AYUDANTÍA 10: SERIES Y PREPARACIÓN PRUEBA II

P1] DEMUESTRE QUE LA SUCESIÓN $a_n = \frac{2^n}{4\cdot 2^n+1}$ $n \in \mathbb{N}$ es convergente y ENCUENTRE SU LÍMITE

PARA ESTO DEMOSTRAREMOS QUE ES CRECIENTE Y ACOTADA, POR LO TANTO CONVERGE, PRIMERO CRECIENCIA

$$1 \leq 2 \quad / \cdot 2^n$$
$$2^n \leq 2^{n+1} \quad / + 4\cdot 2^n \cdot 2^{n+1}$$
$$4\cdot 2^n 2^{n+1} + 2^n \leq 4\cdot 2^n \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1}$$
$$2^n[4\cdot 2^{n+1}+1] \leq 2^{n+1}[4\cdot 2^n+1]$$
$$\frac{2^n}{[4\cdot 2^{n+1}+1]} \leq \frac{2^{n+1}}{[4\cdot 2^n+1]}$$
$$\Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \text{ es creciente}$$

NOTAR QUE ES ACOTADA, partiendo con $0 < a_n$, POR OTRO LADO

$$0 < 4\cdot 2^n < 4\cdot 2^n + 1$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{4\cdot 2^n+1} < \frac{1}{4\cdot 2^n} \quad / \cdot 2^n$$
$$\Rightarrow 0 < \frac{2^n}{4\cdot 2^n+1} < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < a_n < 1/4$$

POR LO TANTO a_n converge, AHORA el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4+(1/2)^n} = \frac{1}{4} \quad \text{ya que} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

P2) CONSIDERA LA SUCESIÓN DEFINIDA POR RECURRENCIA POR $a_1 = \sqrt{5}$ Y $a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 5}$. DEMOSTRAR CONVERGENCIA Y BUSCAR LÍMITE.

1° PROBAR QUE ES ACOTADA

NOTAR QUE $f(x): [0, \infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ es CRECIENTE, POR LO TANTO, SI $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

para $n = 1$ $\quad a_1 = \sqrt{5} < 5$

Si SUPONEMOS QUE SE CUMPLE para $k = n$ $\quad a_n < 5$

ENTONCES

$$4a_n < 20 \quad / +5$$
$$4a_n + 5 < 25 \quad / \sqrt{\ }$$
$$\sqrt{4a_n + 5} < 5$$
$$a_{n+1} < 5$$

Como se cumple para $k = 1$; $k = n$ y $n + 1$ POR INDUCCIÓN, se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, POR LO TANTO a_n es acotada

2° PROBAR MONOTONÍA, PARA $k = 1$

como $5 + \sqrt{5} > 5$, ES DECIR $a_2 > a_1$, SUPONEMOS QUE SE CUMPLE para $k = n \Rightarrow a_n < a_{n+1}$, entonces

$$4a_n < 4a_{n+1} \quad / +5$$
$$4a_n + 5 < 4a_{n+1} + 5$$
$$\sqrt{4a_n + 5} < \sqrt{4a_{n+1} + 5}$$
$$a_{n+1} < a_{n+2}$$

POR INDUCCIÓN se HA DEMOSTRADO QUE a_n es creciente.

Y como a_n es creciente y ACOTADA. Es convergente, por lo tanto el límite existe y como $\sqrt{5} \leq a_n \leq 5 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow L \in [\sqrt{5}, 5]$

Y si $\lim_{n \to \infty} a_n = L = \lim_{n \to \infty} a_{n+1}$

$$\Rightarrow \quad L = \sqrt{4L + 5}$$
$$L^2 = 4L + 5$$
$$L^2 - 4L - 5 = 0$$
$$(L + 1)(L - 5) = 0$$
$$\text{como } L + 1 > 0 \Rightarrow \underline{L = 5}$$

P3 | Considere la sucesión definida por recurrencia como sigue:

$$a_1 = 1 \quad y \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{9+(a_n)^2}{2}} \quad \forall n \geq 1$$

a) Demuestre que a_n es creciente

b) Demuestre que a_n es acotada

c) Encuentre el límite de la sucesión.

a) Debe probar que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Para $n=1$ se tiene

$$a_1 \leq a_2$$

$$1 \leq \sqrt{\frac{9+1^2}{2}} = \sqrt{5} \checkmark \text{ se cumple}$$

Suponemos que se cumple para n tq $a_n < a_{n+1}$

Por demostrar que se cumple para $n+1$,

$$a_n < a_{n+1} \quad /(\ )^2$$

$$(a_n)^2 < (a_{n+1})^2 \quad /+9$$

$$9+a_n^2 < 9+(a_{n+1})^2 \quad /\div 2$$

$$\frac{9+a_n^2}{2} < \frac{9+(a_{n+1})^2}{2} \quad /\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{\frac{9+a_n^2}{2}} < \sqrt{\frac{9+(a_{n+1})^2}{2}}$$

$$a_{n+1} < a_{n+2} \Rightarrow \text{se cumple para } n+1$$

Por inducción se cumple para todo n.

b) Para ser acotada debe ser acotada superior como inferiormente

inferiormente por a_1 por ser creciente

Proponemos a 3 como cota superior, para $n=1$ se cumple

hipótesis $a_n \leq 3$.

$$\Rightarrow a_n^2 \leq 9 \quad /+9$$

$$a_n^2+9 \leq 9+9 \quad /\div 2$$

$$\frac{a_n^2+9}{2} \leq \frac{9+9}{2} \quad /\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{\frac{a_n^2+9}{2}} \leq \sqrt{\frac{9+9}{2}} \Rightarrow a_{n+1} < 3$$

se cumple para $n+1$

por inducción se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

c) calcular el límite, como es acotado y creciente a_n converge y el límite ~~L~~ existe y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9+a_n^2}{2}} = a$$

$$\sqrt{\frac{9+a^2}{2}} = a$$

$$9+a^2 = 2a^2$$

$$9 = a^2$$

$\Rightarrow a = \pm 3$ pero como $a_n > 1$

$$\underline{a = 3}$$

PRUEBA AÑO 2009

a) Calcule $\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\,dx$ por parte

$u = \cos(x)$ $\quad du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x dx$ $\quad v = e^x$

$$I = e^x \cos(x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,dx = e^{-\pi} - 1 + \int_0^{\pi} e^x \sin(x)$$

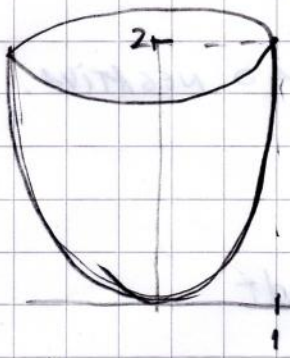
$u = \sin(x)$ $\quad du = \cos(x)$

$dv = e^x dx$ $\quad v = e^x$

$$I = e^{-\pi} - 1 + \underbrace{e^x \sin(x)\Big|_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} e^x \cos(x)\,dx$$

$$2I = e^{-\pi} - 1 \Rightarrow \int_0^{\pi} e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^{-\pi}-1}{2}$$

c) Consideremos un recipiente parabólico de 2 metros de altura y radio máximo de 1 metro, si el agua está hasta el nivel x, ¿cuál es el volumen a ese nivel?



$\Rightarrow y = a t^2 \Rightarrow 2 = a \cdot 1 \Rightarrow$

si lo hacemos rotar en torno del eje $y \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{a}}$

$$V(x) = \pi \int_0^x (\text{Radio})^2 \, dt$$

sea el radio $t = \sqrt{\frac{t}{a}}$ con $t \in [0, x]$

$$V(x) = \pi \int_0^x \left(\sqrt{\frac{t}{a}}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \boxed{\frac{\pi}{4} x^2 [m^2]}$$

PRUEBA GLOBAL AÑO 2012

a) Calcule longitud de la curva de $y = \ln(\sec(x))$ para $x \in [0, \pi/4]$

Ayuda $\int \sec(x)\,dx = \ln(\sec x + \tan(x)) + C$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad \text{donde} \quad (\ln(\sec(x)))' = \frac{1}{\cancel{\sec(x)}} \cdot \cancel{\sec(x)} \cdot tg(x)$$

$$\Rightarrow L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2(x)}\, dx$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2(x)}\, dx = \int_0^{\pi/4} \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \ln\left(\frac{\sec(\pi/4) + \tan(\pi/4)}{\sec(0) + \tan(0)}\right)$$

b) analice si $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$ converge o diverge

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_b^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx \qquad \begin{array}{ll} u = 2-x & u(-1) = 3 \\ du = -x & u(b) = 2-b \end{array}$$

$$\lim_{b \to \infty} -\int_{2-b}^{3} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{b \to \infty} -\left(2\sqrt{u}\Big|_{2-b}^{3}\right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} -2\sqrt{3} + 2\sqrt{2-b} \to -\infty$$

$\Rightarrow$ diverge.

b) Encuentre las funciones diferenciables que nunca son cero tales que

$$\int_0^x f(t)dt = f(0)f(x) + \int_0^1 f(x)dx \quad (1)$$

Como nunca es cero $\Rightarrow$ $f(x)$ es siempre positiva o negativa.

Caso 1: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

evaluando (1) en $x=0$

$$\int_0^0 f(t)dt = 0 \Rightarrow f(0)f(0) + \int_0^1 f(t)dt$$

$$0 = (f(0))^2 + \int_0^1 f(t)dt$$

pero como $f(0)$ y $\int_0^1 f(t)dt$ son positivos la igualdad anterior produce contradicción, por lo tanto $f(x)$ no es positivo.

Caso 2: $f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Derivando a ambos lados

$$f(x) = f(0) \cdot f'(x)$$

$$\frac{1}{f(0)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad / \int dx$$

$$C + \frac{x}{f(0)} = \ln(\underbrace{-f(x)}_{\text{porque } f(x) \text{ es negativa}})$$

$$\Rightarrow \quad -f(x) = Ke^{\frac{x}{f(0)}} \Rightarrow f(x) = -Ke^{\frac{x}{f(0)}}$$

$$f(0) = -K \Rightarrow f(x) = -Ke^{\frac{-x}{K}}$$

Reemplazando en (1) y evaluando en cero, para buscar K

$$0 = K^2 - K\int_0^1 e^{\frac{-x}{K}} dx$$

$$0 = K^2 + K^2 e^{\frac{-x}{K}} \Big|_0^1$$

$$0 = K^2 + K^2(e^{-1/K} - 1)$$

$$0 = K^2(1 + e^{-1/K} - 1)$$

$$0 = K^2(e^{-1/K}) \quad \text{como } e^{-1/K} \text{ nunca es cero} \Rightarrow K^2 = 0$$

$\Rightarrow K = 0$ lo que produce contradicción, por lo tanto ninguna función negativa cumple (1) $\Rightarrow$ no existe función que cumple (1) y además sea distinta de cero.

Convergencia integrales

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{8+x^3}$ usando $0 < \cancel{x}^3 \leq 8+x^3$

$$\frac{1}{8+x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

y como $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ converge $\Rightarrow$ por criterio de comparación

$\int_1^\infty \frac{dx}{8+x^3}$ converge.

b) Determine valores de $s \in \mathbb{R}$ para los cuales

$\int_0^\infty e^{-st}\,dt$ converge.

Debemos buscar s tal que $\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\,dt$ exista

usando $u = -st \Rightarrow du = -s\,dt \Rightarrow dt = -\frac{du}{s}$ $\quad u(0)=0$, $u(b) = -bs$

operando

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\int_0^{-bs} e^u\,du = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s}\int_{-bs}^0 e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s}\, e^u \Big|_{-bs}^{0} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s}\left[e^0 - e^{-bs}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s}\left[1 - e^{-bs}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{e^{bs}}\right]$$

para que converja se debe cumplir que $bs \geq 0$ para que al aplicar el límite el exponencial tienda a cero, pero como está multiplicado por $1/s$; s no puede ser cero, así, para que la función converja

$$s \in \,]0, \infty[$$