

AYUDANTIA 9: L'HOPITAL e INTEGRALES IMPROPIAS.Repaso:REGLA DE L'HOPITAL (DE JOHANN BERNULLI)

Si f y g son derivables en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c , suponiendo que $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, excepto posiblemente c . Si el límite de $f(x)/g(x)$ cuando x tiende a c se indefinire de la forma $0/0$; ∞/∞ ; $(-\infty)/\infty$ o $-\infty/-\infty$ ENTONCES

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

poniendo ser aplicado a los límites laterales, c^+ , c^- . Además si $x \rightarrow \infty$ y este se indefinire de la forma $0/0$ o $-\infty/-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

INTEGRALES IMPROPIAS1ª especie

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a, \infty[$ si:

- $\forall x \in]a, \infty[$, f es integrable en $[a, x]$ y además
- existe el límite definido por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t) dt$$

Si el límite existe diremos que la integral converge, sino DIVERGE.

DEL MISMO MODO SE DEFINEN LAS INTEGRALES IMPROPIAS DE 1ª ESPECIE

como

$$i) \int_{-\infty}^b f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt.$$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad \text{DONDE } c \text{ puede ser cualquiera}$$

EN ESTA ÚLTIMA ES IMPORTANTE QUE AMBAS INTEGRALES EXISTAN O SEAN CONVERGENTES. SI ALGUNA NO CONVERGE LA INTEGRAL DIVERGE.

SEGUNDA ESPECIE

$[a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, diremos que f es integrable en $[a, b[$ SSI

i) $\forall x \in]a, b[$ f es integrable en $[a, x]$

ii) el límite $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ existe.

ESTAS FUNCIONES SE CARACTERIZAN POR TENER ASÍNTOTA VERTICAL EN $x = b$

DEL MISMO MODO SE DEFINEN

i) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ DONDE a ES ASÍNTOTA

ii) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ CON $c \in]a, b[$ CUALQUIERA

ESTA FUNCIÓN CONVERGE SSI AMBAS CONVERGEN POR SEPARADO

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

COMPARACIÓN: SEAN $f(x)$ Y $g(x)$ FUNCIONES CONTINUAS EN $[a, \infty[$ TALES QUE:

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

ENTONCES, SI

$$\int_a^\infty g(x) dx \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx \text{ CONVERGE}$$

$$\text{RECÍPROCAMENTE SI } \int_a^\infty f(x) dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_a^\infty g(x) dx \text{ DIVERGE}$$

COMPARACIÓN EN EL LÍMITE: SEAN $f(x)$ Y $g(x)$ FUNCIONES CONTINUAS EN $[a, \infty[$ Y NO NEGATIVAS EN $[b, \infty[$, DONDE $b \geq a$ TALES QUE:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

ENTONCES LAS INTEGRALES $\int_a^\infty f(x) dx$ Y $\int_a^\infty g(x) dx$ SON AMBAS CONVERGENTES O DIVERGENTES.

PROBLEMAS:

P1) Calcular los siguientes límites

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(x)}{x \cdot 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{9x^2} = 0$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - 1 + x}{\arctan(x) - \pi/4} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{1+x^2}} = 4$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2)^{1/x} = [(+\infty)^0] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln(x^2 + 2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x} \approx \frac{\infty}{\infty}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 2}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2 + 2} = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x^2 + 2)} = e^0 = \underline{1}$$

P2) DEMUESTRE CONVERGENCIA O DIVERGENCIA

$$i) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4(1+x^4)}$$

NOTAR QUE PARA TODO $x \geq 1$ SEMPRE

$$0 \leq x^4 \leq x^4 + x^8 = x^4(1+x^4)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^4 + x^8} \leq \frac{1}{x^4}$$

$$\text{Y COMO } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \int_1^{\infty} x^{-4} dx \text{ converge por ser } \alpha \geq 1$$

Por criterio de comparación $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4(1+x^4)}$ CONVERGE.

$$ii) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-7)^2}$$

NOTAR QUE EN $x=7$ TIENE DISCONTINUIDAD, POR LO TANTO HAY QUE SEPARAR Y EVALUAR EN TORNO A $x=7$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-7)^2} = \int_0^7 \frac{dx}{(x-7)^2} + \int_7^{\infty} \frac{dx}{(x-7)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7^-} \int_0^{\epsilon} \frac{dx}{(x-7)^2} = \lim_{x \rightarrow 7^-} \left. \frac{-1}{x-7} \right|_0^{\epsilon} = \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{-1}{\epsilon-7} - \frac{1}{7} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dx}{(x-7)^2} = \lim_{x \rightarrow 7^+} \left. \frac{-1}{x-7} \right|_{\epsilon}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{-1}{4} + \frac{1}{\epsilon-7} = \infty$$

$\Rightarrow$ DIVERGE

$$iii) \int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

dos formas

$$1^{\circ} \sin(x^{-2}) \in]0, \sin(1)] \Rightarrow \sin(1/x^2) > 0 \forall x \geq 1$$

$$2^{\circ} \sin(x^{-2}) < x^{-2}$$

$$\text{como } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{\infty} \sin(x^2) dx \text{ converge}$$

2ª forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x^2)}{1/x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

$$\Rightarrow \text{como } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{\infty} \sin(1/x^2) dx \text{ converge}$$

$$iv) \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$0 < 1 \leq \sqrt{x} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1 \quad \forall x \geq 1$$

$$0 < \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 1$$

$$\text{como } \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-1} - e^{-t}] = e^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \text{ converge}$$

$$v) \int_0^{\infty} \frac{1}{x+e^x} dx$$

tenemos que tanto x como $e^x \geq 0$

$$0 < e^x \leq x + e^x \\ \Rightarrow 0 < \frac{1}{x+e^x} < \frac{1}{e^x}$$

$$\text{como } \int_0^{\infty} e^{-x} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{x+e^x} dx \text{ converge.}$$

$$vi) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+3)(x+2)} dx = \int_0^{\infty} \frac{(x+3) - (x+2)}{(x+3)(x+2)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} dx$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x+2) \Big|_0^t - \ln(x+3) \Big|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{t+2}{2}\right) - \ln\left(\frac{t+3}{3}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left[\frac{3}{2} \left(\frac{t+2}{t+3}\right)\right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln\left[\frac{3}{2} \left(\frac{1+\frac{2}{t}}{1+\frac{3}{t}}\right)\right]$$

$$\text{por continuidad de } \ln(x) \Rightarrow = \ln\left[\frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{2}{t}}{1+\frac{3}{t}}\right)\right] \\ = \ln\left[\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1+0}{1+0}\right)\right] = \ln(3/2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx \text{ converge.}$$

$$v) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx \quad \text{separamos en los puntos conflictivos, son } x=0 \text{ y } x=1 \\ = \underbrace{\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx}_{I_2} \quad \text{con } b \in]0,1[$$

en I_1 criterio del cociente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x} = 1$$

y como para integrales de la forma $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$ $a < 1 \Rightarrow$ converge.

→ I_1 converge

Además para I_2 usamos $g(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\text{como } \int_b^1 g(x) = \int_b^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha} dx \Rightarrow \alpha \geq 1 \Rightarrow \text{diverge}$$

por lo tanto I_2 diverge $\Rightarrow$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} dx \text{ diverge.}$$

$$\text{vi)} \int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3/2}} dx$$

$$\text{usando } g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(2x)}{x^{3/2}}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$$

$$\text{como } \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^{1/2} dx \text{ con } \alpha < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin(2x)}{x^{3/2}} dx \text{ converge}$$

$$\text{vii)} \int_1^\infty e^{-x} \ln(x) dx$$

$$\text{tenemos que } e^x \geq x^3 \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{x^3}$$

$$\text{además, } \ln(x) \leq x$$

$$\text{por lo tanto } e^{-x} \ln(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\text{y como } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ converge } \Rightarrow \int_1^\infty e^{-x} \ln(x) \leq \frac{1}{x^2} \text{ converge.}$$

viii) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} dx$ NOTAR que $\frac{1}{\sqrt{x+x^4}} \approx \frac{1}{x^2}$

comparacion al limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+x}} = 1$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 \sqrt{1+1/x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$

como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} dx$ converge.

ix) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x(e^x + 1)} = \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1}$
 $u = e^x$
 $du = e^x dx$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{e^t} \frac{du}{u^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg(u) \Big|_1^{e^t}$
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg(e^t) - \arctg(1)$
 $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

x) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ comparando con $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{\sqrt{x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Por L'Hopital $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Ahora $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} dx$ diverge por $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ diverge.

otra forma es INTEGRAR por parte

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x) \ln(x) \Big|_1^t = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} dx$$

$$g'(x) = \frac{dx}{x} \Rightarrow g(x) = \ln(x)$$

$$\Rightarrow 2 \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(x) \ln(x) \Big|_1^t$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln^2(x) \Big|_1^t =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \ln^2(t) - 0 = \infty$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx \text{ diverge.}$$