# Polinomios:

$P(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son coeficiente del polinomio $P$

Sea $p$ y $q$ dos polinomios, $P = q \iff$ sus coeficientes son iguales

Diremos que el grado de un polinomio es $n$ si y solo si $a_n \neq 0$
Si $P(x) = 0$ (polinomio nulo), el grado es $-\infty$

## Teorema División

Sean $p, d$ polinomios tal que $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r$ tal que

$$p = q \cdot d + r \quad (1)$$

Donde (1) se llama división con resto de $P$ por $d$
$q(x)$ se llama cuociente
$r(x)$ se llama resto, si $r(x) = 0$ diremos que $d(x)$ divide a $P(x)$

## Teorema del Resto

Sea $P(x)$ polinomio y $c \in \mathbb{R}$. El resto de dividir $P(x)$ por el polinomio $(x - c)$ es exactamente $P(c)$. Diremos que $c$ es raíz de $P(x)$ si el resto es cero

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ con coeficientes $a_0, \dots, a_n$. Una forma en que se pueden encontrar raíces racionales ($\in \mathbb{R}$) de $P$ es definir el conjunto

$A = \{$números que dividen a $a_0\}$ ; $B = \{$números que dividen a $a_n\}$
y formar el conjunto $\frac{A}{B}$ que es la división de cada elemento de $A$ con los elementos de $B$ y luego probar con cada número de $\frac{A}{B}$ si es raíz de $P(x)$

PROBLEMAS

1] DIVIDIR

a) $P(x) = 3x^3 + 2x - 2$ y $d(x) = x - 4$

$$3x^3 + 2x - 2 \div x - 4 = 3x^2 + 12x + 50$$

$$-(3x^3 - 12x^2)$$

$$12x^2 + 2x - 2$$

$$-(12x^2 - 48x)$$

$$50x - 2$$

$$-(50x - 200)$$

$$198$$

$\Rightarrow q(x) = 3x^2 + 12x + 50 \quad , \quad r(x) = 198$

$\Rightarrow P(x) = (3x^2 + 12x + 50) \cdot (x - 4) + 198$

b) $\overset{P(x)}{x^7 + 3x^6 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1}$ por $\overset{d(x)}{x^4 - x + 1}$

$$x^7 + 3x^6 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \div x^4 - x + 1 = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$-(x^7 - x^4 + x^3)$$

$$3x^6 + x^4 + x^3 + 3x^2 - x + 1$$

$$-(3x^6 - 3x^3 + 3x^2)$$

$$x^4 + 4x^3 - x + 1$$

$$-(x^4 - x + 1)$$

$$\boxed{4x^3}$$

$\Rightarrow q(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ y $r(x) = 4x^3$

$\Rightarrow P(x) = (x^3 + 3x^2 + 1)(x^4 - x + 1) + 4x^3$

c) $\overset{P(x)}{2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 5x}$ y $d(x) = x - 2$

$$2x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 5x \div x - 2 = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$-(2x^4 - 4x^3)$$

$$-2x^3 + 7x^2 - 5x$$

$$-(-2x^3 + 4x^2)$$

$$3x^2 - 5x$$

$$-(3x^2 - 6x)$$

$$x$$

$$-(x - 2)$$

$$\boxed{2}$$

$\Rightarrow q(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad , \quad d(x) = 2$

$\Rightarrow P(x) = (2x^3 - 2x^2 + 3x + 1)(x - 2) + 2$

P2) ENCONTRAR $a$ y $b$ tales que $3x^3-4x^2+ax+b$ SEA DIVISIBLE POR $x^2-1$

$$3x^3-4x^2+ax+b \div x^2-1 = 3x-4$$
$$-(3x^3-3x)$$
$$-4x^2+(a+3)x+b$$
$$-(-4x^2+4)$$
$$(a+3)x+(b-4) = r(x) = 0$$
$$\Rightarrow (a+3)=0 \wedge (b-4)=0$$
$$\Rightarrow \underline{a=-3 \wedge b=4}$$

P3) CONTROL POLINOMIOS AÑO 2009

MUESTRA POLINOMIO GRADO 5, TAL QUE $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}$ SEAN SUS ÚNICAS RAÍCES REALES.

P TIENE A $(x-(1+\sqrt{2}))$, $(x-(1-\sqrt{3}))$ Y A $(x+1)$ COMO FACTORES

$$\Rightarrow P(x) = (x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{3}))(x+1)\,q(x)$$

DONDE $q(x)$ DEBE TENER GRADO 2, PUEDE SER UN POLINOMIO SIN RAÍCES REALES, COMO $q(x) = x^2+1$, O REPETIRSE UNA RAÍZ ANTERIOR, QUEDANDO

$$P(x) = (x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{3}))(x+1)^3$$
$$\text{ó } P(x) = (x-(1+\sqrt{2}))(x-(1-\sqrt{3}))(x^2+1)$$

P4) CONTROL AÑO 2007

AL DIVIDIR $P(x)$ EN $(x^2-1)$ RESULTA UN COEFICIENTE $q(x)$ Y RESTO $r(x)$
¿Cuál es el valor de la diferencia $P(-1)-r(-1)$?

Se tiene que

$$P(x) = (x^2-1)\,q(x) + r(x)$$
$$P(-1) = 0\cdot q(-1) + r(-1)$$
$$\Rightarrow \underline{P(-1) - r(-1) = 0}$$

P5] Encuentra raíces de

a) $p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x + 1$

notar que $\frac{A}{B} = \{\pm 1, \pm 1/2\}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & 2 & +1 & +1 & -1 \\ \hline & 2 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1/2 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 2 = 0$$
$$x^2 + x + 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{-2} \Rightarrow \text{no tiene más raíces.}$$

$\Rightarrow p(x) = 2(x-1)(x-1/2)(x^2+x+1)$

b) $p(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 4$

posibles raíces $\frac{A}{B} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & & 1 & 7 & 4 \\ \hline & 1 & 7 & 4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 6 & -3 & -4 \\ 2 & & 2 & 16 & 26 \\ \hline & 1 & 8 & 13 & 22 \end{array} \Rightarrow p(2) = 22$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 7 & 4 \\ -1 & & -1 & -6 \\ \hline & 1 & 6 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 7 & 4 \\ -2 & & -2 & -10 \\ \hline & 1 & 5 & -6 \end{array}$$

$$x^2 + 7x + 4 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-4}}{2}$$
$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}}$$

c) $p(x) = 3x^3 - 26x^2 + 34x - 12$

Divisores de 12 $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ $\Rightarrow$ candidatos

Divisores de 3 $= \{\pm 1, \pm 3\}$

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}\}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -26 & 34 & -12 \\ 1 & & 3 & -23 & 11 \\ \hline & 3 & -23 & 11 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 3 & -26 & 34 & -12 \\ 2/3 & & 2 & -16 & 12 \\ \hline & 3 & -24 & 18 & 0 \end{array}$$

$$3x^2 - 24x + 18 = 0$$
$$x^2 - 8x + 6 = 0 \qquad x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-24}}{2}$$
$$\boxed{x_{2,3} = 4 \pm \sqrt{10}}$$

**P6** Demuestre que si $ax^3+bx^2+cx+d$ tiene a $(x-1)^2$ como factor, entonces $b=d-2a$ y $c=a-2d$

Si $(x-1)^2=(x^2-2x+1)$ es factor $\Leftrightarrow$

$$P(x)=(x^2-2x+1)q(x)$$

$$ax^3+bx^2+cx+d \div x^2-2x+1 = ax+(b+2a)$$

$$-(ax^3-2ax^2+ax)$$

$$(b+2a)x^2+(c-a)x+d$$

$$-[(b+2a)x^2-2(b+2a)x+(b+2a)]$$

$$[c-a+2b+4a]x+d-b-2a=0$$

$$\boxed{b=d-2a}$$

$$c=-3a-2b$$

$$c=-3a-2d+4a=\underline{a-2d}$$

**P7)** Para cada polinomio determine el cociente y el resto de dividir $P(x)$ por $(x-2)$

a) $P(x)=2x^3-x^2-x+1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & & 4 & 6 & 10 \\ \hline & 2 & 3 & 5 & 11 \end{array}$$

$\Rightarrow P(x)=(2x^2+3x+5)(x-2)+11$

$\Rightarrow \underline{P(2)=11}$

b) $P(x)=5x^4+x^3-3x^2-x+1$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & & 10 & 22 & 38 & 74 \\ \hline & 5 & 11 & 19 & 37 & 75 \end{array}$$

$P(x)=(5x^3+11x^2+19x+37)(x-2)+75$

$P(2)=75$

c) $P(x)=x^5-4x^3+x^2-3x+2$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 0 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow P(x)=(x^4+x^3+x-1)(x-2)$

$P(2)=0$

d) $P(x)=3x^3-5x^2-x-2$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -5 & -1 & -2 \\ 2 & & 6 & 2 & 2 \\ \hline & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow P(x)=(3x^2+x+1)(x-2)$

$\underline{P(2)=0}$

P8) Integre

a) $\int \frac{e^x}{e^{3x}+e^{2x}+e^x+1}\,dx$ $\quad u = e^x$, $du = e^x dx$

$$\int \frac{du}{u^3+u^2+u+1} = \int \frac{du}{(u+1)(u^2+1)}$$

por frac parciales

$$\frac{1}{(u+1)(u^2+1)} = \frac{Au+B}{(u^2+1)} + \frac{C}{(u+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = (Au+B)(u+1) + C(u^2+1)$$

$$1 = Au^2 + Au + Bu + B + Cu^2 + C$$

1° si $u=-1 \Rightarrow 1 = (-A+B)\cdot 0 + 2C \Rightarrow \boxed{C = 1/2}$

$u^2$) $0 = Au^2 + C\cdot u^2 \Rightarrow \boxed{A = -C = -1/2}$

$u=0$) $1 = \cancel{A} + B + C \Rightarrow \boxed{B = 1/2}$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{(u+1)(u^2+1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{u\,du}{(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1}$$

$w = u^2+1$
$dw = 2u$

$$= -\ln(u^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(u) + \frac{1}{2}\ln(u) + C$$

$$= -\ln(e^{2x}+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(e^x) + \frac{1}{2}\ln(e^x) + C$$

$$= \ln\left(\frac{e^{x/2}}{e^{2x}+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(e^x) + C$$

b) $\int \frac{x^3+x-1}{x^2+2}\,dx$ como $x^3+x-1$ es mayor grado que $x^2+2$ hay que dividir

$x^3+x-1 : x^2+2 = x$
$-(x^3+2x)$
$\boxed{-x-1}$

$$\Rightarrow \frac{x^3+x-1}{x^2+2} = x + \frac{-x-1}{x^2+2} \Rightarrow \int \frac{x^3+x-1}{x^2+2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x\,dx}{x^2+2} - \int \frac{dx}{x^2+2}$$

$$\int \frac{x^3+x-1}{x^2+2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln(x^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$