Matemáticas II
Programa de Bachillerato
Álvaro Tello Crino

Ayudantía 7: Función Exponencial y Logaritmo II

Resumen:

Para todo $n \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\big(f(x)\big) + C$$

Regla de L'Hopital: Sean *f y g* dos funciones definidas en el intervalo [*a*,*b*] y sea c perteneciente a]*a*,*b*[si se da que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ó } = \frac{\infty}{\infty}$$

Si *f* y *g* son derivables en [*a*,*b*] entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Resumen métodos de integración:

1.- Cambio de variable: Se usa TODO el tiempo, cuando algo nos molesta, o hay una constante dando vueltas, usamos sustitución, ya que solo sabemos las fórmulas para las funciones elementales, no olvidar, corresponde a

$$Sea\ u = g(x) => \int f(u)du = \int f(x)°g(x)dx$$

2.- Fórmula integración por parte (vaca): Se utiliza cuando se debe integrar la multiplicación de dos funciones, basta saber que *u* será la función más simple de derivar y *dv* la función fácil de integrar, si ya usaron el cambio de variable *u* no tienen que usarlo para hacer la vaca, pueden usar otra letra, háganlo o se perderán…

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)dx$$

3.- Sustituciones recomendables:

a) Sustituciones trigonométricas: Si se encuentran algunos de estos elementos dividiendo se recomiendan estas sustituciones

$$a^2 + x^2 => x = a\tan(\varphi)\ o\ bien\ x = a \cdot \sinh(t)$$
$$a^2 - x^2 => x = a\sin(\varphi)\ o\ bien\ x = \operatorname{acos}(\varphi)$$
$$x^2 - a^2 => x = \operatorname{asec}(\varphi)\ o\ bien\ x = a \cdot \cosh(t)$$

b) Sustituciones racionales: Cuando las funciones principales son raíces se recomiendan las siguientes sustituciones

$$\sqrt[n]{ax + b} => ax + b = z^n$$
$$\sqrt[n]{x^2 + px + q} => x^2 + px + q = (z - x)^2$$
$$\sqrt[n]{q + px - x^2} = \sqrt[n]{(\alpha + x)(\beta - x)} => q + px - x^2 = (\alpha + x)^2 z^2\ o\ bien\ (\beta - x)^2 z^2$$

4.- Integración de polinomios:

a) Fracciones Parciales: La idea es separar los términos de la forma $\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^m(x-\alpha)^n}$ en términos de "fácil" integración, siempre que P(x) sea de menor grado que el denominador, si no es así, hay que dividir el polinomio P(x). La fórmula de fracciones parciales nos dice:

Si hay términos en el denominador de la forma $(ax^2 + bx + c)^m$ entonces ponemos

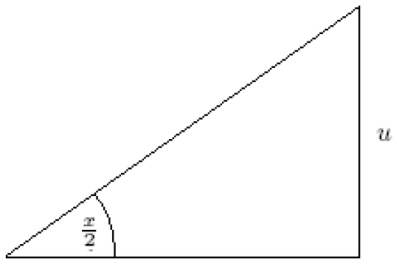
$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^m} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} + \cdots + \frac{Yx + Z}{(ax^2 + bx + c)^1}$$

Y si hay términos de la forma $(x - \alpha)^n$ entonces ponemos

$$\frac{A'}{(x - \alpha)^n} + \frac{B'}{(x - \alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{Z'}{(x - \alpha)^1}$$

Esto se realiza con el fin de separar la división inicial de polinomios por una serie de sumas de polinomios más simples y de fácil integración, lo difícil es calcular el valor de los coeficientes A, B, C, D, … , A', B'…

b) Polinomio de sin(x), cos(x): Si tenemos una división de polinomios formado por sin(x) o cos(x), se usa el cambio de variable $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right), du = \frac{1}{2}sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$. Para el desarrollo, recordamos que puede ser conveniente usar el siguiente triángulo



De aquí está claro que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

Además, con esto es fácil notar que

$$sec^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2}=u^2+1 => du=\frac{1}{2}(u^2+1)dx$$

$$=> dx=\frac{2}{(u^2+1)}du$$

Para calcular sin(x) y cos(x) usamos la fórmula de la suma del sin(x) y del cos(x)

$$\sin(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) => \sin(x)=\frac{2u}{u^2+1}$$

$$\cos(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)= cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Reemplazando nuestro polinomio original por los cambios aquí presentados, nos quedará un polinomio en funció de u, para el cual utilizamos la fórmula de fracciones parciales para poder integrarlo y después reemplazamos $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

<u>Problemas</u>:

P1) Analice la función y grafique

a) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$
b) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
c) $f(x)=\frac{x}{ln^2(x)}$
d) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$
e) $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$
f) $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x}e^{\frac{1}{x}}$
g) $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$
h) $f(x)=x+1-\frac{2}{x}-\frac{3\ln(x)}{x}$

P2) Calcule los siguientes límites:

i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^2}$

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x^3}$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)-1-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$

iv) $\lim_{x\to\infty} a^x \, , cuando \; 0 < a < 1$

v) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

vi) $\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$

vii) $\lim_{x\to\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

viii) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

ix) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

x) $\lim_{x\to\infty} x[\ln(x+1)-\ln(x)]$

P3) Integrales (de todo un poco, desordenadas, y muchas…)

i) $\int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx$

ii) $\int \frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

iii) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}}$

iv) $\int \frac{\sin(x)dx}{1+\sin(x)+\cos(x)}$

v) $\int \sin(3x)\cos(2x)\,dx$

vi) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

vii) $\int \frac{dx}{e^{3x}\sqrt{1-e^{-2x}}}$

viii) $\int \frac{\sin(x)}{4-cos^2(x)}dx$

ix) $\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx$

x) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(1+x^2)(1+x)^2}dx$

xi) $\int \frac{2x+3}{x^2-4}dx$

xii) $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx$

xiii) $\int \frac{xdx}{x^2+2x-3}$

xiv) $\int \frac{5}{(x-2)(x-1)^2(x^2+1)}dx$

xv) $\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx$

xvi) $\int \frac{dx}{2-x^2}$

xvii) $\int \frac{\cos(x)}{1+cos^2(x)}dx$

xviii) $\int \frac{dx}{3\sin(x)-4\cos(x)}$

ixx) $\int \frac{dx}{\sin(x)-cos(x)+1}$

xx) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

xxi) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$

xxii) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}dx$ $use\ u^2 = \frac{x-1}{x+1}$

xxiii) $\int e^{-\sqrt{x}}dx$

xxiv) $\int \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx$

xxv) $\int \frac{dx}{x\left(\ln(x)+ln^2(x)\right)}$

xxvi) $\int \frac{\sin(x)}{1+cos^2(x)}dx$

xxvii) $\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}dx$

xviii) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

ixxx) $\int \frac{\cot(x)}{\ln(\sin(x))}dx$

xxx) $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\sin(x)}}dx$