Pauta Control 8 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 18 de Noviembre, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Analice la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{ln(2)} \frac{1}{e^x + 4e^{-x}}\, dx.$$

Solución:

$I = \int_{-\infty}^{ln(2)} \frac{1}{e^x+4e^{-x}}\, dx = \lim_{a\to -\infty} \int_a^{ln(2)} \frac{e^x}{4+e^{2x}}\, dx = \frac{1}{4} \lim_{a\to -\infty} \int_a^{ln(2)} \frac{e^x}{1+\left(\frac{e^x}{2}\right)^2}\, dx =$
.

$\boxed{2 \text{ puntos.}}$

Sea $\quad u = \frac{e^x}{2} \;\Rightarrow\; du = \frac{e^x}{2}\, dx$

Luego, $\;I = \frac{1}{4} \lim_{a\to -\infty} \int_a^{ln(2)} \frac{e^x}{1+\left(\frac{e^x}{2}\right)^2}\, dx = \frac{1}{4} \lim_{a\to -\infty} \int_{e^a/2}^{1} \frac{2}{1+u^2}\, du =$
$\frac{1}{2} \lim_{a\to -\infty} \int_{e^a/2}^{1} \frac{2}{1+u^2}\, du.$

$\boxed{2 \text{ puntos.}}$

Así,
$I = \frac{1}{2} \lim_{a\to -\infty} arctg(u)|_{e^a/2}^{1} = \frac{1}{2} \lim_{a\to -\infty} [\pi/4 - arctg(e^a/2)] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{2}\right] =$
$\frac{3\pi}{8}.$

$\boxed{2 \text{ puntos.}}$

2. Analice la convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_1^2 \frac{1}{x\,(ln(x))^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x\,(ln(x))^2}\,dx.$$

Solución:

$\int_1^2 \frac{1}{x\,(ln(x))^2}\,dx = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x\,(ln(x))^2}\,dx.$

Sea $u = ln(x) \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx$

Luego, $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{ln(1+\varepsilon)}^{ln(2)} \frac{du}{u^2}.$

$\boxed{\text{3 puntos.}}$

Así, $I = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{u}\Big|_{ln(1+\varepsilon)}^{ln(2)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} -\frac{1}{ln(2)} + \frac{1}{ln(1+\varepsilon)} = \nexists.$

$\boxed{\text{2.5 puntos.}}$

Por lo tanto la integral diverge.

$\boxed{\text{0.5 puntos.}}$