

AYUDANTÍA 12: SERIES DE POTENCIAS Y POLINOMIO DE TAYLOR

Def:

SERIE DE POTENCIAS ES UNA SERIE $(\sum a_n)$ DONDE EL TÉRMINO GENERAL ES DE LA FORMA $a_n(x-c)^n$. SE DICE QUE ES UNA SERIE DE POTENCIAS CENTRADA EN c , CON $c \in \mathbb{R}$.

PARA UNA SERIE DE POTENCIAS SE CUMPLE UNA DE ESTAS AFIRMACIONES

- LA SERIE SÓLO CONVERGE EN c
- EXISTE UN NÚMERO REAL $R > 0$ TAL QUE LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE CUANDO $|x-c| < R$ Y DIVERGE PARA $|x-c| > R$
- LA SERIE ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE PARA TODO REAL.

PARA CALCULAR EL RADIO DE CONVERGENCIA SE UTILIZA EL CRITERIO DE CONVERGENCIA.

SI LA SERIE CONVERGE PARA UN $R > 0$, LA FUNCIÓN DEFINIDA POR $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ES CONTINUA Y SE CUMPLE

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(a_n(x-c)^n)}{dx}$$

SERIES IMPORTANTES

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)^n = \frac{1}{x} \quad \text{PARA } x \text{ CENTRADA EN } 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} = \ln(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x) \quad ; \text{ CON } x \text{ CENTRADA EN CERO}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \quad ; \text{ CON } x \text{ CENTRADA EN CERO}$$

TEOREMA DE TAYLOR

Si f PERMITE UNA REPRESENTACIÓN EN SERIES DE POTENCIAS CONVERGENTE
 $f(x) = \sum a_n(x-c)^n$ ENTONCES $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

SIENDO $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ CADA SERIE DE TAYLOR, SI $c=0$

SE CONOCE COMO SERIE DE MACLAURIN.

PARA LA SERIE DE TAYLOR, LA n -ÉSIMA SUMA PARCIAL CUMPLE

$$P_n(x) = f(x) - R_n(x)$$

ONDE $R_n(x)$ SE LE LLAMA RESIDUO DE TAYLOR Y DICE QUE
EXISTE UN z ENTRE x Y c TAL QUE

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

PROBLEMAS

P1) BUSQUE EL RADIO E INTERVALO DE CONVERGENCIA

$$a) \sum \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

USANDO CRITERIO DEL COCIENTE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^{2n+1}} \right| < 1$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^2 \cdot x^{2n+1}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \right| = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow R = \infty$$

$$b) \sum \frac{n! x^n}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^n x \right| < 1$$

$$|e^{-1} x| < 1 \Rightarrow |x| < e$$

$\Rightarrow$ RADIO DE CONVERGENCIA $R=e$
INTERVALO $I =]-e, e[$

P2) PROVEER QUE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

NOTAR QUE SI

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{DE CONVERGENCIA PARA } |x| < 1$$

POR LO TANTO ES INTEGRABLE EN $x \in]-1, 1[$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$\arctg(x) \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1$$

$$\arctg(1) - \arctg(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} [1-0]$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

P3) ENCUENTRA LA SERIE DE POTENCIAS DE

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ RECORRANDO QUE $\sum r^n$ CONVERGE SI $|r| < 1$
CONVERGE A $\frac{1}{1-r}$, SI $r = 1+x$

$$\sum (1+x)^n = \sum r^n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-(1+x)} = \frac{-1}{x}$$

ESTO SE CUMPLE PARA $|r| < 1 \Rightarrow -1 < 1+x < 1 \quad / -1$

$$\Rightarrow x \in]-2, 0[$$

b) $f(x) = xe^x$ Y ÚSELO PARA PROBAR QUE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} = 1$

SI $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $/ \cdot x$

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

AHORA INTEGRANDO POR PARTE

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1$$

Y POR EL MISMO CAMINO $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} x^{n+2} \Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)n!} = 1$

c) $f(x) = \ln(3+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+(x/3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-(-x/3)} \quad \text{siendo } r = (-x/3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^n \quad \text{la cual converge con } r=3$$

ENTONCES PUEDE INTEGRARSE EN $[0, x]$, $x < 3$.

$$\int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} dt$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{3^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \Big|_0^x$$

ADemás $f(x) - f(0) = \ln(3+x) - \ln(3)$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(3) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$$

P4) Buscamos el RADIO DE CONVERGENCIA DE

a) $\sum (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n} x^n$

critero M72 n-ésima

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n} x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^2 x \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1/2}{n-2/3}\right)^2 |x| < 1$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 |x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{16}{9} = R$$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{k-1}}{3^k k^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^n}{3^{n+1} (n+1)^2} \cdot \frac{3^n n^2}{(x-2)^{n-1}} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-2|}{3} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{|x-2|}{3} \cdot 1 < 1$$

$$\Rightarrow |x-2| < 3$$

$$\Rightarrow -1 < x < 5$$

ANALIZANDO EXTREMOS

$$x=5 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{3^k k^2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{converge por la serie}$$

$$x=-1 \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3 \cdot k^2} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

Como $\frac{1}{k^2}$ es decreciente y $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} = 0$

por criterio de Leibnitz converge.

Por lo tanto la serie converge para $x \in [-1, 5]$ con $R=3$.

PS) Calcule el polinomio de Taylor de

a) $f(x) = e^{\sin x}$ grado 3, con N.A. en cero

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^{\sin x} \cos^2(x) + e^{\sin x} \cdot \sin(x) \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^{\sin x} \cos^3(x) + e^{\sin x} \cos(x) \cdot \sin(x) + e^{\sin x} \cos^2(x) + e^{\sin x} \cdot 2 \cos(x) \sin(x)$$

$$f'''(0) = 2$$

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$$

$$= 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{2}{3!} x^3 = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3$$

b) $f(x) = \ln(x)$; $n=4$; $c=1$

c) $f(x) = x^2 \cos x$; $n=2$; $c=\pi$