3.7. Sumatorias

Una sumatoria es un símbolo que se ocupa para denotar en forma comprimida la suma sucesiva de los términos de una sucesión.

Definición 2

Se define el símbolo $\sum$ (que se lee sumatoria) inductivamente, por

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$, donde a_n es una sucesión cualquiera.

De esta definición se desprende fácilmente que,

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{1} a_i + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}$$

Note que $\sum_{i=1}^{n} a_i$ representa a una suma desde el primer término de la sucesión a_1 para $i = 1$ hasta el último término que en este caso es a_n para $i = n$. Es decir, en $i = 1$ se inicia la suma de los sucesivos términos de a_i e $i = n$ indica donde se finaliza la suma.

Nota. En este texto se estudiarán las sumatorias finitas simples y dobles, que deberían llamarse series finitas.

En un curso posterior es estudiarán las sumatorias infinitas de los términos de una sucesión, a éstas se suelen llamar *series*.

Número de Términos.

Dada $\sum_{i=p}^{n} a_i$ con $0 \leq p \leq n$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el número de términos siempre es igual a $n - p + 1$ para el caso particular de $p = 1$, dicho número es n.

Propiedades.

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$

   El valor de la sumatoria no depende del símbolo que se use como índice.

2. $\sum_{i=p}^{n} c = c(n-p+1)$, $0 \leq p \leq n$, c es una constante real que no depende del índice i.

   Para el caso particular de $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

3. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$, c es una constante.

4. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

5. Propiedad Telescópica:

$$\sum_{i=p}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_p;\quad 0\leq p\leq n,$$

también

$$\sum_{i=p}^{n}(a_i-a_{i+1})=a_p-a_{n+1},\quad 0\leq p\leq n.$$

6. *a*) $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}a_i=\sum_{i=p-r}^{n-r}a_{i+r};\ p-r\geq 0,\ 0\leq p\leq n$

   b) $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}a_i=\sum_{i=p+r}^{n+r}a_{i-r};\ 0\leq p\leq n$

7. Sea $p\leq n$, entonces $\displaystyle\sum_{i=p}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{p-1}a_i$

Observación.

Todas estas propiedades se prueban en forma sencilla, en base a la definición o bien por inducción.

Sumatorias Notables

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

4. $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} r^{k-1} = r^{p-1}\frac{r^{n-p+1}-1}{r-1}$, $r \neq 1$, $0 \leq p \leq n$

Observación.

Todas estas sumas se prueban por inducción, algunas de ellas se encuentran en los ejemplos o bien en los ejercicios resueltos.

Ejemplo 5

Desarrollar las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k(2k-1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\frac{2^k+1}{k+2}$

De la definición se tiene:

a) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} k(2k-1) = 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot 11 + 7\cdot 13 + 8\cdot 15,$

note que son $5 = 8 - 4 + 1$ términos como debería ser.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1}\frac{2^k+1}{k+2} = -\frac{2^0+1}{2} + \frac{2^1+1}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{2^{n-1}+1}{n+1}.$

Note que en este caso se tiene $n - 1 - 0 + 1 = n$ términos.

Ejemplo 6

Escribir usando $\sum$, las siguientes sumas:

1. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots$ (hasta $n+1$ términos)
2. $2\cdot 7 + 5\cdot 9 + 8\cdot 11 + \ldots + 422\cdot 287$
3. $\frac{8}{3\cdot 5} - \frac{12}{5\cdot 7} + \frac{16}{7\cdot 9} - \ldots$ (hasta p términos).

De inmediato se tiene:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$, note que $n-0+1=n+1$ términos.

2. Notemos que $a_k=(3k-1)(2k+5)$, $k=1,2,\ldots$ la sumatoria debe terminar en $3k-1=422 \wedge 2k+5=287$ de donde en ambos casos $k=141$, por tanto $\displaystyle\sum_{k=1}^{141}(3k-1)(2k+5)$.

3. De inmediato se tiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$.

Ejemplo 7

Sea $a_1=3,\ldots,a_n=6n-3$ calcular $\displaystyle\sum_{k=3}^{6}a_{k-1}a_{k+1}$.

Note que la sumatoria consta de cuatro términos, así,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{6}a_{k-1}a_{k+1} &= a_2a_4+a_3a_5+a_4a_6+a_5a_7\\ &= 9\cdot 21+15\cdot 27+21\cdot 33+27\cdot 39=2340\end{aligned}$$

Ejemplo 8

Vamos a calcular las siguientes sumatorias, aprovechando para ello la propiedad telescópica.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{i+2}-\frac{1}{i+1}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{i=p}^{n+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)$

Por tanto, se tiene para:

a) $$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{i+2} \quad \frac{1}{i+1}\right)=\frac{1}{20+2} \quad \frac{1}{1+1}=\frac{1}{22} \quad \frac{1}{2}= \quad \frac{5}{11}$$

b) Note que en este caso los términos son consecutivos aunque aparentemente parecen no serlo, lo importante es que:

$$a_i=\frac{1}{2i \quad 1} \quad \text{y} \quad a_{i+1}=\frac{1}{2i+1},$$

así pues,

$$\sum_{i=p}^{n+1}\left(\frac{1}{2i \quad 1} \quad \frac{1}{2i+1}\right)=\frac{1}{2p \quad 1} \quad \frac{1}{2n+3}$$

3.9. Ejercicios Resueltos

1. Calcular las siguientes sumatorias:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{2n} k \qquad \text{b)}\ \sum_{k=3}^{n} k \qquad \text{c)}\ \sum_{k=n+1}^{2n-1} k$$

Solución.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2}2n(2n+1) = n(2n+1)$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - (1+2) = \frac{1}{2}n(n+1) - 3$

c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1} k = \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-1+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= n(2n-1) - \frac{1}{2}n(n+1)$

2. Si $a_k = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$ demuestre que $a_k - a_{k-1} = k(k+1)$ y de aquí calcule el valor de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$.

Solución.

$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) - \frac{1}{3}(k-1)(k(k+1)$

$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2-k+1) = k(k+1).$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0 \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}0(0+1)(0+2) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

3. Dada $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

   Calcule $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i-1)$ y $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1} k(k+1)$.

Solución.

Por la propiedad 6), se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i(i-1) &= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)(i+1-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ \sum_{k=n}^{2n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{2n+1} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \\ &= \frac{1}{3}(2n+1)(2n+2)(2n+3) - \frac{1}{3}(n-1)n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)[(2n+1)\cdot 2(2n+3) - (n-1)n] \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(7n^2+17n+6)\end{aligned}$$

4. Calcular:

$$\text{a)}\quad \sum_{j=1}^{n}(j+1)^3 \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$$

Solución.

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j+1)^3 = \sum_{j=2}^{n+1} j^3 = \sum_{j=1}^{n+1} j^3 - 1 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 - 1$

b)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) &= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (n+1)\tfrac{1}{2}n(n+1) - \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

5. Calcule la sumatoria y luego verifique su cálculo por inducción.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1})$$

Solución.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} 1 + \sum_{k=1}^{n+1} 2^{k-1} \\ &= (n+1) + 1\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = n + 2^{n+1}\end{aligned}$$

Ahora, por inducción vamos a demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}) = n + 2^{n+1}$$

i) Para $n = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{1}(1 + 2^{k-1}) = 0 + 2 \Leftrightarrow 1 + 2^0 = 2$ por tanto se cumple.

ii) Sea válido para n, o sea, se verifica que:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(1 + 2^{k-1}) = n + 2^{n+1} \qquad \text{(H.I.)}$$

Por demostrar para $n + 1$, o sea que:

$$\sum_{k=1}^{n+2}(1 + 2^{k-1}) = n + 1 + 2^{n+2} \qquad \text{(T)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+2}(1 + 2^{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n+1}(1 + 2^{k-1}) + (1 + 2^{n+2-1})\\ &= n + 2^{n+1} + 1 + 2^{n+1}\\ &= n + 1 + 2 \cdot 2^{n+1} = n + 1 + 2^{n+2}\end{aligned}$$

6. Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Demostración.

i) Para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = p$:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$$

Por demostrar para $n = p + 1 \Rightarrow$:

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p+1}{p+2}.$$

En efecto, como:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p(p+2)+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)^2}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$

7. Demostrar:

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+3}$$

Demostración.

i) Para $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{1-1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 + 3} \Rightarrow$$

$$(-1)^{1-1} \frac{4(1+1)}{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 3)} = \frac{4(2)}{3 \cdot 5} \Leftrightarrow \frac{8}{15} = \frac{8}{15}$$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{k-1} \frac{1}{2k+3} \qquad \text{(H.I.)}$$

Por demostrar, para $n = k + 1$:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)} = \frac{1}{3} + (-1)^{k} \frac{1}{2k+5}. \qquad \text{(T.)}$$

En efecto, como:

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)}=\frac{1}{3}+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k+3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)}+(-1)^{k}\frac{4(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{3}+(-1)^{k-1}\frac{1}{2k+3}+(-1)^{k}\frac{4(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}\frac{4(i+1)}{(2i+1)(2i+3)}=\frac{1}{3}+\frac{(-1)^{k-1}(2k+5)+(-1)^{k}4(k+2)}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{3}+(-1)^{k}\frac{(-2k-5+4k+8)}{(2k+3)(2k+5)}=\frac{1}{3}+(-1)^{k}\frac{1}{2k+5}$$

8. Demuestre y calcule: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k}k^{2}=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$.

Demostración.

a) Desarrollando:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k}k^{2} &= -1^{2}+2^{2}-3^{2}+4^{2}-5^{2}-\ldots-(2n-1)^{2}+(2n)^{2}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(2k)^{2}-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^{2}\\ &= \sum_{k=1}^{n}[(2k)^{2}-(2k-1)^{2}]\\ &= \sum_{k=1}^{n}[(2k)^{2}-(2k)^{2}+2(2k)-1]\\ &= \sum_{k=1}^{n}(4k-1)\end{aligned}$$

$$b)\quad \begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 4\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1\\ &= 4\tfrac{n(n+1)}{2} - n = 2n^2+n\end{aligned}$$

9. Calcular: $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Solución.

Por fracciones parciales

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1} \Leftrightarrow 1 = A(2k+1) + B(2k-1)$$

$k = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$; $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$, así:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{n}{2n+1}$$

10. Calcular: $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k}$

Solución.

$$\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k} = 1 + \frac{k^2-k+1}{k^4+k} \qquad \text{(división de polinomios)}$$

$$\frac{k^4+k^2+1}{k^4+k} = 1 + \frac{k^2-k+1}{k^4+k} = 1 + \frac{1}{k(k+1)},$$

así:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n}\left[1 + \frac{1}{k(k+1)}\right] = \sum_{k=1}^{n}1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = n + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right]\\ S &= n + \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\right] = \frac{n(n+2)}{n+1}\end{aligned}$$

11. Calcular: $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

Solución.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+2k+1-k^2}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(k+1)^2}{k^2(k+1)^2} - \frac{k^2}{k^2(k+1)^2} \right] \\ S &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

12. Calcular:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \log \left(\frac{k+1}{k} \right)^k$$

Solución.

$S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log \left(\frac{k+1}{k} \right)^k$, desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} S &= \log \frac{2}{1} + \log \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \log \left(\frac{4}{3} \right)^3 + \ldots + \log \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\ S &= \log \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdots \frac{(n+1)^n}{n^n} \right) = \log \frac{(n+1)^n}{n!} \end{aligned}$$

13. Calcular:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \log \left(1 + \frac{1}{k^2+2k} \right)$$

Solución.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} [2\log(k+1) - \log(k)(k+2)] \\ S &= \sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k) - \sum_{k=1}^{n} [\log(k+2) - \log(k+1)] \\ S &= \log(n+1) - \log 1 - (\log(n+2) - \log 2) = \log \frac{2(n+1)}{(n+2)} \end{aligned}$$

14. Calcular:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+k^2+k^4}$$

Solución.

Haciendo $1+k^2+k^4=1+2k^2+k^4-k^2=(1+k^2)^2-k^2$ se tiene:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{(1+k^2-k)(1+k^2+k)}\right).$$

Por otra parte:

$$\frac{k}{(1+k^2-k)(1+k^2+k)}=\frac{Ak+B}{(1+k^2-k)}+\frac{Ck+D}{1+k^2+k}$$

$$\begin{aligned}
k &= (Ak+B)(1+k^2+k)+(Ck+D)(1+k^2-k)\\
k &= (A+C)k^3+(A+B-C+D)k^2+(A+B+C-D)k+B+D
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}
A+C=0\\
A+B-C+D=0\\
A+B+C-D=1\\
B+D=0
\end{array}\right\}\quad
\begin{array}{l}
A=C=0\\
B=\frac{1}{2}\\
D=-\frac{1}{2},\quad \text{de donde}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+k^2-k}-\frac{\frac{1}{2}}{1+k^2+k}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+k^2-k}-\frac{1}{1+(k+1)^2-(k+1)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+n^2+n}\right)
\end{aligned}$$

15. Calcular:

$$S=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt{5k+3}-\sqrt{5k-2}}{\sqrt{25k^2+5k-6}}-\frac{3^{k-4}6^k-4}{2^{k+2}}\right)$$

Solución.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt{5k+3}}{\sqrt{(5k+3)(5k-2)}}-\frac{\sqrt{5k-2}}{\sqrt{(5k+3)(5k-2)}}\right)-\sum_{k=2}^{n}\frac{3^{k-4}2^{k}3^{k}-2^{2}}{2^{k+2}}\\
S &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(5k-2)}}-\frac{1}{\sqrt{(5k+3)}}\right)-\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n}3^{2k-4}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k}}\\
S &= \frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{5n+3}}-\frac{1}{4}\left(\frac{(3^{2})^{n-1}-1}{9-1}\right)+\frac{1}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{1}{2}-1}\\
S &= \frac{1}{\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{5n+3}}-\frac{1}{32}(3^{2n-2}-1)+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

16. Calcular:

$$S=\sum_{j=2}^{n+2}(j-1)^{4}-\sum_{k=1}^{n}k^{4}$$

Solución.

Haciendo $j-1=k$ en la primera sumatoria y para $j=2\Rightarrow k=1$; $j=n+2\Rightarrow k=n+1$, luego

$$S=\sum_{k=1}^{n+1}k^{4}-\sum_{k=1}^{n}k^{4}=\sum_{k=1}^{n}k^{4}+(n+1)^{4}-\sum_{k=1}^{n}k^{4}=(n+1)^{4}.$$

17. Calcular: $S=4\cdot 7+7\cdot 12+10\cdot 17+\ldots+157\cdot 262$.

Solución.

Nótese que $S=\sum_{k=1}^{?}(3k+1)(5k+2)$, tal que:

$$\left.\begin{array}{l}3k+1=157\\ 5k+2=262\end{array}\right\}\Rightarrow k=52,$$

con lo que

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{52}(3k+1)(5k+2)\\
S &= \sum_{k=1}^{52}(15k^2+11k+2)\\
S &= 15\frac{52\cdot 53\cdot 105}{6}+11\cdot\frac{52\cdot 53}{2}+2\cdot 52=738712
\end{aligned}$$

18. Calcular:

$$S=\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{6240}$$

Solución.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{78\cdot 80}\\
S &= \sum_{k=1}^{?}\frac{1}{(k+1)(k+3)}, \qquad \text{tal que}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} k+1=78\\ k+3=80\end{array}\right\}\Rightarrow k=77, \text{ así:}$$

$$S=\sum_{k=1}^{77}\frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

con ayuda de fracciones parciales:

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+3}\Leftrightarrow 1=A(k+3)+B(k+1)$$

Si $k=-3 \Rightarrow B=-\frac{1}{2}$; si $k=-1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$, luego:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{77}\left[\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{77}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{77}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]\\
S &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{79}+\frac{1}{3}-\frac{1}{80}\right]=0{,}404087553
\end{aligned}$$

19. Calcular:

$$S_n=\frac{5}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{9}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots$$

Solución.

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{k(k+1)3^k}$, de donde $\dfrac{2k+3}{k(k+1)}=\dfrac{A}{k}+\dfrac{B}{k+1} \Leftrightarrow$

$A=3$ y $B=-1$, así:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3}{k}-\frac{1}{k+1}\right]\cdot\frac{1}{3^k}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k3^{k-1}}-\frac{1}{(k+1)3^k}\right]\\
S_n &= \frac{1}{1\cdot 3^0}-\frac{1}{(n+1)3^n}=1-\frac{1}{(n+1)3^n}
\end{aligned}$$

20. Probar por inducción que:

$$*\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\sum_{j=1}^{2n}\frac{(-1)^{j+1}}{j};\quad n\geq 1$$

Prueba.

i) Para $n=1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=2}^{2}\frac{1}{k}=\sum_{j=1}^{2}\frac{(-1)^{j+1}}{j} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ii) Sea válido para n, o sea, se cumple $*\forall\ n \geq 1$. Por probar para $n+1$, o sea,

$$\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j},$$

en efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{(-1)^{(2n+1)+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{(2n+2)+1}}{2n+2} \\
&= \sum_{j=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{j+1}}{j}
\end{aligned}$$

Nótese que $(2n+1)+1$ es par y que $(2n+2)+1$ es impar.

21. Sabiendo que $(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$, demostrar que $S = \sum_{k=1}^{n} k^4$ cumple con la ecuación:

$$(n+1)^5 = 1+5S+10\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5\frac{n(n+1)}{2} + n$$

encuentre el valor de S cuando $n = 5$.

Solución.

Haciendo $a = 1, a = 2, a = 3, \ldots, a = n$ en el desarrollo dado, tenemos:

$(1+1)^5 = 2^5 = 1^5 + 5 \cdot 1^4 + 10 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1$

$(2+1)^5 = 3^5 = 2^5 + 5 \cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1$

$(3+1)^5 = 4^5 = 3^5 + 5 \cdot 3^4 \cdot 4 + 10 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 1$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(n+1)^5 = (n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10 \cdot n^3 + 10 \cdot n^2 + 5n + 1$

sumando miembro a miembro y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned}
(n+1)^5 &= 1 + 5(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4) + 10(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + \\
&\quad +10(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 5(1 + 2 + \ldots + n) + 1 \cdot n \\
(n+1)^5 &= 1 + 5S + 10\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 10\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \\
&\quad +5\frac{n(n+1)}{2} + n,
\end{aligned}$$

despejando S y para $n = 5$ se tiene

$$S = \frac{1}{5}\left[6^5 - \left(1 + 10 \cdot \frac{30^2}{4} + 10\frac{330}{6} + 5\frac{30}{2} + 5\right)\right] = 979$$

22. Si $f(k) = \frac{1}{k^2}$

   a) $f(k) - f(k+1) = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

   b) Aproveche a) y calcule la suma de n términos

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} \ldots$$

Solución.

De inmediato,

$$\begin{aligned}
f(k) - f(k+1) &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} \\
&= \frac{(k+1-k)(k+1+k)}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Observe que $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ nos va generando los términos de la suma, luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= \left[\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(k+1)\right] \\
&= f(1) - f(n+1) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

23. Demuestre por inducción

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Demostración.

i) Para $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2-k) = 1(2-1) = 1 = \frac{1}{6}1(1+1)(1+2)$.

ii) Sea válido para $n=j$, se verifica que:

$$\sum_{k=1}^{j} k(j-k+1) = \frac{1}{6}j(j+1)(j+2)$$

Por demostrar para $n=j+1$, o sea,

$$\sum_{k=1}^{j+1} k(j+1-k+1) = \frac{1}{6}(j+1)(j+2)(j+3)$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{j+1} k(j+1-k+1) &= \sum_{k=1}^{j+1}[k(j-k+1)+k] \\
&= \sum_{k=1}^{j+1} k(j-k+1) + \sum_{k=1}^{j+1} k \\
&= \sum_{k=1}^{j} k(j-k+1) + (j+1)(j-(j+1)+1) \\
&\quad + \frac{1}{2}(j+1)(j+2) \\
&= \frac{1}{6}j(j+1)(j+2) + \frac{1}{2}(j+1)(j+2) \\
&= \frac{1}{6}(j+1)(j+2)(j+3)
\end{aligned}$$

24. Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i = 2n^2 + 3n$, calcule el valor de $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} u_i$ y u_n.

Solución.

$$\sum_{i=n+1}^{2n} u_i = \sum_{i=1}^{2n} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_i = 2(2n)^2 + 3(2n) - (2n^2 + 3n),$$

así, $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} u_i = 3n(2n+1)$, ahora como

$$\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n-1} u_i = u_n \Rightarrow 2n^2 + 3n - [2(n-1)^2 + 3(n-1)] = u_n$$

simplificando se llega a $u_n = 4n + 1$.

25. Demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^2 = (n+1)(2n+1)$$

Demostración.

i) Para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} k^2 = (1+1)(2 \cdot 1 + 1) \Rightarrow 1 - 4 + 9 = (2)(3) \Rightarrow 6 = 6$$

ii) Hipótesis inductiva, para $n = j$:

$$\sum_{k=1}^{2j+1} (-1)^{k-1} k^2 = (j+1)(2j+1).$$

Por demostrar para $n = j + 1$, o sea,

$$\sum_{k=1}^{2j+3} (-1)^{k-1} k^2 = (j+2)(2j+3).$$

En efecto, como:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2j+1}(-1)^{k-1}k^2 &= (j+1)(2j+1) \Rightarrow \\
\sum_{k=1}^{2j+1}(-1)^{k-1}k^2 &+ (-1)^{(2j+2)-1}(2j+2)^2 + (-1)^{(2j+3)-1}(2j+3)^2 \\
&= (j+1)(2j+1) + (-1)^{2j+1}(2j+2)^2 + (-1)^{2(j+1)} \cdot (2j+3)^2
\end{aligned}$$

como $2j+1$ es impar y $2(j+1)$ es siempre par, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2j+3}(-1)^{k-1}k^2 &= (j+1)(2j+1) - (2j+2)^2 + (2j+3)^2 \\
&= 2j^2 + 3j + 1 - (4j^2 + 8j + 4) + (4j^2 + 12j + 9) \\
&= 2j^2 + 3j + 1 + 4j + 5 \\
&= 2j^2 + 7j + 6 \\
&= (j+2)(2j+3)
\end{aligned}$$

26. Se define $0! = 1, 1! = 1, \ldots, (n+1)! = n!(n+1)$. Por tanto, $(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1)$.

    Calcular:

    a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kk!$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!$

    Solución.

    a)
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kk! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)k! - k!] \\
&= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1!
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad \sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! &= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-2k]k! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2k! - 2\sum_{k=1}^{n}kk! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+1)! - 2[(n+1)!-1!] \\
&= \sum_{k=2}^{n+1}kk! - 2(n+1)! + 2 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}kk! - 1\cdot 1! - 2(n+1)! + 2 \\
&= (n+2)! - 1! - 1\cdot 1! - 2(n+1)! + 2 \\
&= (n+2)! - 2(n+1)! = (n+1)!n
\end{aligned}
$$

27. Calcular:

$$\text{a)}\ \sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{k}{(k+1)!} \qquad\qquad \text{b)}\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1-k^2}{(k+1)!}$$

Solución.

a)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=n+1}^{2n-1}\frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=n+1}^{2n-1}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \tfrac{1}{(n+1)!} - \tfrac{1}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

b) Con el fin de evitar artificios algebraicos como el efectuado en a), a continuación damos un método similar al de fracciones parciales para separar en fracciones términos que contienen factoriales.

$$\frac{k+1-k^2}{(k+1)!} = \frac{A}{(k+1)!} + \frac{B}{k!} + \frac{C}{(k-1)!} \qquad (1)$$

Tres constantes pues el grado del numerador es dos, dos constantes si el grado es uno como en a) y los denominadores decrecientes a partir de $(k+1)!$ uno por cada constante.

Así, de (1) se tiene que $k+1-k^2 = A + B(k+1) + Ck(k+1)$.
Si $k=-1 \Rightarrow A=-1$.
Si $k=0 \Rightarrow A+B=1 \Rightarrow B=2$.
Si $k=1 \Rightarrow A+2B+2C=1 \Rightarrow C=-1$.
Se obtienen los mismos resultados por igualdad de coeficientes, por tanto queda

$$\frac{k+1-k^2}{(k+1)!} = \frac{-1}{(k+1)!} + \frac{2}{k!} - \frac{1}{(k-1)!},$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1-k^2}{(k+1)!} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1-k^2}{(k+1)!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{-1}{(k+1)!} + \frac{2}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k-1)!} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{0!} \\
&= 1 - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

28. Calcular:

$$\frac{1 \cdot 2^1}{3!} + \frac{2 \cdot 2^2}{4!} + \frac{3 \cdot 2^3}{5!} + \ldots \qquad (n \text{ términos})$$

Solución.

Notemos que $a_k = \frac{k}{(k+2)!}2^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ siguiendo el método del problema anterior se tiene:

$$\frac{k}{(k+2)!} = \frac{A}{(k+2)!} + \frac{B}{(k+1)!},$$

de donde $k = A + B(k+2)$.

Si $k=-2 \Rightarrow A=-2$ y si $k=0 \Rightarrow B=1$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k+2)!}2^k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{2}{(k+2)!}\right)2^k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{(k+1)!}-\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}\right)$$

finalmente para la propiedad telescópica se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k+1)!}2^k = \left(\frac{2!}{2!}-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\right) = 1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

29. Calcular:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}, \qquad p \neq 0.$$

Solución.

Nótese que:

$$\frac{A}{k(k+1)\dots(k+p-1)} + \frac{B}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)} = \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$$

$$\Leftrightarrow A(k+p)+Bk=1$$

Si $k=0 \Rightarrow A=\frac{1}{p}$ y si $k=-p \Rightarrow B-\frac{1}{p}$, luego:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left[\frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}\right] \\ S_n &= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{1\cdot 2\dots p}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}\right]. \end{aligned}$$

Nótese que:

$$u_k = \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p-1)} \quad \text{y} \quad u_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}$$

30. Calcular: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}(ai+bj),\ a,b$ constantes.

Solución.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{n}(ai+bj) &= \sum_{i=1}^{n}\left(ai\sum_{j=2}^{n}1+b\sum_{j=2}^{n}j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[ai(n-1)+b\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}a(n-1)n(n+1)+\frac{1}{2}bn[(n(n+1)-2)]\end{aligned}$$

31. Calcule: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{7}(2i^2j-20)$.

Solución.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{7}(2i^2j-20)\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(2j\sum_{i=1}^{7}i^2-20\sum_{i=7}^{7}1\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[2j\frac{7(7+1)(14+1)}{6}-20\cdot 7\right]\\ &= 280\sum_{j=1}^{n}j-140\sum_{j==1}^{n}1\\ &= 140n(n+1)-140n\\ &= 140n^2\end{aligned}$$

32. Calcule: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{2^j}{3^i}$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{2^j}{3^i} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{2^j}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3^i}\cdot\sum_{j=1}^{i}2^j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}\cdot 2\frac{2^i-1}{2-1}=2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^i-\left(\frac{1}{3}\right)^i\right]\\
&= 2\left(\frac{2}{3}\,\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\frac{2}{3}-1}\right)-2\frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}{\frac{1}{3}-1}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n-4\left(\frac{2}{3}\right)^n+3
\end{aligned}$$

33. Calcular la suma de n–términos de:

a) $1\cdot 2+(1\cdot 2+2\cdot 3)+(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4)+\ldots$

b) $2\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2}+3\cdot\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}\right)+4\cdot\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}\right)+\ldots$

c) $\dfrac{n+1}{n(n+1)}+\left[\dfrac{n+2}{n(n+1)}+\dfrac{n+2}{(n+1)(n+2)}\right]+$
$+\left[\dfrac{n+3}{n(n+1)}+\dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{n+3}{(n+2)(n+3)}\right)+\ldots.$

Solución.

$$\begin{aligned}
a)\quad S_n &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}j(j+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}j^2+\sum_{j=1}^{k}j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)\right]\\
&= \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

$$b)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{k+1}{j(j+1)} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$c)\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{n+j-1}-\frac{1}{n+j}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(n+k)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{2}(n+1)$$

34. Calcule:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{2}{1+2}-\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{3}{1+2+3}-\frac{2}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{1+2\ldots+n}-\frac{2}{n}\right).$$

Solución.

Note que la suma se puede expresar por:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\sum_{j=1}^{k} j}-\frac{2}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{\frac{1}{2}k(k+1)}-\frac{2}{k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1}\right) = -\frac{2n}{n+1}$$

35. Calcular:

$$\text{a)}\quad \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=1}^{i}2^{i+j} \qquad \text{b)}\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{m}\frac{k+1}{i^2-1} \qquad \text{c)}\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j} i\right)^{-1}(k+1)$$

Solución.

$$a)\quad \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{j=1}^{i}2^{i+j} = \sum_{i=2}^{n+1}2^i\sum_{j=1}^{i}2^j = \sum_{i=1}^{n+1}2^i\cdot 2\frac{2^i-1}{2-1}$$
$$= 2\sum_{i=2}^{n+1}(2^{2i}-2^i) = 2\sum_{i=2}^{n+1}2^{2i} - 2\sum_{i=2}^{n+1}2^i$$
$$= 2\cdot 2^4\frac{2^{2n}-1}{2^2-1} - 2\cdot 2^2\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$= \frac{1}{3}(2^{2n+5}-2^5) - 2^{n+3} + 2^3$$

$$b)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{m}\frac{k+1}{i^2-1} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{(i-1)(i+1)}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1\right)\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i+1}\right)$$
$$= \left[\frac{1}{2}n(n+1)+n\right]\frac{1}{2}\left[\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)+\sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}n(n+3)\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}\right)\right]$$

$$c)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j}i\right)^{-1}(k+1) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{j(j+1)}\right)(k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}2(k+1)\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}2(k+1)\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}2k = n(n+1)$$

36. Calcule la suma de todos los números del siguiente cuadro

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 \\
1 & + & 2 \\
1 & + & 2 & + & 3 \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & + & 2 & + & 3 & + & + & \dots & + & n
\end{array}$$

Solución.

Primera forma: Sumando por filas.

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+n)$$

es decir, expresándolo como doble sumatoria, queda:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}k &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Segunda forma: Sumando por columnas.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n-1}2+\sum_{k=1}^{n-2}3+\ldots+\sum_{k=1}^{1}n$

$= 1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-3)+\ldots+n\cdot 1$

$\displaystyle=\sum_{i=1}^{n}i(n-i+1)=(n+1)\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}i^2$

$\displaystyle=(n+1)\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

naturalmente da el mismo resultado.

37. Calcular:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}jx^{i-1}\quad\text{con}\quad x\neq 1$$

Expandiendo la doble suma se tiene:

$$\begin{aligned} S_n &= 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} \\ xS_n &= x+3x^2+6x^3+10x^4+15x^5+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}x^{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}x^n. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro, resulta:

$$\begin{aligned} (1-x)S_n &= 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\ldots+nx^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}x^n \\ x(1-x)S_n &= x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+(n-1)x^{n-1}+nx^n-\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro nuevamente:

$$\begin{aligned} (1-x)^2S_n &= 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}-\frac{n(n+1)}{2}x^n \\ &\quad -nx^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1} \\ (1-x)^2S_n &= \frac{x^n-1}{x-1}-\frac{n(n+3)}{2}x^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1} \\ S_n &= \frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{x^n-1}{x-1}-\frac{n(n+3)}{2}x^n+\frac{n(n+1)}{2}x^{n+1}\right] \end{aligned}$$

38. Calcular la suma del siguiente cuadro:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & 5 & 7 & & \\ & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \\ 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 \end{array}$$

$(n+1)$ filas.

Solución.

La suma se puede expresar como sigue:

$$1+(3+5+7)+(9+11+13+15+17)+\ldots$$

o bien,

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)+\sum_{k=2}^{4}(2k-1)+\sum_{k=5}^{9}(2k-1)+\ldots$$

Luego, la suma pedida es:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i^2+1}^{(i+1)^2}(2k-1) &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{(i+1)^2}(2k-1)-\sum_{k=1}^{i^2}(2k-1)\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n}[(i+1)^4-i^4]=(n+1)^4\end{aligned}$$

3.10. Ejercicios Propuestos

1. Desarrollar las siguientes sumatorias:

a) $\displaystyle\sum_{k=3}^{6}\frac{3^{2k}-1}{k+2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(n+1)k!$ c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{k}{(n-k)}$

Respuesta.

a) $\frac{3^6-1}{5}+\frac{3^8-1}{6}+\frac{3^{10}-1}{7}+\frac{3^{12}-1}{8}$

b) $-(n+1)1!+(n+1)2!-(n+1)3!+\ldots+(-1)^n(n+1)n!$

c) $\frac{n+1}{-1}+\frac{n+2}{-2}+\frac{n+3}{-3}+\ldots+\frac{2n+1}{-(n+1)}$

2. Escribir usando el símbolo $\sum$ las siguientes sumas:

a) $1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 3+\ldots$ hasta n términos.

b) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}$.

c) $-1\cdot 1+3\cdot 2^1+7\cdot 2^2+\ldots+223\cdot 2^{56}$

Respuesta.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)i$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^{k-1}}$

c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{57} (4j-5)2^{j-1}$

3. Calcular:

   a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k-1)(k+1)$ b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} (k-3^{-k})$ c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+1} (n-k)$

   Respuesta.

   a) $\frac{1}{6}n(n-1)(2n+5)$

   b) $\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}-45-\frac{1}{2\cdot 3^9}$

   c) $n(n+2)-\frac{1}{2}(3n^2+7n+2)$

4. Calcular:

   a) $\displaystyle\sum_{i=20}^{n} \left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)$

   b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{3}{2k}-\frac{3}{2k+2}\right)$

   c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a^i-a^{i+1}}{a^{2i+1}}\right)$, $a \neq 0.$

   d) $\displaystyle\sum_{k=4}^{60} \frac{k}{(k+1)!}$

   Respuesta.

   a) $\frac{1}{21}-\frac{1}{n+2}$

   b) $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)$

   c) $\frac{1}{a^{n+1}}-1$

   d) $\frac{1}{4!}-\frac{1}{61!}$

5. Determine el término que falta en las siguientes igualdades:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6k}-?\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6n+6}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(?-\frac{3}{2k+5}\right)=\frac{3}{2n+7}-\frac{3}{7}$

   c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n}2^{2i+1}=\sum_{i=?}^{2n+4}?$

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+1)}=\sum_{k=2}^{n+1}?$

   Respuesta.

   a) $\frac{1}{6k+6}$

   b) $\frac{3}{2k+7}$

   c) $i=4$ y 2^{2i-7}

   d) $\frac{1}{(k-1)(2k-1)}$

6. Calcular:

   a) $2\cdot 5+4\cdot 6+6\cdot 7+\ldots+480\cdot 244$

   b) $2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot 9+\ldots+28\cdot 57$

   c) $3^3-4^3+5^3-6^3+\ldots-46^3$

   Respuesta.

   a) 9543600

   b) 15831

   c) -50248

7. Calcular:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k k$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k k^2$

Respuesta.

a) $-(n+1)$

b) $(n+1)(2n+1)$

8. Calcule la suma de n términos de:

a) $1^2 + 2\cdot 2^2 + 3^2 + 2\cdot 4^2 + \ldots + n^2$, para n impar.

b) $1\cdot n^2 + 2(n-1)^2 + 3(n-2)^2 + \ldots$

Respuesta.

a) $\frac{1}{2}(n+1)n^2$

b) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

9. Sumar $2n$ términos de:

a) $2\cdot 5 + 3\cdot 6 + 4\cdot 7 + \ldots$

b) $3\cdot 6 + 5\cdot 10 + 7\cdot 14 + \ldots$

Respuesta.

a) $\frac{4}{3}n(n+2)(2n+5)$

b) $\frac{4}{3}n(16n^2 + 24n + 11)$

10. Sumar $2n+1$ términos de:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \ldots$$

Respuesta.

$4n^3 + 9n^2 + 6n + 1$

11. Calcular la suma de n términos de:

    a) $\frac{3}{1\cdot 3}+\frac{17}{2\cdot 4}3+\frac{11}{3\cdot 5}3^2+\frac{15}{4\cdot 6}3^3+\dots$

    b) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$

    c) $1+\frac{4}{3}+\frac{7}{3^2}+\frac{10}{3^3}+\dots$

    d) $\frac{1^2}{2\cdot 3}4+\frac{2^2}{3\cdot 4}4^2+\frac{3^2}{4\cdot 5}4^3+\dots$

    e) $\frac{170}{5\cdot 7}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{194}{6\cdot 8}\cdot\frac{1}{5^7}+\frac{218}{7\cdot 9}\cdot\frac{1}{5^8}+\dots$

    Respuesta.

    a) $\frac{1}{2}\,\frac{(4n+5)3^n}{(n+1)(n+2)}-\frac{5}{4}$

    b) $\frac{1}{4}\,\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

    c) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\,\frac{3^{n+1}-6n-5}{3^{n-1}}$

    d) $\frac{1}{3}\,\frac{(n-1)4^{n+1}+2n+4}{n+2}$

    e) $\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{6n+35}{(n+5)(n+6)}\cdot\frac{1}{5^{n+5}}$

12. Determine el número natural n para el cual se cumpla:

$$3\sum_{k=1}^{n-1}(k-4)+6=\sum_{k=n}^{2n-1}(k-4)$$

    Respuesta.

    $n=4$

13. Calcular:

    a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{4j}{i}$

    b) $\displaystyle\sum_{j=4}^{m}\sum_{i=1}^{n}3^{i+j}$

c) $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{4j^2+1}{4j^2-1},\ m>n$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i(k-i)$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{n+k}{(n+j-1)(n+j)}$

f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k2^{k+j}$

g) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right)$

Respuesta.

a) $n(n+3)$

b) $\frac{243}{4}(3^{m-3}-1)(3^n-1)$

c) $(m-n)\left(n-\frac{1}{2n-1}\right)$

d) $\frac{1}{2}n^2(n+1)(1-n)$

e) $\frac{1}{2}(n+1)$

f) $\frac{1}{3}(n-1)2^{2n+3}-\frac{32}{9}(2^{2(n-1)}-1)+4(2^n-1)$

g) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)+2^{n+1}-5$

14. Demostrar por inducción:

a) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2n}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)}=\frac{1}{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log(n+1)$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{n+1-j}{j}$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x=\frac{\operatorname{sen}2nx}{2\operatorname{sen}x}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\dots(k+p)=\frac{1}{p+2}n(n+1)\dots(n+p+1),\ p\in\mathbb{N}.$

15. Calcular:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k^2}{k^2-1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+k^2+1}{k^2+k}$

Respuesta.

a) $\frac{1}{4}(4n+3)-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(n+2)}$

b) $\frac{1}{2}n\left(n+1+\frac{2}{n+1}\right)$

16. Calcule la suma de n–términos de:

a) $1\cdot 2+(1\cdot 2+2\cdot 3)+(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4)+\dots$

b) $2(-1)+(2(-1)+4\cdot 0)+(2(-1)+4\cdot 0+6\cdot 1)+\dots$

c) $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\dots$

Respuesta.

a) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$

b) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n-3)$

c) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

17. Determine la suma de n términos (los que se encuentran entre paréntesis).

    (2+4+6)+(8+10+12+14+16+18)+(20+22+24+26+28+30+32+34+36)+. . .

    Respuesta.

    $\frac{3}{2}n(n+1)\left[\frac{3}{2}n(n+1)+1\right]$

18. Demostrar:
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}k^2=\sum_{i=1}^{n}i(n-i+1)^2$$

19. Si $S_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{k+1}\right)^{i-1}$; $k=1,2,\ldots,n$. Demuestre que:
$$\sum_{j=n+1}^{2n}S_j=3\sum_{k=1}^{n}(n-k+1).$$

20. Hallar el número de esferas en un apilamiento sobre una base rectangular cuyos lados contienen 15 y 20 esferas, si el tope es una línea.

    Respuesta.

    1840.

21. Demuestre que la suma de todos los naturales impares que son menores que $6n$ y que no son múltiplos de 3, es $6n^2$.

22. Probar que la suma de los productos en parejas (distintas) de los n primeros números naturales impares es:
$$\frac{1}{6}n(n-1)(3n^2-n-1).$$

23. Demuestre que la suma de los productos de todas las parejas de números distintos que se pueden sumar con los n primeros números naturales es:
$$\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2).$$

24. Esferas iguales son apiladas en forma de una pirámide de base cuadrada. Hallar el número de esferas en una pirámide incompleta que tiene n capas si cada lado de la base contiene $2n$ esferas.

    Respuesta.

    $\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)$.

25. Sea la sucesión definida por:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = 2a_{n-1}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

   a) Examinando algunos valores, conjeture una fórmula para a_n, luego verifíquela por inducción.

   b) Calcular $\displaystyle\sum_{k=4}^{2n+1} k a_k$ para $n \geq 2$.

    Respuesta.

    b) $n2^{2n+2} - 16$.

26. Calcular:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-2}{(k+2)!}$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+5k+5}{(k+4)!}$

    Respuesta.

   a) $\frac{1}{2} - \frac{n+1}{(n+2)!}$

   b) $-\frac{n}{(n+2)!}$

   c) $\frac{1}{8} - \frac{1}{(n+4)(n+2)!}$

27. Si $a_i = i^2(i-1)^2(2i-1)$, simplifique $a_{i+1} - a_i$ y aplíquela para calcular: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

28. Si $S_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} j$ demuestre que:

$$\sum_{j=1}^{n} S_i S_{n-i+1} = \frac{1}{120} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

29. Ocupe la identidad

$$\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x = -2\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}\frac{x}{2},$$

para demostrar que:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(kx) = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x}.$$