, si tenemos una expresión como la siguiente

$$A \cup B \cap C.$$

En este caso no queda claro a qué conjunto nos referimos, pues tenemos dos alternativas

$$(A \cup B) \cap C$$

y

$$A \cup (B \cap C).$$

Estas dos expresiones no denotan, en general, el mismo conjunto (vea el ejercicio 13 de la sección 2.1.6). Por esto, el uso de los paréntesis es necesario.

Todavía nos queda por justificar la validez de las *leyes distributivas*. La demostración de esta ley no es tan directa y recurriremos a un argumento un poco más elaborado. Pero antes de hacerlo, queremos comentar el significado de las propiedades de las operaciones sobre conjuntos.

En general las leyes del álgebra de conjuntos permiten manejar las operaciones entre conjuntos y en muchos casos al usarlas se puede simplificar el “cálculo”. Veamos, por ejemplo, lo que dice la ley distributiva **3b**:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Observe que en el lado derecho de esta igualdad se realizan 3 operaciones: Primero $A \cap B$, después $A \cap C$ y por último la unión de los dos conjuntos obtenidos. En cambio, en el lado izquierdo, solamente hay que realizar dos operaciones: Primero $B \cup C$ y después este conjunto se intersecta con A . Una situación análoga se presenta con la operaciones de la aritmética $+$ y $\cdot$. Por ejemplo, considere la siguiente igualdad:

$$(3 + 5) \cdot 4 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4.$$

Podríamos decir que la expresión en el lado izquierdo de la igualdad es más simple que la del lado derecho, pues para calcularla se necesita realizar menos operaciones.

Ejemplo 2.29. Veamos la primera ley distributiva:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (2.11)$$

Antes de dar una demostración le sugerimos al lector que haga los diagramas de Venn correspondientes a $A \cup (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ y observe que en ambos diagramas obtenemos la misma región sombreada. Los diagramas de Venn como herramientas para guiarnos en nuestros razonamientos son útiles pero tienen limitaciones. Por ejemplo, cuando se está trabajando con más de tres conjuntos los diagramas se vuelven muy engorrosos¹.

Ahora comenzaremos la demostración de la ecuación (2.11). Mostraremos que el conjunto $A \cup (B \cap C)$ tiene los mismos elementos que el conjunto $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, y por lo tanto, por la definición de igualdad de conjuntos, concluiremos que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Comencemos mostrando que

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

En símbolos, queremos mostrar

$$\forall x [x \in A \cup (B \cap C) \rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)].$$

Para verlo, tomemos un elemento x , arbitrario pero fijo, perteneciente a $A \cup (B \cap C)$ y mostremos que x también pertenece a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Por definición de unión de conjuntos tenemos que hay sólo dos casos posibles: $x \in A$ o $x \in B \cap C$. Mostraremos que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ en ambos casos.

Caso a: Supongamos que $x \in A$. Entonces $x \in A \cup B$ y también $x \in A \cup C$. Luego $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Caso b: Supongamos que $x \in B \cap C$. Entonces $x \in B$ y por lo tanto $x \in A \cup B$. Pero también tenemos que $x \in C$, luego $x \in A \cup C$. En consecuencia $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Hemos mostrado que dado cualquier $x \in A \cup (B \cap C)$, independientemente de si $x \in A$ o si $x \in B \cap C$, se tiene que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Esto demuestra que $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ya hemos probado la mitad de lo que queríamos. Nos falta mostrar que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

En símbolos, queremos mostrar

$$\forall x [x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \rightarrow x \in A \cup (B \cap C)].$$

Es decir queremos mostrar que si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$. Para esto, sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ un elemento arbitrario. Por definición de intersección de conjuntos tenemos que $x \in A \cup B$ y también que $x \in A \cup C$. Consideraremos dos casos: $x \in A$ o $x \notin A$. Mostraremos que $x \in A \cup (B \cap C)$ en ambos casos. En efecto:

¹En el libro *Máquinas lógicas y Diagramas* de Martin Gardner [6] se estudian otros tipos de diagramas. Por ejemplo, cuando se trabaja con cuatro conjuntos, Venn propuso usar elipses en lugar de círculos.

Caso a: Supongamos que $x \in A$. Entonces $x \in A \cup (B \cap C)$.

Caso b: Supongamos que $x \notin A$. Entonces como $x \in A \cup B$, necesariamente se tiene que $x \in B$. De igual manera, ya que $x \in A \cup C$, entonces $x \in C$. Con esto hemos mostrado que $x \in B \cap C$ y por lo tanto $x \in A \cup (B \cap C)$.

Hemos mostrado de que dado cualquier $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, independientemente de si $x \in A$ o si $x \notin A$, se tiene que $x \in A \cup (B \cap C)$. Esto demuestra que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. □

Observación 2.30. Notemos que la demostración tiene dos partes. La primera consistió en mostrar que

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

y en la segunda parte mostramos que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C).$$

El lector debe prestar mucha atención al esquema de esta demostración, pues lo repetiremos cada vez que queramos demostrar la igualdad de dos conjuntos: Para demostrar que dos conjuntos H y F son iguales se demuestran dos cosas: (i) $H \subseteq F$ y (ii) $F \subseteq H$.

Observación 2.31. (*Prueba por casos*) La demostración anterior tiene otra peculiaridad que deseamos resaltar. El argumento usado se separó en casos. Lo que ocurrió fue lo siguiente. En la primera parte de la demostración, una vez fijado un elemento arbitrario x , se separó el argumento en dos casos: $x \in A$ o $x \in B \cap C$. Considere entonces las siguientes proposiciones:

$$\begin{array}{ll} P & x \in A \cup (B \cap C) \\ Q & x \in A \\ R & x \in B \cap C \\ S & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}$$

Lo que queríamos demostrar era la siguiente proposición:

$$P \rightarrow S$$

El caso a) consistió en demostrar que $Q \rightarrow S$ y el caso b) mostró que $R \rightarrow S$. Ahora la regla “*prueba por casos*” (ver la sección 1.2.1) precisamente dice que

$$(q \rightarrow s) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (q \vee r) \rightarrow s.$$

Por consiguiente, concluimos que $(Q \vee R) \rightarrow S$. Por otra parte, por definición de unión se tiene que $P \rightarrow (Q \vee R)$. Y finalmente, la *ley del silogismo hipotético* nos asegura que

$$((p \rightarrow (q \vee r)) \wedge ((q \vee r) \rightarrow s)) \Rightarrow (p \rightarrow s).$$

En consecuencia, concluimos que $P \rightarrow S$. Y esto es lo que queríamos demostrar.

La introducción de los casos es un recurso que con frecuencia facilita las demostraciones. En situaciones como esta, se dice que se ha hecho una *prueba por casos*. Este tipo de demostraciones son bastante comunes en matemáticas.

Ejemplo 2.32. Sean A y B conjuntos. Afirmamos que:

$$\text{Si } \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B), \text{ entonces } A = B. \quad (2.12)$$

En efecto, mostraremos la contrapositiva. Es decir:

$$\text{Si } A \neq B, \text{ entonces } \mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B). \quad (2.13)$$

Supongamos que $A \neq B$. Entonces $A \not\subseteq B$ ó $B \not\subseteq A$. Consideraremos estas dos alternativas por separado.

Caso 1: Supongamos que $A \not\subseteq B$. Entonces por definición del conjunto potencia, tenemos que $A \notin \mathcal{P}(B)$. Pero claramente $A \in \mathcal{P}(A)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

Caso 2: Supongamos que $B \not\subseteq A$. Entonces, al igual que en el caso 1, se concluye que $B \notin \mathcal{P}(A)$. Pero $B \in \mathcal{P}(B)$. Por lo tanto $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$.

Como en ambos casos se mostró que $\mathcal{P}(A) \neq \mathcal{P}(B)$, entonces podemos concluir que la afirmación (2.13) es verdadera y por lo tanto la afirmación original (2.12) también lo es. $\square$

Es importante verificar que los casos considerados cubran todas las posibilidades. Por ejemplo, dados dos conjuntos A y B hay tres alternativas posibles:

$$(i) \quad A \not\subseteq B, \quad (ii) \quad B \not\subseteq A \quad \text{y} \quad (iii) \quad A = B.$$

En el ejemplo anterior, la tercera alternativa no se considera pues la hipótesis precisamente dice que $A \neq B$. Por esto sólo quedan las alternativas (i) y (ii), las cuales son los casos que hay que analizar.

En el próximo ejemplo ilustramos otra manera de escribir las demostraciones en la que queda más claro cual es la justificación de cada paso de la demostración.

Ejemplo 2.33. Ahora veremos una generalización de las leyes distributivas. Mostraremos que para cada cuatro conjuntos A, B, C y D cualesquiera se cumple que

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D). \quad (2.14)$$

La manera en que presentaremos la demostración de esta afirmación será diferente de la que hemos venido usando. Ahora haremos usos de las leyes del álgebra de conjuntos que hemos visto anteriormente.

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (C \cup D) &= [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D] && \text{Distributiva 3b} \\ &= [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cup [(A \cap D) \cup (B \cap D)] && \text{Distributiva 3b} \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) && \text{Asociativa} \end{aligned}$$

$\square$

El lector puede preguntarse por qué la demostración hecha en el ejemplo anterior es distinta a la hecha en el ejemplo 2.29. En realidad se puede hacer de otra manera. Le sugerimos que dé otra demostración de (2.14) mostrando las siguientes dos afirmaciones

$$(A \cup B) \cap (C \cup D) \subseteq (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$$

y

$$(A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D) \subseteq (A \cup B) \cap (C \cup D).$$

2.5.2. Afirmaciones universales

Las afirmaciones universales son las que tienen la forma siguiente

$$\forall x P(x)$$

donde $P(x)$ significa que el elemento x tiene la propiedad P . Este tipo de proposiciones aparecieron con frecuencia al demostrar las propiedades de los conjuntos. Recordemos que normalmente la demostración de una afirmación universal comienza con frase: “Sea x un elemento arbitrario. Mostraremos que x tiene la propiedad P ...”

2.5.3. Demostraciones por reducción al absurdo

Otro tipo de demostraciones, que hasta ahora no hemos usado, es el llamado método de **reducción al absurdo**. Lo ilustraremos con un ejemplo.

Es fácil conseguir tres enteros consecutivos a, b, c que cumplan con la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Por ejemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Sin embargo, mostraremos que NO existen tres enteros consecutivos a, b, c que satisfagan la ecuación $a^3 + b^3 = c^3$.

Razonaremos indirectamente. Supondremos que existen enteros consecutivos a, b, c tales que $a^3 + b^3 = c^3$ y mostraremos que esto conduce a una contradicción.

Como los enteros a, b y c son consecutivos, entonces son de la forma $x - 1, x$ y $x + 1$. Es decir, $a = x - 1, b = x$ y $c = x + 1$ para algún entero x . Nuestra suposición es que

$$(x - 1)^3 + x^3 = (x + 1)^3.$$

Efectuando las operaciones obtenemos

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Agrupando tenemos

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

²Una locha es una moneda fuera de circulación que valía $\frac{1}{8}$ de un Bolívar.

Agrupando las potencias de x de un lado de la igualdad, obtenemos

$$x^3 - 6x^2 = 2.$$

Factorizando obtenemos

$$x^2(x - 6) = 2. \quad (2.22)$$

En particular, de esta última igualdad se concluye que el producto $x^2(x - 6)$ es positivo. Como x^2 es positivo, entonces $x - 6$ también lo es y por lo tanto $x - 6$ es mayor o igual que 1. Luego x es mayor o igual que 7 y así x^2 es mayor o igual que 49. Luego $x^2(x - 6)$ es mayor o igual que 49, lo cual contradice la igualdad (2.22). Digámoslo con precisión. Por una parte, a partir de las condiciones de nuestro problema junto con la negación de lo que queremos mostrar hemos establecido la validez de la ecuación 2.22. Y por otra parte, también hemos establecido que la ecuación 2.22 no puede ser válida. Esto es una contradicción.

El haber deducido una contradicción (a partir de la suposición de que si existían tres enteros a , b y c consecutivos tales que $a^3 + b^3 = c^3$) nos garantiza que la suposición inicial no puede ser verdadera. En consecuencia tales enteros no existen y con esto hemos demostrado lo que queríamos³.

En términos generales, si queremos demostrar de manera indirecta que P implica lógicamente a Q lo que debemos hacer es mostrar que a partir de $P \wedge \neg Q$ se deduce una contradicción. Pues en este caso, es fácil convencerse que $P \wedge \neg Q$ también es una contradicción y por consiguiente $\neg(P \wedge \neg Q)$ es una tautología. Es decir, $\neg P \vee Q$ es una tautología. Pero $P \rightarrow Q$ es lógicamente equivalente a $\neg P \vee Q$ y por lo tanto $P \rightarrow Q$ es una tautología. Esto último dice que $P \Rightarrow Q$.

Más adelante tendremos oportunidad de ver otros ejemplos donde se usa el método de reducción al absurdo.

2.5.4. Demostraciones de igualdades

Ahora bien, no todas las demostraciones que hemos hecho han sido exactamente de alguno de los tipos descritos anteriormente. Le pedimos al lector que vea de nuevo la demostración de la asociatividad de $\triangle$ dada en la sección 2.3.4. Nos referimos a la demostración de lo siguiente:

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

El lector observará que la demostración consistió en ir transformando la expresión $(A \triangle B) \triangle C$ (el lado izquierdo de la igualdad) hasta que se “convirtió” en $A \triangle (B \triangle C)$ (el lado derecho de la igualdad). En el transcurso de esa demostración se usaron algunas de las leyes del álgebra de conjuntos (5a, 5b, 7b y 6a) y también un resultado que se había demostrado previamente (ejemplo 2.33). Las leyes del álgebra de conjuntos estipulan la igualdad de algunos conjuntos. Algunas demostraciones, como la mencionada arriba, consisten en usar esas igualdades para

³Es natural preguntarse si es imprescindible razonar indirectamente. El lector interesado puede tratar de hacerlo directamente. Muestre que si $x^3 + (x + 1)^3 = (x + 2)^3$, entonces lo mismo ocurre si en lugar de x colocamos $x - 1$. Ahora reflexione si este hecho es suficiente para justificar la afirmación.

ir paso a paso transformando una expresión en otra. En cada paso la regla básica es que uno puede sustituir una expresión por cualquier otra que sea igual a ella (“*sustituir iguales por iguales*”). Este tipo de argumentos es muy frecuente en el contexto del álgebra.

2.5.5. Resumen

Las demostraciones son similares a las deducciones o derivaciones que vimos en el contexto del cálculo proposicional. Podemos decir que una demostración de una afirmación P consiste de una sucesión de afirmaciones $P_1, P_2, \dots, P_n$ tales que cada afirmación P_i se deduce de las anteriores usando algún razonamiento válido y además la última de ellas, P_n , debe ser la afirmación P que se quería demostrar. Las proposiciones $P_1, \dots, P_{n-1}$ se llaman las premisas y P_n se llama la conclusión. Las premisas pueden ser resultados ya demostrados anteriormente o proposiciones que se deducen de las definiciones básicas de la teoría de conjuntos (es decir, de la relación $\in$, conjunto potencia, $\subseteq$, etc.). Ahora bien, cuando decimos que se “deducen” de las anteriores queremos decir que

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_i \Rightarrow P_{i+1}$$

En otras palabras, la proposición P_{i+1} es una consecuencia lógica de las proposiciones ya demostradas.

Insistimos en que esto no es una definición precisa de la noción de demostración. En el curso de la lectura de estas notas el lector estudiará muchas demostraciones de resultados muy variados que le ayudarán a formarse una idea más precisa de lo que se entiende por demostración; y algo aún más importante, irá aprendiendo a cómo hacerlas y cómo escribirlas para que otros las entiendan.

Es común en los textos de Matemáticas indicar el comienzo y el final de las demostraciones de la siguiente manera: *Demostración*..... $\square$. De ahora en adelante lo haremos así. Otra costumbre es llamar **Teorema** a las proposiciones que se demuestran.

2.6. Ejercicios suplementarios del capítulo 2

1. De una lista completa de los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} \{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\} & \{1/n : n = 1, 2, 3, 4\} \\ \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \cap \mathcal{P}(\{2, 3, 4\}) & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cap \mathbb{N} \end{array}$$

2. Determine si las siguientes definiciones son correctas. En caso que lo sea, encuentre dos elementos del conjunto y en caso que no, justifique porqué no lo es.

- a) $A = \{x + y : x \in \mathbb{Z}\}.$
- b) $A = \{m : m \in A\}.$
- c) $A = \{x \in \mathbb{R} : (x + 2)^2\}.$
- d) $A = \{(x + 2)^2 : x \in \mathbb{R}\}.$
- e) $A = \{x \in \mathbb{R} : (x + 2)^2 = 1\}.$
- f) $A = \{x : x \in B\}$ y $B = \{x : x \in A\}.$
- g) $A = \{x : x \in x\}.$
- h) $A = \{x : x \notin x\}.$

3. Encuentre una propiedad que sirva para definir por comprensión el siguiente conjunto:

$$\{3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots\}.$$

4. Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$ y $U = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n \leq 12\}$ el conjunto universal. Determine los conjuntos siguientes:

- (a) $A \triangle B$
- (b) $(A \cup C) \cap (C^c \cup B)$

5. Determine si los conjuntos A y B son iguales.

- a) $A = \{n \in \mathbb{N} : n + 1 \geq 2\}$ y $B = \{n \in \mathbb{Q} : n + 1 \geq 2\}.$
- b) $A = \{n \in \mathbb{Z} : 2 \leq n\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : 2 \leq n\}.$
- c) $A = \{y \in \mathbb{Q} : y + 3 \geq 7\}$ y $B = \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ y } x \geq 4\}$
- d) $A = \{3n - 4 : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} : x = 3n - 4 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$
- e) $A = \{3n - 4 : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Q} : \frac{x+4}{3} \in \mathbb{N}\}.$
- f) $A = \mathcal{P}(\{5, 7\})$ y $B = \{X \in \mathcal{P}(\{5, 6, 7\}) : 6 \notin X\}.$

6. Halle conjuntos A y B tales que

- a) $A \triangle \{1, 2, 3\} = \{3, 4, 5\} \triangle B,$
- b) $A \triangle \{3, 4\} = B \cap \{2, 3, 7\}.$

7. Halle dos conjuntos A y B tales que $A \Delta B = A \cup B$.
8. Halle dos conjuntos A y B tales que $A \Delta B \neq A \cup B$.
9. Sean A, B y X conjuntos con $A, B \subseteq X$. Muestre que existe un conjunto C tal que $A \Delta C = B$.
10. Use las leyes del algebra Booleana para simplificar las siguientes expresiones
 - a) $[A^c \setminus (B^c \cup C^c)]^c$
 - b) $[(B \cup C)^c \setminus A]^c$
 - c) $[[A \cup (B \cup C)^c]^c \cap [A \cap (B \cap C)^c]^c]^c$
11. Muestre las siguientes generalizaciones de la ley de De Morgan: sean A, B, C y D conjuntos arbitrarios, entonces
 - a) $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$.
 - b) $(A \cup B \cup C \cup D)^c = A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c$.
12. Sean A, B y C tres conjuntos arbitrarios. Muestre lo siguiente
 - a) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$
 - b) $A \setminus (A \setminus B) \subseteq B$
 - c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
 - d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
13. Demuestre la siguiente generalización de la ley distributiva 3a: Sean A, B, C y D cuatro conjuntos arbitrarios.

$$A \cup (B \cap C \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (A \cup D).$$

14. En los ejercicios que siguen U denotará el conjunto universal, A, B, C y D denotarán subconjuntos de U . Demuestre las afirmaciones que se indican. En las partes donde se hace una pregunta dé una demostración en caso que sea verdadera y en el caso que sea falsa dé un contraejemplo.
 - a) $A \cap B = \emptyset$ si, y sólo si, $A \subseteq B^c$
 - b) $A \cup B = U$ si, y sólo si, $B^c \subseteq A$
 - c) Si $A \cup B \neq \emptyset$, entonces $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$
 - d) $A \cap (B \cup C \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)$
 - e) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
 - f) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

- g) Si $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$, entonces $A \cap B \subseteq C$
- h) $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$ si, y sólo si, $A \subseteq B \cap C$
- i) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
- j) ¿Es cierto que $A \cap B = A^c \cup B^c$?
- k) ¿Es cierto que $(A \cap \emptyset) \cup B = B$ para todo A, B ?
- l) ¿Es cierto que $A \setminus B = B \setminus A$?
- m) ¿Será cierto que si $A \cap B = A \cap C$, entonces $B = C$?
- n) ¿Si $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$?
- $\tilde{n}$) ¿Será cierto que si $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$?
- o) ¿Será cierto que $A^c \Delta B^c = A \Delta B$?