

PAUTA AUXILIAR 4: TFC E INTEGRAL DEFINIDA.

P1) PARA AMBAS PREGUNTAS USAMOS EL TFC. QUE INDICA, SI $f(x)$ ES CONTINUA EN (a,b) , SE DEFINE $G(x) = \int_a^x f(t) dt$, TAL QUE $\frac{dG(x)}{dx} = f(x)$.

a) $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6} dt$

NECESITAMOS QUE SEA DE LA FORMA $\int_a^x f(t) dt$ CON A CTE, POR LO TANTO

$$F(x) = \int_x^a \frac{t^2}{1+t^6} dt + \int_a^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6} dt$$

$$F(x) = -\int_a^x \frac{t^2}{1+t^6} dt + \int_a^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6} dt$$

AHORA $F(x)$ ESTÁ COMPUESTA POR DOS FUNCIONES DE LA FORMA $\int_a^x f(t) dt$.

AL DERIVAR RECORDAMOS LA REGLA DE LA CADENA, QUE DICE:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} f(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

POR LO TANTO PARA $F(x)$, LLAMAMOS $g(x) = -\int_a^x \frac{t^2}{1+t^6} dt$ Y $h(x) = \int_a^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6} dt$

DE LA FORMA QUE $F(x) = g(x) + h(x)$ [OJO, ESTO NO ES NECESARIO, SOLO PARA QUE SE ENTIENDA EL PROCESO]. NOTAR QUE $h(x)$ ES $h(x^2)$, POR LO TANTO

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x^2)}{dx} \cdot \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x^2)}{dx} \cdot 2x$$

POR TFC QUEDA

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{-x^2}{1+x^6} + \frac{(x^2)^2}{1+(x^2)^6} = \frac{-x^2}{1+x^6} + \frac{x^4}{1+x^{12}}$$

b) USA EL MISMO PROCEDIMIENTO ANTERIOR, POR LO QUE NO ES NECESARIO REALIZAR TODO LO ANTERIOR, ABREVIANDO QUEDA.

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{1+(x^3)^4} \cdot 3x^2 - \frac{1}{1+(-2x)^4} \cdot (-2) = \frac{3x^2}{1+x^{12}} + \frac{2}{1+16x^4}$$

P2] PRIMERO NOTAR QUE SI LLEGAMOS Y USAMOS EL TFC QUEDA

$$\frac{d}{dx} F(x) = (x-x) f'(x) = 0 f'(x) = 0$$

POR LO TANTO HAY QUE TRABAJAR UN POCO $F(x)$ ANTES DE DERIVAR, LO ÚNICO QUE PODAMOS HACER ES SEPARAR LA RESTA, QUEDANDO

$$F(x) = \int_0^x (u-x) f'(u) du = \int_0^x u f'(u) du - x \int_0^x f'(u) du$$

PARA QUE SE ENTIENDA BIEN Y USEMOS LA MISMA NOMENCLATURA.

$$F(x) = \int_0^x u \cdot \frac{df(u)}{du} \cdot du - x \int_0^x \frac{df(u)}{du} du$$

AL DERIVAR DEBEMOS RECORDAR QUE CADA INTEGRAL ES UNA FUNCIÓN DE x , SI $g(x) = \int_0^x u \frac{df(u)}{du} du$ Y $h(x) = \int_0^x \frac{df(u)}{du} du$ [RECORDAR QUE ESTO NO ES NECESARIO, SOLO PARA EXPLICAR EL PROCEDIMIENTO Y RAZONAMIENTO UTILIZADO]

QUEDA $F(x) = g(x) - x \cdot h(x)$, AL DERIVAR OBTENEMOS.

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} - \left[\frac{dx}{dx} \cdot h(x) + x \cdot \frac{dh(x)}{dx} \right]$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} - h(x) - \frac{x dh(x)}{dx}$$

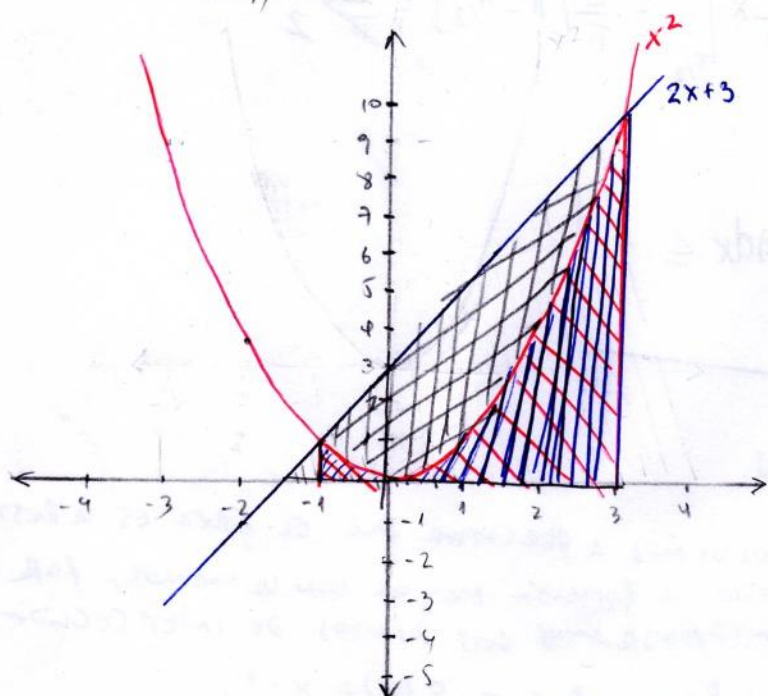
$$\frac{dF(x)}{dx} = \cancel{x \cdot \frac{df(x)}{dx}} - \int_0^x \frac{df(u)}{du} du - \cancel{x \cdot \frac{df(x)}{dx}} = - \int_0^x \frac{df(u)}{du} du$$

Y POR TFC II OBTENEMOS

$$\frac{dF(x)}{dx} = -[f(x) - f(0)] = \underline{f(0) - f(x)}$$

P31

a) ESTOS PROBLEMAS SON FÁCILES (Y SI OSI ENTRA UNO SIMILAR EN LA PRUEBA), PARA ANALIZARLO VEAMOS EL GRÁFICO.



NOTAR QUE EL ÁREA ENTRE DOS CURVAS SE OBTIENE RESTANDO EL ÁREA BAJO LA CURVA DE LA FUNCIÓN MAYOR, MENOS EL ÁREA BAJO LA CURVA DE LA FUNCIÓN MENOR. PARA CALCULAR 1º HAY QUE BUSCAR LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN, QUE SON QUE

$$g(x) = x^2 = f(x) = 2x + 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Y AL NOTAR QUE ENTRE $x \in [-1, 3]$ $2x + 3 \geq x^2$, POR LO TANTO

$$A = \int_{-1}^3 f(x) - g(x) dx = \int_{-1}^3 2x + 3 - x^2 dx = \int_{-1}^3 2x dx + \int_{-1}^3 3 dx - \int_{-1}^3 x^2 dx$$

$$\Rightarrow A = \left. x^2 \right|_{-1}^3 + \left. 3x \right|_{-1}^3 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^3 = 9 - 1 + 3[3 + 1] - \left[\frac{27}{3} + \frac{1}{3} \right]$$

$$A = 8 + 12 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3}$$

b) PARA ESTA DEMOSTRACIÓN PARTIMOS DE ALGO QUE CONOCEMOS Y TRATAMOS DE LLEGAR ALGEBRAICAMENTE A LO QUE QUEREMOS DEMOSTRAR, Y LO QUE SABEMOS ES (1) $\sin(x) \leq 1$ PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ Y ADENÁS COMO $f(x): [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

SABEMOS QUE $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ (2)

DE (1) TENEMOS QUE $\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ Y DE (2) TENEMOS QUE $\frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{\pi}$

JUNTANDO AMBAS LLEGAMOS A $\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{2}{\pi}$

LO ÚNICO QUE NOS FALTA PARA QUE SEA LO QUE QUEREMOS DEMOSTRAR ES INTEGRAR ENTRE $\frac{\pi}{2}$ Y π , OBTENIENDO.

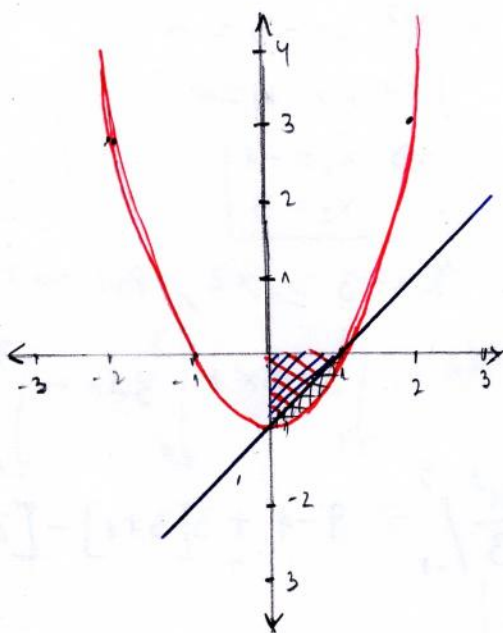
$$\frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{2}{\pi} \quad \Bigg/ \quad \int_{\pi/2}^{\pi} dx$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \leq \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} dx = \frac{2}{\pi} x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi} [\pi - \pi/2] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

Por lo tanto demostramos que

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx \leq 1$$

P4 VOLVEMOS A ANALIZAR LOS GRÁFICOS.



VOLVEMOS A PERCATAR QUE EL ÁREA ES LA DIFERENCIA ENTRE LA FUNCIÓN MAYOR CON LA MENOR, POR LO TANTO BUSCAMOS LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN,

$$f(x) = x^2 - 1 = g(x) = x - 1$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

EL INTERVALO ES $[0, 1]$ Y EL ÁREA CORRESPONDE

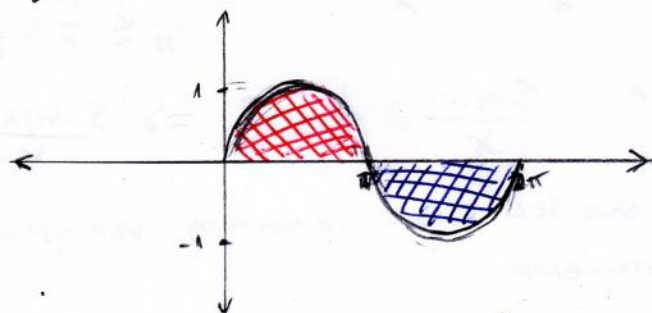
$$A = \int_0^1 g(x) - f(x) dx = \int_0^1 x - x^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

P5

a) ESTE PROBLEMA LO PUSE PARA QUE SE FICEN EN ESTO, TEÓRICAMENTE EL ÁREA BAJO LA CURVA ES LA INTEGRAL DE LA FUNCIÓN EN EL INTERVALO, PERO $\sin(x)$ CAMBIA DE SIGNO, QUEDANDO

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0$$

GRÁFICAMENTE ES:



AMBAS ÁREAS VALEN LO MISMO, Y LA QUE ESTÁ BAJO DE LA CURVA, LA INTEGRAL LA CONSIDERAMOS NEGATIVA, POR LO TANTO LA SUMA DE AMBAS DA CERO, ASÍ, PARA OBTENER LA REAL ÁREA BAJO LA CURVA TENEMOS QUE CALCULAR

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx$$

Pero veamos que es $|\sin(x)|$

$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x), & x \in [0, \pi] \\ -\sin(x), & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

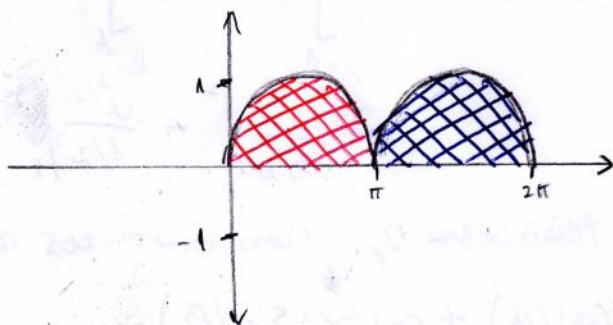
Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx = \int_0^{\pi} \sin(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(x) dx$$

$$= -\cos(x) \Big|_0^{\pi} + \cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4$$

Que gráficamente corresponde a:



OJO esto no es necesario para el área entre las curvas, cuando concuerden.

b) La forma más fácil de ver el método de sustitución es ver "se nos molesta" de la integral y eso llamarlo u , veamos.

$$\int_0^a \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad \left. \begin{array}{l} \text{nos molesta} \\ a^2 - x^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} u = a^2 - x^2 \\ du = -2x dx \\ u(0) = a^2 \\ u(a) = 0 \end{array} \left\{ \int_0^a \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_{a^2}^0 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_{a^2}^0 u^{-1/2} du \right.$$

$$= \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} \Big|_{a^2}^0 = 2\sqrt{u} \Big|_{a^2}^0$$

$$= 2(0 - \sqrt{a^2})$$

$$= \underline{\underline{-2a}}$$

c) $\int_0^1 x(x^2-1) dx$ Hay dos formas, primero, multiplicar $\Rightarrow \int_0^1 x(x^2-1) dx = \int_0^1 x^3 - x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

O la segunda forma es decir se nos molesta x^2-1

Por lo tanto

$$\int_0^1 x(x^2-1) dx \quad \left. \begin{array}{l} u = x^2-1 \\ du = 2x dx \\ u(0) = -1 \\ u(1) = 0 \end{array} \right\} \int_0^1 \frac{(x^2-1) x dx}{2} = \int_{-1}^0 \frac{u du}{2} = \frac{u^2}{4} \Big|_{-1}^0 = \left[0 - \frac{1}{4} \right] = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

d) ESTE SE VE FEO, PERO SÓLO ES ESO, ¿QUÉ NOS MOLESTA? PUES $1 + \sin(x)$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) \cos(x) dx}{\sqrt{1 + \sin(x)}}$$

$$\begin{aligned} u &= 1 + \sin(x) \\ du &= \cos(x) dx \\ u(0) &= 1 \\ u(\pi/2) &= 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) \overbrace{\cos(x) dx}^{du}}{\underbrace{\sqrt{1 + \sin(x)}}_u}$$

¿Y el $\sin(x)$ que queda? PUES $u = 1 + \sin(x) \Rightarrow \sin(x) = u - 1$
Por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) \cdot \cos(x) dx}{\sqrt{1 + \sin(x)}} = \int_1^2 \frac{(u-1) \cdot du}{\sqrt{u}} = \int_1^2 \frac{u}{\sqrt{u}} du - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$= \int_1^2 u^{1/2} du - \int_1^2 u^{-1/2} du$$

$$= \left. \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_1^2 - \left. \frac{u^{1/2}}{1/2} \right|_1^2 = \frac{2}{3} (\sqrt{2}^3 + 2)$$

P6] HINT! ESTE ES SIMILAR AL PROBLEMA 2, COMO HINT LES RECORDO DE

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

¡ÁNIMO!!