Control 2 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 30 de Septiembre, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Sea $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^2 - 1$.

   Dada la partición $P = \{ 1,\ 1.1,\ 1.2,\ 1.3,\ 1.4,\ 1.5,\ 1.6,\ 1.7,\ 1.8,\ 1.9,\ 2 \}$.

   Determine la $S(f, P)$ (suma superior) y $s(f, P)$ (suma inferior).

   Solución:

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	0	0.21	0.44	0.69	0.96	1.25	1.56	1.89	2.24	2.61	3

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Como f es creciente en $[1, 2]$ tenemos que: $m_i(f) = f(x_{i-1})$, $M_i(f) = f(x_i)$, y $\triangle x_i = 0.1$,

$\boxed{\text{1 punto.}}$

así,

$S(f, P) = \sum_{i=1}^{10} M_i(f) \cdot \triangle x_i$

$S(f, P) = 0.1\,[0.21 + 0.44 + 0.69 + 0.96 + 1.25 + 1.56 + 1.89 + 2.24 + 2.61 + 3] = 1.485.$

$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

$s(f,P) = \sum_{i=1}^{10} m_i(f)\cdot \triangle x_i$

$s(f,P) = 0.1\,[0+0.21+0.44+0.69+0.96+1.25+1.56+1.89+2.24+2.61] = 1.185$

$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

2. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, definida por: $f(x)=3-2x$.

   Encuentre n en $\mathbb{N}$ tal que $S(f,P_n)-s(f,P_n)<10^{-3}$, donde

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

   Solución:

   Como es f es decreciente (afín con pendiente negativa) tenemos:
   $M_i(f)=f(x_{i-1}),\ m_i(f)=f(x_i)$, y $\triangle x_i = \frac{1}{n}$,

$\boxed{\text{1 punto.}}$

   de tal manera que,

   $S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{10} M_i(f)\cdot\triangle x_i = \sum_{i=1}^{10} f(x_{i-1})\cdot\frac{1}{n}$.

   $s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{1}{n}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

   Luego
   $S(f,P_n)-s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})-f(x_i)]\cdot\frac{1}{n}$

   $S(f,P_n)-s(f,P_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1})-f(x_i)]$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

   $S(f,P_n)-s(f,P_n) = \frac{1}{n}\{f(x_o)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})-f(x_n)\}$
   $S(f,P_n)-s(f,P_n) = \frac{1}{n}\{f(x_0)-f(x_n)\}$

   Como $f(x_0)=f(a)=3,\ \ f(x_n)=f(b)=f(1)=1,$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

tenemos que:

$S(f,P_n) - s(f,P_n) = \frac{2}{n} < 10^{-3}$, tomando $n_0 = 2001$, se cumple que:
$S(f,P_n) - s(f,P_n) < 10^{-3}, \ \ \forall n \geq 2001$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$