

AYUDANTÍA 11: CONVERGENCIA DE SERIES

ÁLVARO TELLO CRINO

SERIES ESPECIALES:

SERIE TELESÓPICA $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) \dots = b_1 - b_{n+1}$

SERIE GEOMÉTRICA $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ SOLO SI $0 < |r| < 1$

P-SERIES $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ SI $p = 1 \Rightarrow$ SERIE ARMÓNICA.

SERIES ALTERNADAS $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, con $a_n > 0$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA:

SI $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, LO AL CONTRARIO, PERO SI PODEMOS DECIR $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE.

SERIE TELESÓPICA CONVERGE SOLO SI $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ Y $S = b_1 - L$

SERIE GEOMÉTRICA CONVERGE SI $|r| < 1$, DIVERGE SI $|r| > 1$

SERIE ALTERNADA, SIENDO $a_n > 0$ CONVERGE SI Y SOLO SI $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
(CRITERIO DE LEIBNITZ) Y $a_{n+1} \leq a_n$

CONVERGENCIA ABSOLUTA: SI $\sum |a_n|$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE.

CRITERIO DEL CUOCIENTE CONVERGE SI $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ DIVERGE SI $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$
ABSOLUTAMENTE

CRITERIO DE LA RAÍZ CONVERGE SI $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ DIVERGE SI $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
ABSOLUTAMENTE

CRITERIO DE LA INTEGRAL, SI f ES POSITIVA Y DECRECIENTE PARA $x \geq 1$ Y $a_n = f(n)$

ENTONCES $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Y $\int_1^{\infty} f(x) dx$ CONVERGEN Y DIVERGEN SIMULTÁNEAMENTE.

COMPARACIÓN, SIENDO a_n Y $b_n > 0$

$$\sum a_n \text{ converge si } 0 < a_n \leq b_n \quad \left| \quad \sum a_n \text{ DIVERGE si } 0 < b_n \leq a_n \right.$$
$$\text{Y } \sum b_n \text{ converge} \quad \left| \quad \text{Y } \sum b_n \text{ DIVERGE} \right.$$

COMPARACIÓN EN EL LÍMITE: SIENDO a_n Y $b_n > 0$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$

$\sum a_n$ CONVERGE SI $\sum b_n$ CONVERGE

DIVERGE SI $\sum b_n$ DIVERGE.

PROBLEMAS

P1) SEA a_n UNA SUCESIÓN DE CONVERGENCIA A CERO. DEMUESTRA QUE

$b_n = a_n \sin(\sqrt{n^2+1})$ CONVERGE A CERO

COMO $0 \leq |\sin(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{R}$ SE TIENE QUE

$$0 \leq |a_n \sin(\sqrt{n^2+1})| \leq |a_n|$$

COMO $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n| \rightarrow 0$ Y POR SANDWICH $|b_n| \rightarrow 0$.

POR LO TANTO $b_n \rightarrow 0$.

P2) SEA a_n DECRECIENTE Y POSITIVA TAL QUE $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ CONVERGE A UN NÚMERO REAL

$\Gamma \neq 1$. DEMUESTRA QUE $a_n \rightarrow 0$

COMO a_n ES DECRECIENTE $\Rightarrow 0 < a_{n+1} < a_n \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$.

POR LO TANTO $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \Gamma \geq 1$, PERO COMO $\Gamma \neq 1 \quad \Gamma > 1$

Y POR EL CRITERIO DEL CUOCIENTE $\sum a_n$ CONVERGE, POR LO TANTO $a_n \rightarrow 0$.

P3) PRUEBE CONVERGENCIA DE:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ serie telescópica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

CONVERGE SI $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - 0 = 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3(n^3+n)}}$

$$\sqrt{n^3(n^3+n)} \geq \sqrt{n^3(n^3)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3(n^3+n)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3(n^3)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Y COMO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3(n^3+n)}}$ CONVERGE.

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln(n)}$$

sabiendo que $\ln(n) \leq n-1$
 $\Rightarrow \frac{1}{1+\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$

y como $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum \frac{1}{1+\ln(n)}$ diverge

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

por el criterio del cociente

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad y \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ converge} \end{aligned}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n+\ln(n)}$$

serie alterna, se estudia $a_n = \frac{1}{1+n+\ln(n)}$

$$\text{claramente } 1+n \leq 1+(n+1)$$

$$\text{y como } \ln(n) < \ln(n+1)$$

$$\Rightarrow 1+n+\ln(n) < 1+(n+1)+\ln(n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+n+\ln(n)} < \frac{1}{1+(n+1)+\ln(n+1)}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

por otro lado $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n+\ln(n)} \rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n+\ln(n)}$ converge por criterio de Leibnitz.

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos(\frac{\pi}{3}n)}{2^n}$$

para saber el coseno probamos convergencia absoluta

$$0 \leq \left| \frac{n^2 \cos(\frac{\pi}{3}n)}{2^n} \right| \leq \frac{n^2}{2^n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2 \cos(\frac{\pi}{3}n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

por criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum \frac{n^2}{2^n} \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum \left| \frac{n^2 \cos(\frac{\pi}{2}n)}{2^n} \right| \text{ converge absolutamente}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{n^2 \cos(\frac{\pi}{2}n)}{2^n} \text{ converge}$$

g) $\sum \frac{e^{2n}}{n^n}$ por criterio de la raíz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^2}{n} = 0 \text{ por lo tanto } \sum \frac{e^{2n}}{n^n} \text{ converge}$$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ decida si converge.

por criterio del cociente $a_{n+1} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right|$$

Recordando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2}{e} < 1$$

por lo tanto converge.

i) Sea $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1)$ decida si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge o diverge.

$$\text{Tenemos que } a_n = \ln\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}\right) = \ln(2)$$

por lo tanto como $\ln(2) \neq 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Diverge.

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(n) \right]$$

Serie ALTERNANTE

Primero para $x > 0$ $f(x) = \arctg(x)$ ES CRECIENTE
POR LO TANTO $\arctg(n) \leq \arctg(n+1)$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \arctg(n) \geq \frac{\pi}{2} - \arctg(n+1)$$

$$\Rightarrow a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - \arctg(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} - \arctg(n) = 0$$

POR LO TANTO $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(n) \right]$ converge.

• K) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \sin(1/n)$

PRIMERO NOTAR QUE PARA $n \in \mathbb{N}$ $\cos(n\pi) = (-1)^n \Rightarrow$ serie ^{alternante}
POR LO TANTO BASTA QUE PROBAR QUE $\sin(1/n)$ ES
DECRECIENTE Y SU LIMITE ES CERO

SABEMOS QUE $1/n$ ES DECRECIENTE Y VIVE ENTRE $[1, 0]$
PARA TODOS $n \geq 1$.

AHORA, NOTAR QUE $\sin(n)$ ENTRE $[0, 1]$ ES CRECIENTE,
POR LO TANTO $\sin(1/n)$ DEBE SER DECRECIENTE.

POR OTRO LADO $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(1/n) = \sin(0) = 0$.

CUMPLIENDO CON LAS CONDICIONES DEL CRITERIO DE
LEIBNITZ, POR LO TANTO LA SERIE ES CONVERGENTE.