Guía 1 de Matemáticas 1

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Viernes 13 de Septiembre, 2013

1. Considere la siguiente proposición: "Si x es un número par y mayor a 4, entonces x se puede escribir como suma de dos números primos".

   Decida si las siguientes afirmaciones contradicen o no la anterior proposición. En cada caso justifique.

   (a) El número 7 es la suma de los números primos 5 y 2.

   (b) El número 16 es la suma de los números primos 13 y 3, pero también las de los primos 11 y 5.

   (c) Para todo par de números primos a y b se sabe que: $1250 \neq a + b$.

   (d) Para todo par de números primos a y b se sabe que: $11 \neq a + b$.

   (e) El número 9 es la suma de los primos 7 y 2, pero 7 no es un número par.

   (f) El número 4 es la suma de los números primos 2 y 2.

2. Un prisionero debe hacer una elección entre dos puertas: detrás de una de ellas está una hermosa dama y detrás de la otra se halla un tigre hambriento. Suponga que cada una de las puertas tuviera un letrero y el prisionero sabe que solamente un letrero es verdadero. El letrero de la primera puerta dice:

   "*En este cuarto hay un dama y en el otro cuarto hay un tigre.*"

   El letrero de la segunda puerta dice:

   "*En uno de estos cuartos hay una dama y en uno de estos cuartos hay un tigre.*"

   Con esta información, el prisionero es capaz de elegir la puerta correcta.

3. Demuestre por contradicción que si x e y son números reales tales que $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x + y = 0$, entonces $x = 0$ e $y = 0$.

4. Sea ΔABC un triángulo cualquiera, determine el valor de verdad de la siguiente afirmación:
"Si $\overline{CD}$ es una bisectriz perpendicular del lado $\overline{AB}$ y $\overline{AC} = 2\overline{AD}$, entonces el ΔABC es equilátero".

5. Determine el valor de verdad de la siguientes proposiciones. Si la proposición es falsa de un contraejemplo y si la proposición es verdadera demuéstrela.

   (a) Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.
   (b) Si $A \subset (B \cup C)$, entonces $A \subset B$ o $A \subset C$.
   (c) Si $A \subset B$, entonces $A = A \cap B$.
   (d) Si $A = A \cap B$, entonces $A \subset B$.
   (e) Si $A \subset B^c$, entonces $A \cap B = \emptyset$.
   (f) Si $A \neq \emptyset$ o $B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B \neq \emptyset$.
   (g) Si $A \cup B = A \cup C$, entonces $B = C$.

6. De una lista completa de los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{2 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.
   (b) $B = \{1/n : n = 1, 2, 3, 4\}$.
   (c) $C = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \cap \mathcal{P}(\{2, 3, 4\})$
   (d) $D = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cap \mathbb{N}$

7. Encuentre una propiedad que sirva para definir por comprensión los siguiente conjunto:

   (a) $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$.
   (b) $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 \dots\}$
   (c) $\{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$
   (d) $\{7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \dots\}$

8. Determine al menos un elemento de cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $\{x \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N}$ que cumple $(z \geq 2,\ z < x$ y $z|x)\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N}$ que cumple $(2z|x)\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}$ se cumple $(y > 0 \Rightarrow xy > 0)\}$