Pauta Control 9 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Viernes 29 de Noviembre, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Dada la sucesión $a_n = \frac{n!}{n^n}, \ \ n \in \mathbb{N}$.

   i) Demuestre que a_n es acotada.
   Solución:

   Demostraremos que $a_n < 2$, usando inducción.

   En efecto:

   (1) para n=1, tenemos que $a_1 = \frac{1!}{1} = 1 < 2$.

   $\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

   (2) Suponemos que se cumple para $n = k$, es decir, $a_k < 2$.

   Por demostrar que se cumple para $n = k+1$, es decir, $a_{k+1} < 2$.

   $\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

   Dem: $a_{k+1} = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} = \frac{(k+1)\cdot k!}{(k+1)(k+1)^k} = \frac{k!}{(k+1)^k} \leq \frac{k!}{k^k} < 2$.

   $\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

   Por lo tanto, $a_n < 2, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

ii) Demuestre que a_n es decreciente.
Solución:

Demostraremos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.

$\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

En efecto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \frac{(n+1)!\,n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$\boxed{\text{1.5 puntos.}}$

Además, como $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$n < n+1 \;\Rightarrow\; \frac{n}{n+1} < 1 \;\Rightarrow\; (n/(n+1))^n < 1.$$

$\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

Por lo tanto, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, es decir a_n es decreciente.

$\boxed{\text{0.5 puntos.}}$

2. Analice la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(-2)^{n+1}\,n!}.$$

Solución:

Aplicaremos criterio del cuociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^{n-1}}{(-2)^{n+2}\,(n+1)!}}{\frac{3^{n-2}}{(-2)^{n+1}\,n!}}\right|$$

$\boxed{\text{2.5 puntos.}}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2(n+1)} = 0 < 1$$

$\boxed{\text{2.5 puntos.}}$

Por lo tanto la serie converge.

$\boxed{\text{1 punto.}}$