Control 10 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 9 de Diciembre, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Determine el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en cero, para $f(x) = \sqrt{x+1}$.

   Solución:

   Aplicaremos, la definición de Polinomio de Taylor:
   $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^k$.

   Tenemos: $f(x) = \sqrt{x+1}$
   $\Rightarrow$
   $f^{(1)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$,
   $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$,
   $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2}$,
   $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+1)^{-7/2}$,

   $\boxed{\text{3 puntos.}}$

   En este caso $c = 0$, por lo tanto:
   $f(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = 1/2$, $f^{(2)}(0) = -1/4$, $f^{(3)}(0) = 3/8$, $f^{(4)}(0) = -15/16$.

   $\boxed{\text{2 puntos.}}$

   Así, el polinomio de Taylor de grado 4 está dado por:

   $$P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) - \frac{1}{8}(x-0)^2 + \frac{1}{16}(x-0)^3 - \frac{15}{16}(x-0)^4.$$

   $\boxed{\text{1 punto.}}$

2. Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencia, analizando los extremos de este.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^n}{(n+1)^2}.$$

Solución:

Sea

$$u_n = \frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^n}{(n+1)^2}$$

luego:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{\left(\frac{3}{2}x\right)^{n}}{(n+1)^2}}\right| =$$

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}|x| \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = |x|\frac{3}{2} < 1$$

$$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$$

$\Rightarrow$ $|x| < 2/3$ por lo tanto el intervalo de convergencia inicial es: $]-2/3; 2/3[$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Ahora evaluaremos los extremos del intervalo para ver si la serie en estos puntos converge o diverge.

Evaluando en $x = 2/3$, la serie nos queda:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2}$, la cual converge por ser serie p, con $p = 2$.

$$\boxed{\text{1 punto.}}$$

Evaluando en $x = -2/3$, la serie nos queda:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{-2}{3}\right)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)^2}$,

la cual converge por criterio de Leibnitz, es decir, $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ es decreciente y su lmite es cero cuando n tiende a infinito.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Finalmente el intervalo de convergencia de la serie es:$[-2/3; 2/3]$

$\boxed{\text{0,5 puntos.}}$