Matemáticas II
Programa de Bachillerato
Álvaro Tello Crino

Ayudantía 3: Sumas de Riemann II

Repaso:

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición del intervalo de modo que $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ se define:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_1 - t_{i-1})$$

Donde M es el supremo de ***f(x)*** en $[t_{i-1}, t_i]$
Y se define:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

Donde m es el ínfimo de *f(x)*en $[t_{i-1}, t_i]$, de donde se tiene la siguiente relación

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i(t_1 - t_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i(t_1 - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Por lo tanto, como se llega al mismo valor del límite eligiendo tanto el mínimo como el máximo de la partición, se puede concluir que no importa el valor de *f(x)* que se elija mientras pertenezca a la partición, el valor del límite no cambia, llegando a la siguiente definición:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta_x = \int_a^b f(x)dx$$

Donde $\Delta_x = \frac{(b-a)}{n}$, y este límite también es conocido como el área entre *f(x)* y el eje x, en especial, si *b* = 1 y *a = 0*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

Teorema del valor medio:

Si f es continua en el intervalo cerrado [a,b], existe $\xi \epsilon [a.b]$ tal que cumple lo siguiente:

$$\int_b^a f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

P1) **[Guía de Bachillerato años anteriores]**
Calcule el área de un círculo de radio R del siguiente modo (el siguiente método se llama Método de Exhaución y fue inventado por Eudoxio en el siglo IV antes de cristo):

a) Encuentre el área del polígono de n lados inscrito en la circunferencia
b) Encuentre el área del polígono de n lados circunscrito en la circunferencia
c) Pruebe que el área de la circunferencia está entre los resultados a) y b)
d) Pruebe que cuando n es muy grande tiende a πR^2

P2) **[Propiedad de las integrales]**
Demuestre que si *f* es integrable en [*a*,*b*] entonces |*f*| es integrable en [*a*,*b*] y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

P3)[**Ejercicio 6 apunte Cálculo Diferencial, capítulo 4 semana 7]**
Exprese las siguientes sumatorias como sumas de Riemann y exprésela como integrales

a)$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i+n}$
c)$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots \frac{1}{(n+n)^3}\right)$

P4) **[Apunte de Cálculo Diferencial, Teorema del Valor medio generalizado para integrales, capítulo 4]**
Demuestre que si f es continua en [*a*,*b*] y g es una función integrable en [*a*,*b*] que no cambia de signo, entonces existe $\xi \epsilon [a.b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

P5) **[Control Calculo Diferencial semestre primavera año 2008]**

Considere $f: [a, b] \to [d, c]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente:

a) Demuestre que f^{-1} es también integrable y estrictamente creciente.

b) Considere la partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ en el intervalo $[a,b]$ y su correspondiente imagen $Q = \{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c,d]$, demuestre que

$$S(f, P) + s(Q, P) = bd - ac$$

c) Utilizando propiedades de integrales demuestre que

$$\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$$

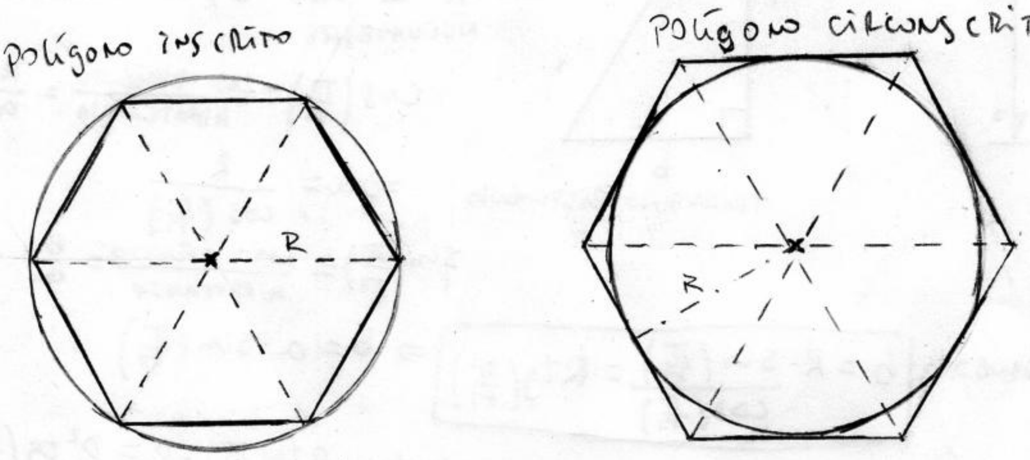
P6) **[Alguna ayudantía de años anteriores de Calculo Diferencial]**
Sea f una función creciente en [0,1] e integrable, probar que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}$$

AYUDANTÍA 3: RIEMANN II

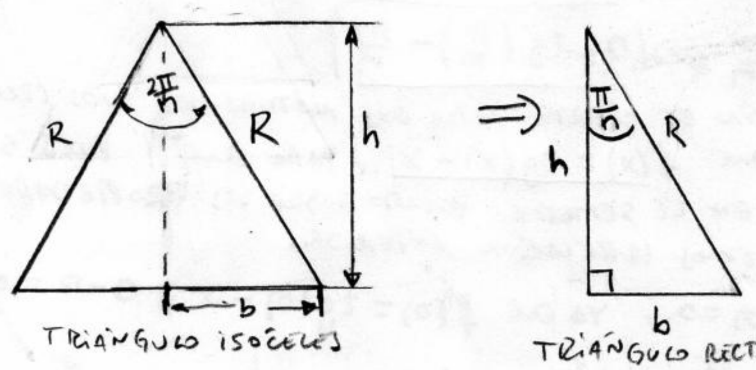
ÁLVARO TELLO CRINO AÑO 2013

P1) PRIMERO ENTENDER QUE CONSECUENCIAS IMPLICA UN POLÍGONO INSCRITO Y UNO CIRCUNSCRITO, EL PRIMERO ESTA CONTENIDO DENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA, EL SEGUNDO CONTIENE A LA CIRCUNFERENCIA, SE ENTIENDE MEJOR EN LA FIGURA.



COMO TODO POLÍGONO REGULAR LO PODEMOS DIVIDIR EN n TRIÁNGULOS IGUALES, POR LO TANTO, EN ESCENCIA LO QUE HACEMOS ES DIVIDIR AL CIRCULO EN n TRIÁNGULOS IGUALES, SI OBSERVAMOS BIEN, EL ÁNGULO DE LA PUNTA CUYO VERTICE ESTÁ EN LA PUNTA MIDE LO MISMO EN TODOS, Y LA SUMA DE TODOS ESTOS ÁNGULOS MIDEN 2π POR ESO CADA UNO DE ESOS ÁNGULOS MIDE $2\pi/n$, POR OTRO LADO, CADA UNO DE ESOS TRIÁNGULOS SON ISÓCELES, SE OBSERVA ESTO MEJOR EN EL TRIÁNGULO INSCRITO, EN DONDE CADA LADO IGUAL MIDE R, EL CUAL PARA PODER CALCULAR EL ÁREA LO PODEMOS DIVIDIR EN DOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS SIENDO EL ÁREA TOTAL $2\cdot\left(\frac{h\cdot b}{2}\right)$ SIENDO h LA ALTURA DEL TRIÁNGULO ISÓCELES Y UNO DE LOS CATETOS DEL RECTÁNGULO, Y b ES LA BASE DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO, OBTENIENDO:

a) TRIÁNGULO DEL POLÍGONO INSCRITO



TRIÁNGULO ISÓCELES TRIÁNGULO RECTÁNGULO

PARA OBTENER LOS VALORES DE b Y h USAMOS LO QUE SABEMOS DE TRIGONOMETRÍA.

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\text{LADO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = R\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\text{LADO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = R\cdot\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

CON ESTO OBTENEMOS QUE EL ÁREA DE CADA TRIÁNGULO CORRESPONDE A

$$\text{AREA}_\Delta = b\cdot h = R^2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Y DESEMPOLVANDO NUESTRAS VIEJAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS (LO HAREMOS MÁS DE UNA VEZ DURANTE EL CURSO) ENCONTRAMOS UNA QUE DICE

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

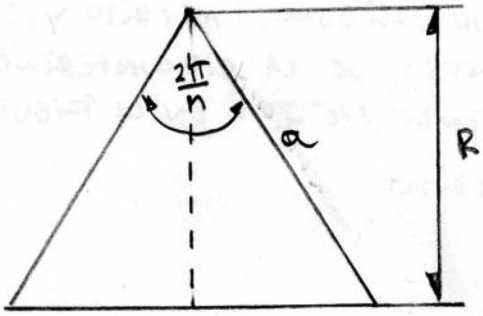
PARA NUESTRO CASO, SI $\alpha = \pi/n$ NOS QUEDA

$$\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

POR LO TANTO EL ÁREA DEL TRIÁNGULO ES $\frac{R^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Y COMO EL POLÍGONO INSCRITO SE FORMA DE n TRIÁNGULOS, EL ÁREA DEL POLÍGONO ES $\boxed{\frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}$

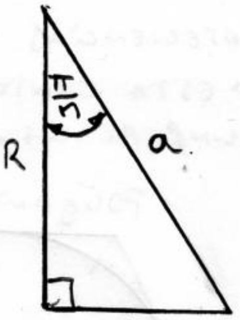
b) TRIÁNGULO POLÍGONO CIRCUNSCRITO



b

TRIÁNGULO ISÓSCELES

$\Longleftrightarrow$



b

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

EN ESTE CASO NOTEMOS QUE LA ALTURA CORRESPONDE A NUESTRO RADIO, PERO NO CONOCEMOS NI EL VALOR DE LA HIPOTENUSA "a" NI DE LA BASE "b", CON TRIGONOMETRÍA NUEVAMENTE.

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\text{LADO ADYACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{R}{a}$$

$$\Rightarrow a = \frac{R}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\text{LADO OPUESTO}}{\text{HIPOTENUSA}} = \frac{b}{a}$$

PERO $a = \dfrac{R}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$, QUEDANDO $\boxed{b = R\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = R\,tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ $\Rightarrow b = a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Y EL ÁREA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES CORRESPONDE A $b\cdot h = R\,tg\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot R = R^2 tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$
COMO NUEVAMENTE EL ÁREA ES LA SUMA DE n TRIÁNGULOS IGUALES QUEDA.

$$\boxed{\text{ÁREA POLÍGONO CIRCUNSCRITO} = nR^2 tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

c) EN ESTA PARTE DEBEMOS DEMOSTRAR QUE

$$nR^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \le \pi R^2 \le nR^2 tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

LA CUAL SEPARAMOS EN DOS DESIGUALDADES A DEMOSTRAR, DONDE AQUÍ EXPLICARÉ UNA, USTEDES REALIZAN LA OTRA (SE REALIZA DE MANERA SIMILAR, HAGAN EL ESFUERZO)

$$\underline{\pi R^2 \le nR^2 tg(\pi/n)} \;/\; \text{COMO } R^2 \text{ ES DISTINTO DE CERO Y POSITIVO PODEMOS DIVIDIR}$$

$$\pi \le n\,tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \;/\; n \text{ PERTENECE A LOS NÚMEROS NATURALES} \Rightarrow n > 0$$

$$\frac{\pi}{n} \le tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \;/ -\frac{\pi}{n} \Longleftrightarrow \boxed{0 \le tg\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}}$$

PARA DEMOSTRAR QUE ESTA RELACIÓN ES CIERTA PARA LOS NATURALES NOS CREAREMOS UNA FUNCIÓN $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TAL QUE $\underline{f(x) = tg(x) - x}$. ¿PARA QUÉ? PUES SI ES FUNCIÓN PODEMOS USAR LO APRENDIDO EN EL SEMESTRE PASADO SOBRE LAS PROPIEDADES DE FUNCIONES, ADEMÁS, SI $x = \frac{\pi}{n}$ OBTENEMOS LA RELACIÓN ANTERIOR.

PARA $f(x)$ PRIMERO NOTAR QUE $f(0) = 0$, YA QUE $f(0) = tg(0) - 0 = 0 - 0 = 0$
LUEGO, AL DERIVAR $\dfrac{df(x)}{dx} = \sec^2(x) - 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1$

AHORA NOTEMOS QUE SI $\cos(x) \le 1 \Rightarrow \cos^2(x) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos^2(x)} \ge 1$
OBTENIENDO QUE $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} - 1 \ge 0$

Y COMO $\dfrac{df(x)}{dx}$ ES POSITIVA CONCLUIMOS QUE $f(x)$ ES CRECIENTE, Y SI UNA FUNCIÓN ES CRECIENTE $\Rightarrow f(x) \le f(x+dx)$ PARA NUESTRO CASO, SI $x=0$ Y $dx = x$ OBTENEMOS $f(0) = 0 \le f(x) = \tan(x) - x$ POR LO TANTO $f(x) \ge 0$
SI $x = \frac{\pi}{n}$ OBTENEMOS $0 \le tg\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi}{n} \le tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ QUEDANDO DEMOSTRADO

d) Ahora hacer n muy grande es una forma simple de pedirnos que calculemos el límite cuando n tiende al infinito a cada área de los polígonos.

Polígono inscrito

$$A = \frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \implies \lim_{n\to\infty} \frac{nR^2}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Big/ \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

Por calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi n R^2}{2\pi}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Big/ \cdot \frac{1/n}{1/n}$$

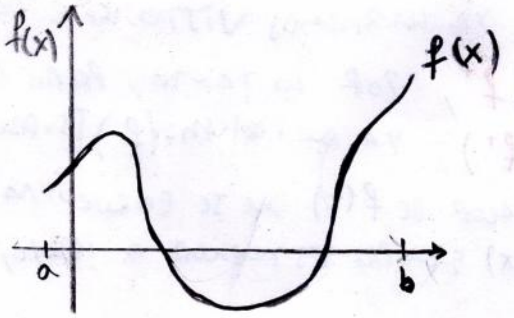
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^{n/n} \cdot R^2}{2\pi/n}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \Big/$$ si usamos el cambio de variable $u = \frac{2\pi}{n}$ tenemos que si $n \to \infty$, $u \to 0$

Quedando $\lim_{u\to 0} \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \sin(u)}{u} = \pi \cdot R^2 \cdot 1 = \boxed{\pi R^2}$

El otro límite $\lim_{n\to\infty} nR^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ pueden resolverlo ustedes.

P2) (La idea de esta pregunta no es que se aprendan la demostración, pero sí que logren entender la metodología y los pasos que se realizan)

Siempre que se piden demostraciones que involucren al valor absoluto uno se asusta, pero okey, vamos con calma y analicemos una función $f(x)$ cualquiera



Esta contiene dos partes, una positiva $f(x) \geq 0$, y otra negativa, $f(x) < 0$,

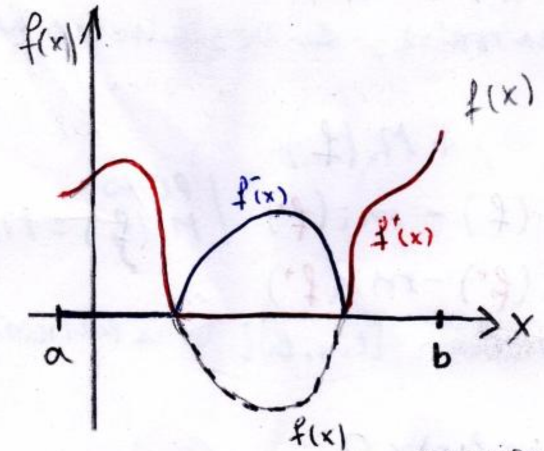
Si queremos que la parte negativa de $f(x)$ sea positiva debemos multiplicarlo por (-1), entonces nos definimos dos nuevas funciones f^+ y f^- de la siguiente forma

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

La cual consiste en tomar los valores de $f(x)$ cuando estos son positivos, y cuando $f(x)$ es negativa, esta función es cero

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Esta es cero cuando $f(x)$ es positiva, y cuando $f(x)$ es negativa esta función toma los mismos valores ¡pero positivos!. Gráficamente quedaría algo como esto



Si nos fijamos bien, al juntar $f^+(x)$ y $f^-(x)$ obtenemos $|f(x)|$, en cambio, si queremos $f(x)$ necesitamos que $f^-(x)$ sea negativa, por lo tanto:

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$
$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

También nos podemos dar cuenta que $f(x) \leq f^+(x)$ para todo x, ya que cuando $f(x)$ es negativa $f^+(x)$ es cero $\Rightarrow f(x) < f^+(x)$ y cuando $f(x)$ es positiva $f^+(x) = f(x)$, por lo tanto $f(x) \leq f^+(x)$

COMO HEMOS DEFINIDO $|f(x)|$ COMO LA SUMA DE $f^+(x)$ Y $f^-(x)$ BASTA CON PROBAR QUE $f^+(x)$ Y $f^-(x)$ SON INTEGRABLES, PARA ESTO USAREMOS EL TEOREMA VISTO EN CLASE

SEA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ACOTADA. LAS SIGUIENTES AFIRMACIONES SON EQUIVALENTES

1. f ES INTEGRABLE EN $[a,b]$
2. PARA TODO $\varepsilon > 0$ EXISTEN PARTICIONES P Y Q DEL INTERVALO $[a,b]$ tal que

$$S(f,Q) - s(f,P) < \varepsilon$$

3. PARA TODO $\varepsilon > 0$ EXISTE R, UNA PARTICIÓN DEL INTERVALO $[a,b]$, tal que

$$S(f,R) - s(f,R) < \varepsilon$$

PARA DEMOSTRAR LA INTEGRABILIDAD USAREMOS LAS AFIRMACIONES 1 Y 3.

PARTIENDO CON $f^+(x)$:

DEBEMOS PROBAR QUE PARA CUALQUIER PARTICIÓN R DE $[a,b]$ Y CUALQUIER $\varepsilon > 0$

$$S(f^+,R) - s(f^+,R) < \varepsilon$$

PRIMERO, SABEMOS QUE $f(x)$ LO CUMPLE, YA QUE ES INTEGRABLE, POR ESO PARA CUALQUIER $\varepsilon > 0$

$$S(f,R) - s(f,R) < \varepsilon$$

AHORA ANALIZAREMOS LA RELACIÓN ENTRE f Y f^+, YA HABÍAMOS VISTO QUE PARA TODO X, EN ESPECIAL, SI $x \in [a,b]$ SE CUMPLE QUE $f(x) \leq f^+$, POR LO TANTO, PARA CUALQUIER INTERVALO $[t_{i-1}, t_i]$ TENEMOS QUE $m_i(f) \leq m_i(f^+)$, YA QUE EL $m_i(f)$ [SUPREMO DE $f(x)$ EN EL INTERVALO $[t_{i-1}, t_i]$] CORRESPONDE AL MENOR VALOR DE $f(x)$ QUE SE ENCUENTRA EN EL INTERVALO (POR DEFINICIÓN DE SUPREMO), Y COMO $f(x)$ SIEMPRE ES MENOR O IGUAL, LOS SUPREMOS TAMBIÉN, AHORA NOTEMOS QUE:

$$m_i(f) \leq m_i(f^+) \quad / \cdot -1$$

$$-m_i(f) \geq -m_i(f^+)$$

NOS FALTA ANALIZAR $M_i(f)$ Y $M_i(f^+)$, SI $f(x) \geq 0$ TENEMOS QUE $f^+(x) = f(x)$ YA QUE LA DEFINIMOS ASÍ, POR LO TANTO COMO M_i ES EL MAYOR $f(x)$ QUE SE OBTIENE EN EL INTERVALO $[t_{i-1}, t_i]$, SI ESTE ES POSITIVO $M_i(f) = M_i(f^+)$ PUES TIENEN EL MISMO VALOR, SI SUMAMOS ESTE M_i A LA RELACIÓN ANTERIOR, LA DESIGUALDAD NO CAMBIA, YA QUE ES UNA SUMA, OBTENIENDO

$$-m_i(f) \geq -m_i(f^+) \quad / + M_i(f)$$

$$M_i(f) - m_i(f) \geq M_i(f) - m_i(f^+) \quad \Big/ \begin{array}{l}\text{PERO}\\ M_i(f) = M_i(f^+)\end{array}$$

OBTENIENDO

$$M_i(f) - m_i(f) \geq M_i(f^+) - m_i(f^+)$$

Y ESTO SE CUMPLE PARA CUALQUIER INTERVALO $[t_{i-1}, t_i]$ DE LA PARTICIÓN R. SIEMPRE QUE $f(x)$ SEA POSITIVO

A CONTINUACIÓN ANALIZAREMOS QUE PASA CUANDO $f(x) < 0$

SI $f(x) < 0$ TENEMOS QUE $f^+(x)=0$, YA QUE ASÍ SE DEFINIÓ, POR LO TANTO,

SI EN LA PARTICIÓN $[t_{i-1}, t_i]$ $f(x)$ ES NEGATIVO EN TODA LA PARTICIÓN, TENEMOS QUE $f^+(x)=0$, POR LO TANTO $M_i(f^+)=0$ Y $m_i(f^+)=0$ EN ESA PARTICIÓN, PUES ES EL ÚNICO VALOR QUE ADQUIERE $f^+(x)$, POR LO TANTO, $M_i(f^+) - m_i(f^+) = 0-0=0$.

AHORA, POR DEFINICIÓN DE M_i Y m_i, SEAN ESTOS POSITIVOS O NEGATIVOS SE CUMPLE QUE $M_i \geq m_i$, EN ESPECIAL, PARA NUESTRO $f(x)$ CUANDO ESTE ES NEGATIVO

$$M_i(f) \geq m_i(f) \quad / -m_i(f)$$

$$M_i(f) - m_i(f) \geq 0 \quad / \text{PERO COMO } f(x) \leq 0$$

$$M_i(f) - m_i(f) \geq 0 = M_i(f^+) - m_i(f^+)$$

POR LO TANTO EN AMBOS CASOS, SI $f(x) \geq 0$ O $f(x) < 0$ SE CUMPLE QUE:

$$M_i(f) - m_i(f) \geq M_i(f^+) - m_i(f^+) \quad (\mathrm{I})$$

¿PERO QUÉ PASA SI EN UN INTERVALO $[t_i, t_{i-1}]$ TENEMOS UNA PARTE $f(x) \geq 0$ Y EN OTRA $f(x) < 0$? SI ESO OCURRE EL $M_i(f)$ SERÁ POSITIVO, POR LO TANTO $M_i(f^+) = M_i(f)$, Y $m_i(f) < 0$, POR LO TANTO $m_i(f^+)=0$, CUMPLIENDO LAS MISMAS CONDICIONES PARA CUANDO $f(x) \geq 0$, POR LO TANTO TAMBIÉN SE CUMPLE NUESTRA RELACIÓN (I)

AHORA COMO ESTA RELACIÓN SE CUMPLE PARA CUALQUIER INTERVALO $[t_{i-1}, t_i]$ DE LA PARTICIÓN R, SI SUMAMOS TODOS ESTOS $M_i(f) - m_i(f)$ Y TODOS LOS $M_i(f^+) - m_i(f^+)$ DE CADA INTERVALO MULTIPLICADO POR EL ANCHO DEL INTERVALO $(t_i - t_{i-1})$ OBTENEMOS:

$$M_i(f) - m_i(f) \geq M_i(f^+) - m_i(f^+) \quad / \cdot (t_i - t_{i-1}) \text{ ANCHO INTERVALO}$$

$$M_i(f)(t_i - t_{i-1}) - m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \geq M_i(f^+)(t_i - t_{i-1}) - m_i(f^+)(t_i - t_{i-1}) \quad / \sum_{i=1}^{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(f)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(t_i - t_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} M_i(f^+)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f^+)(t_i - t_{i-1})$$

LO CUAL CORRESPONDE A:

$$S(f,R) - s(f,R) \geq S(f^+,R) - s(f^+,R)$$

Y COMO $f(x)$ ES INTEGRABLE, SABEMOS QUE PARA CUALQUIER $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon > S(f,R) - s(f,R) \geq S(f^+,R) - s(f^+,R)$$

POR LO TANTO

$$\varepsilon > S(f^+,R) - s(f^+,R) \quad \text{PARA CUALQUIER } \varepsilon > 0$$

POR LO TANTO f^+ ES INTEGRABLE EN $[a,b]$.

¿ES NECESARIO HACER LO MISMO PARA f^-? NO, YA QUE COMO $f = f^+ - f^-$ TENEMOS QUE

$f^- = f^+ - f$ Y COMO f^+ Y f SON INTEGRABLES SABEMOS, POR PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES, QUE LA SUMA TAMBIÉN ES INTEGRABLE, POR LO TANTO f^- ES INTEGRABLE EN $[a,b]$.

Y SIGUIENDO LA MISMA IDEA, COMO $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$, ES LA SUMA DE DOS FUNCIONES INTEGRABLES, POR LO TANTO $|f(x)|$ ES INTEGRABLE EN $[a,b]$.

TENIENDO PROBADA LA INTEGRABILIDAD DE $|f(x)|$, RECORDEMOS (SI, DEBEMOS SEGUIR RECORDANDO) UNA PROPIEDAD DEL VALOR ABSOLUTO, SI $|a| \leq b$ ESTO SIGNIFICA QUE $-b \leq a \leq b$, VEAMOS SI PODEMOS OBTENER ALGO SIMILAR CON $f(x)$. PODEMOS DECIR QUE:

$$-f^+(x) \leq f(x) \leq f^+(x)$$

AHORA, COMO f^- ES POSITIVO, NO ES DIFICIL VER QUE

$$f^+(x) \leq f^+(x) + f^-(x) \quad \text{Y} \quad -f^+(x) \geq -f^+(x) - f^-(x) = -(f^+(x) + f^-(x))$$

POR LO TANTO NOS QUEDA:

$$-(f^+(x) + f^-(x)) \leq f(x) \leq f(x) + f^+(x) \quad \text{Y COMO } |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

QUEDA

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

AHORA, POR OTRA PROPIEDAD DE LA INTEGRAL, (PROBLEMA 8 DE LA GUIA 2) AL INTEGRAR UNA FUNCIÓN EL SIGNO DE ESTA NO CAMBIA, POR LO TANTO, LA DESIGUALDAD TAMPOCO.

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \Big/ \int_a^b dx$$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Y, POR NUESTRA PROPIEDAD DE VALOR ABSOLUTO OBTENEMOS FINALMENTE

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

P3] EN ESTA PREGUNTA EL OBJETIVO ES DEJAR LAS SUMATORIAS EN FUNCIÓN DE i/n Y MULTIPLICADA POR $1/n$, Y DECIR QUE TODO LO QUE TIENE i/n ES NUESTRO $f(x)$, REEMPLAZANDO CADA i/n POR x, Y EL $1/n$ ES NUESTRO PASO DE LA PARTICIÓN REGULAR, ESTO VIENE DE LA SUMA DE RIEMANN DEL INTERVALO $[0,1]$ Y LA PARTICIÓN REGULAR, SABIENDO QUE SEA LA FUNCIÓN QUE SEA

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

ESO SE CUMPLE SOLO SI SE CALCULA EL LÍMITE,

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$, SI MULTIPLICAMOS POR $\frac{1/n^2}{1/n^2}$ OBTENEMOS

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n/n^2}{n^2/n^2+i^2/n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n/n}{1+i^2/n^2}$$

¡PERFECTO! ES LO QUE QUERÍAMOS OBTENER, UNO PODRÍA DECIR "HEY PERO EL $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+i/n}\cdot\frac{1}{n}=0$", ESO ESTÁ BIEN, PERO ESTA ES LA SUMA DE TODOS ESOS PEQUEÑOS VALORES, Y DECIMOS QUE $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, SOLO CAMBIÉ LOS i/n POR x, Y QUEDA

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

NOS DEMORAREMOS EN POCO EN RESOLVER ESTA INTEGRAL, PERO COMO ANTICIPO

$$\boxed{\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}}$$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i+n}$ ¿ES NECESARIO DIVIDIR POR n? LA VERDAD SI OBSERVAMOS BIEN, YA ESTÁ MULTIPLICADA LA SUMA POR $\frac{1}{n}$, NOS MOLESTA QUE ESTÉ MULTIPLICADA POR $\frac{1}{\sqrt{n}}$, PASÉMOSLO ADENTRO DE LA SUMATORIA Y VEAMOS QUE PASA

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{i+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i+n}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}+1}$$

¡PERFECTO!, POR LO TANTO NUESTRO $f(x)=\sqrt{x+1}$, Y PARA ESTA SUMATORIA TAMPOCO HAY SOLUCIÓN, SOLO PODEMOS DECIR (POR AHORA)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i+n}=\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx.$$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+\dots+\frac{1}{(n+n)^3}\right)$ ESTE SE LOS DEJO A USTEDES, LA RESPUESTA ES $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx$, ENTRETÉNGANSE UN RATO.

Ojo: CUIDADO, PUEDE QUE NO SEA SIEMPRE $[a,b]=[0,1]$, NO OCURRE SIEMPRE, PERO SI QUIEREN JODERLES LA VIDA LO HARÁN, AHÍ $\frac{1}{n}=\frac{(b-a)}{n}$ Y $\frac{i}{n}=a+\frac{i(b-a)}{n}$

P4) ESTA ES UNA PREGUNTA QUE SE RESPONDE CON EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO, ¡SIEMPRE QUE LES PREGUNTEN POR LA <u>EXISTENCIA</u> DE UN ξ O CUALQUIER x EN $[a,b]$ SE USA TEOREMA DEL VALOR MEDIO (O ALGUNO SIMILAR) YA QUE ES EL ÚNICO QUE PRUEBA QUE EXISTE ESTE VALOR!, OJO, SOLO INDICA QUE EXISTE, NO INDICA QUE VALOR ES.

PARA RESOLVER ESTE TIPO DE PROBLEMAS ES SIMPLE Y GENERAL, PRIMERO INDICAMOS LAS COTAS DE LA FUNCIÓN, EN ESTE CASO, COMO $f(x)$ ES INTEGRABLE EN $[a,b]$ SABEMOS QUE ESTA FUNCIÓN ES ACOTADA, POR M Y m, AMBOS SON EL ÍNFIMO (M) Y SUPREMO (m) DE f, DE TAL MODO QUE

$$m \leq f(x) \leq M. \ (I)$$

EL SIGUIENTE PASO ES, CON NUESTRA RELACIÓN ANTERIOR ACOMODARLA Y OBTENER UNA RELACIÓN CON LA FUNCIÓN QUE QUEREMOS PROBAR, EN ESTE CASO QUEREMOS DEMOSTRAR QUE EXISTE UN VALOR PARA $\int_a^b f(x)g(x)dx$ POR LO TANTO A (I) LO MULTIPLICAMOS POR $g(x)$, OJO CON LOS CAMBIOS DE SIGNOS, EN ESTE CASO, COMO $g(x)$ NO CAMBIA DE SIGNO EN $[a,b]$ NO CAMBIA EL SENTIDO DE LA DESIGUALDAD POR LO TANTO

$$m \leq f(x) \leq M \ / \cdot g(x)$$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

Y COMO EL INTEGRAR NO CAMBIA EL SIGNO DE LA FUNCIÓN, PODEMOS INTEGRAR EN $[a,b]$ SIN QUE LA DESIGUALDAD CAMBIE, OBTENIENDO EN EL MEDIO DE LA DESIGUALDAD LA FUNCIÓN A LA QUE QUEREMOS BUSCAR QUE EXISTE UN VALOR ξ.

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \ / \cdot \int_a^b dx$$

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$$

AHORA QUE OBTUVIMOS NUESTRA FUNCIÓN DEBEMOS SER CAPACES DE PODER ACOTARLA POR NUESTAS COTAS INICIALES, ESTAS SON M y m, YA QUE PARA TODO LO QUE ESTÉ ACOTADO ENTRE M y m EXISTIRÁ UN $\xi \in [a,b]$ TAL QUE $f(\xi)$ SEA IGUAL A LO ACOTADO, ESA ES LA GRACIA DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO, SE CUMPLE SOLO SI $f(x)$ ES CONTINUA EN $[a,b]$. VOLVIENDO AL PROBLEMA, SABEMOS QUE LAS CONSTANTES NO AFECTAN A LA INTEGRAL, POR LO TANTO

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$$

POR LO MISMO DE ANTES, LA INTEGRAL NO CAMBIA EL SIGNO, ASÍ

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx \ / \div \int_a^b g(x)dx$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

POR FAVOR **NUNCA** HAGAN ESTO

$$\frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \frac{\int_a^b f(x)dx \cdot \cancel{\int_a^b g(x)dx}}{\cancel{\int_a^b g(x)dx}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

ESO ESTA MAL, HORRIBLEMENTE MAL, CONTRA EJEMPLO si $f(x)=1$ y $g(x)=1$

$\int_a^b 1\cdot dx = (b-a)$; POR LO TANTO $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx = (b-a)(b-a)$

PERO $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b 1\,dx = (b-a)$

ES DISTINTO, POR ESO **NO** SE PUEDEN DIVIDIR.
POR MUY TENTADOR QUE SEA

VOLVIENDO AL PROBLEMA, TENEMOS QUE

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$

POR LO TANTO EXISTE $\xi \in [a,b]$ TAL QUE

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

LUEGO, DESPEJANDO, LLEGAMOS A LO QUE QUERÍAMOS DEMOSTRAR, PUES EXISTE $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\underline{\underline{f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx}}$$

$\boxed{P5}$ ESTA PREGUNTA NO ES COMPLICADA, SOLO HAY QUE IR CON CALMA

a) LA PRIMERA PARTE PRIMERO PROBAR QUE si $f^{-1}(x) = g(x)$ DE TAL FORMA QUE $g\circ f(x) = x$ (DEFINICIÓN DE FUNCIÓN INVERSA) SE TIENE QUE ESTA ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE SI $f(x)$ LO ES.

si $f(x)$ ES CRECIENTE PARA $[a,b]$ IMPLICA QUE

$$\text{si } x_1, x_2 \in [a,b] \text{ y } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

DEBEMOS PROBAR QUE SIENDO $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ DE TAL FORMA QUE $y_1 < y_2$, PROBAR QUE $g(y_1) < g(y_2)$

PERO $g(y_1) = g\circ f(x_1) = x_1$ y $g(y_2) = g\circ f(x_2) = x_2$

Y SABEMOS QUE $x_1 < x_2$, POR LO TANTO $g(y_1) < g(y_2)$

DEMOSTRANDO QUE SI $f(x)$ ES CRECIENTE SU INVERSA $g(x) = f^{-1}(x)$ TAMBIEN LO ES.

AHORA LA INTEGRABILIDAD, SI $f(x)$ ES INTEGRABLE EN $[a,b]$ ADEMÁS ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE, TENEMOS QUE PARA UNA PARTICIÓN P DE $[a,b]$

$M_i(f) = f(t_i)$ Y $m_i(f) = f(t_{i-1})$ PARA UN INTERVALO $[t_{i-1}, t_i]$

Y PARA $\varepsilon > 0$ SE CUMPLE QUE

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

EL CUAL ES EL TEOREMA QUE USAMOS PARA DEMOSTRAR QUE f ES INTEGRABLE,

AHORA, PARA $g(x) = f^{-1}(x)$ EN $[c,d]$ TAL QUE $c = f(a)$ Y $d = f(b)$ PORQUE f Y f^{-1} SON CRECIENTES, TENEMOS QUE PARA CADA PARTICIÓN Q DE $[c,d]$ TENEMOS QUE SIENDO $Q = \{y_0 = c, y_1, \dots, y_n = d\}$ EL ínfimo DE CADA INTERVALO $[y_{i-1}, y_i]$ CORRESPONDE A $g(y_i) = M_i$; Y EL SUPREMO DE CADA INTERVALO CORRESPONDE A $g(y_{i-1}) = m_i$, POR LO TANTO LA SUMA SUPERIOR E INFERIOR QUEDA

$$S(g,Q) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i)(y_i - y_{i-1})$$

$$s(g,Q) = \sum_{i=1}^{n} g(y_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

Y AL RESTARLOS OBTENEMOS

$$S(g,Q) - s(g,Q) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i)(y_i - y_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} g(y_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

$$S(g,Q) - s(g,Q) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i)(y_i - y_{i-1}) - g(y_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

$$S(g,Q) - s(g,Q) = \sum_{i=1}^{n} (g(y_i) - g(y_{i-1}))(y_i - y_{i-1})$$

Pero $g(y_i) = g \circ f(x_i) = x_i$ Y CADA $y_i = f(x_i)$

POR LO TANTO, SI REEMPLAZAMOS

$$S(g,Q) - s(g,Q) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - x_{i-1}](f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\underbrace{f(x_i)}_{M_i} - \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\underbrace{f(x_{i-1})}_{m_i}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})}$$

$$= S(f,P) - s(f,P) = S(f^{-1},Q) - s(f^{-1},Q)$$

QUEDANDO QUE LA DIFERENCIA DE LA SUMA SUPERIOR CON LA SUMA INFERIOR DE f^{-1} ES IGUAL A LA DIFERENCIA ENTRE LA SUMA SUPERIOR Y LA INFERIOR DE $f(x)$, ADEMÁS, COMO $f(x)$ ES INTEGRABLE

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow S(f^{-1},Q) - s(f^{-1},Q) < \varepsilon, \text{ CON } \varepsilon > 0$$

POR LO TANTO SI $f(x)$ ES INTEGRABLE f^{-1} ES INTEGRABLE, OJO, LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES **NO** ES SIEMPRE INTEGRABLE, LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES INVERSAS SI.

b) CONSIDERANDO $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ PARTICIÓN DE $[a,b]$ Y $Q=\{f(x_0),\dots,f(x_n)\}$ PARTICIÓN DE $[c,d]$ SOLO TENEMOS QUE REEMPLAZAR LAS SUMAS QUE DEFINIMOS ANTES,

PARA $f(x)$ TENEMOS QUE $S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$

Y PARA $f^{-1}(x)$ TENEMOS $s(f^{-1},Q)=\sum_{i=1}^{n} f^{-1}(f(x_{i-1}))(f(x_i)-f(x_{i-1}))$

AL SUMARLAS OBTENEMOS

$$S(f,P)+s(f^{-1},Q)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n} f^{-1}[f(x_{i-1})](f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

NOTAMOS QUE $f^{-1}[f(x_{i-1})]=x_{i-1}$ OBTENEMOS

$$S(f,P)+s(f^{-1},Q)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})+x_{i-1}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot x_i-\cancel{f(x_i)\,x_{i-1}}+\cancel{x_{i-1}f(x_i)}-x_{i-1}f(x_{i-1})$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i-f(x_{i-1})\cdot x_{i-1}$$ LA CUAL ES LA SUMA TELESCÓPICA, QUE DESARROLLANDO QUEDA

$$=f(x_n)x_n-f(x_0)x_0$$

$$=f(b)\cdot b-f(a)a=\boxed{d\cdot b-ac}$$

c) PARA ESTA PARTE SOLO DEBEMOS RECORDAR QUE AL APLICAR EL $\lim_{n\to\infty}$ A LAS SUMAS, YA SEAN SUPERIOR O INFERIOR ESTA SE TRANSFORMA EN LA INTEGRAL, POR LO TANTO SI

$$S(f,P)+s(f^{-1},Q)=db-ac \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P)+\lim_{n\to\infty} s(f^{-1},Q)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}(db-ac)}_{\text{NO TIENE TÉRMINOS CON } n}$$

$$\int_a^b f(x)dx+\int_c^d f^{-1}(x)dx=db-ac$$

$$\Rightarrow \int_c^d f^{-1}=bd-ac-\int_a^b f(x)dx$$

P6| ESTE PROBLEMA LO ÚNICO COMPLICADO QUE TIENE ES QUE MEZCLA TODO, PERO SI SON PACIENTES Y VAN CON CALMA PARTIENDO CON LA DEFINICIÓN DE CADA EXPRESIÓN MOSTRADA VERÁN QUE ESTE TIPO DE DEMOSTRACIÓN SALEN SOLAS.

PRIMERO NOS DICEN QUE ES CRECIENTE, ¿SUENA REPETITIVO NO? UNA GRACIA TIENEN LAS FUNCIONES CRECIENTES, Y MONÓTONAS EN GENERAL, CON LAS SUMAS DE RIEMANN, REVISANDO LA AYUDANTÍA ANTERIOR NOTAMOS QUE, AL SER CRECIENTE Y TENEMOS UNA PARTICIÓN $P=\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $M_i = f(t_i)$ Y $m_i = f(t_{i-1})$

$$Y \quad S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})](t_i - t_{i-1})$$

Y ESTA ES UNA SUMA TELESCÓPICA, ENTONCES SÍ, LA ÚNICA GRACIA QUE $f(x)$ SEA CRECIENTE ES QUE AL RESTAR SUS SUMAS SUPERIOR E INFERIOR SE OBTIENE LA SUMA TELESCÓPICA, ADEMÁS RECUERDEN QUE $(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{n}$ PARA LA PARTICIÓN REGULAR, POR LO TANTO

$$(I)\ S(f,P) - s(f,P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) = \frac{1}{n}[f(t_n) - f(t_0)] = \frac{1}{n}[f(1) - f(0)]$$

TENEMOS UNA PARTE, AHORA FALTA LA SIGUIENTE, SI VEMOS LA OTRA PARTE HAY UNA RESTA, GENIAL, UNA SUMATORIA Y UNA INTEGRAL, PRIMERO LA SUMATORIA, SI ESTÁ $f(x)$ DEFINIDO EN $[0,1]$ Y P ES LA PARTICIÓN REGULAR TENEMOS QUE EL PASO $(t_i - t_{i-1}) = \frac{(1-0)}{n}$, EN DONDE $t_i = \frac{i(1-0)}{n} = \frac{i}{n}$ Y $t_{i-1} = \frac{(i-1)}{n}$, POR LO TANTO ESA SUMATORIA ES LA SUMATORIA SUPERIOR DE $f(x)$

$$(II)\ S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(t_i)}_{\text{POR SER CRECIENTE}} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

AHORA SOLO NOS QUEDA LA INTEGRAL Y LA DESIGUALDAD, NOTAR QUE LA INTEGRAL ESTÁ RESTANDO, POR LO TANTO DEBEMOS BUSCAR A QUÉ ES MAYOR LA INTEGRAL DE $f(x)$ Y MULTIPLICARLA POR (-1), AHORA ¿A QUÉ ES MAYOR LA INTEGRAL? PUES A LA SUMA INFERIOR, POR LO TANTO

$$\int_0^1 f(x)dx \geq s(f,P) \quad / \cdot -1$$

$$-\int_0^1 f(x)dx \leq -s(f,P) \quad /$$ ¿VEN QUE AHORA TODO SE FORMA SOLO? SUMEMOS $S(f,P)$ A AMBOS LADOS

$$S(f,P) - \int_0^1 f(x)dx \leq S(f,P) - s(f,P) \quad /$$ AHORA REEMPLAZAMOS POR LO OBTENIDO EN (I) Y (II) OBTENIENDO

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n}[f(1) - f(0)]$$

QUEDANDO DEMOSTRADO

BONITO ¿NO?