Guia 5 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Octubre, 2013

1. Despeja t en cada una de las siguientes expresiones:

   a) $2a^{t/3} = 5$.

   b) $K = H - Ca^t$

   c) $L = \frac{A+Be^{at}}{C-De^{at}}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $ln(x) = ln(8-x)$

   b) $ln(ln(x)) = 1$

   c) $ln(x+6) + ln(x-3) = ln(5) + ln(2)$

   d) $7e^x - e^{2x} = 12$.

3. Si comenzamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad $q(t)$ restante después de t años está modelada por:

   $q(t) = q_0 2^{t/1600}$.

   a) Grafica $q(t)$.
   b) Muestre que la razón de cambio de la cantidad restante a los t años es directamente proporcional a la cantidad restante a los t años.

4. Indique el dominio y grafique las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 5ln(x+2) - 3$

   b) $g(x) = ln\left|\frac{x+3}{2-x}\right|$

   c) $f(x) = \frac{10}{1-20e^{-t}}$

   d) $f(x) = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}$

   e) $f(x) = e^{-x^2}$.

   f) $f(x) = 3^x$.

   g) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$.

   h) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

   i) $f(x) = \log_2(x)$.

5. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 1^+} ln(x-1)$.

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} (ln(x+2)) - ln(1+x)$.

   c) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x^2}$.

   d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x}$.

   e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

6. Indique el conjunto para el cual las siguientes funciones son diferenciables y halle la función derivada.

   a) $f(x) = ln(3x)$

   b) $f(x) = e^x \cdot ln(3x)$

   c) $f(x) = ln(e^{-x} + xe^{3x})$

   d) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

   e) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

7. Encuentre la familia de primitivas de las siguientes integrales indefinidas:

   a) $\int \ln(x)dx$
   b) $\int \arctan(x)dx$
   c) $\int \sec(x)dx$
   d) $\int \sec^3(x)dx$
   e) $\int \tan(x)dx$
   f) $\int \cot(x)dx$
   g) $\int \csc(x)dx$
   h) $\int e^x \operatorname{sen}(2x)dx$
   i) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$
   j) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$
   k) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$
   l) $\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$
   m) $\int \frac{1}{4+x^2}dx$
   n) $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$
   ñ) $\int \sqrt{1+4x^2}dx$
   o) $\int \frac{1}{1-\cos(x)}dx$

8. ¿Existe x en $\mathbb{R}$ tal que $e^x = \ln(x)$?, ¿existe x en $\mathbb{R}$ tal que $e^x = x$? y ¿existe x en $\mathbb{R}$ tal que $x = \ln(x)$?. Justifique en cada caso su respuesta.

9. Use regla de L'Hopital para determinar si los siguientes límites existen.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{log_a(1+x)}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+x^2}{e^x}$

10. Las funciones $\cosh, \operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, se llaman el *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* respectivamente.

    a) Muestre que $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$ y que $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$.

    b) Muestre que cosh es par y senh impar.

    c) Muestre que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.

    d) Grafique cosh y senh.

11. ¿Es cierto que para cualquier $x \geq 0$ se tiene que $e^x - 1 \leq xe^x$?.

12. El número de personas N que han escuchado extenderse un rumor por los medios masivos de comunicación se modela por la siguiente función de tiempo t:

    $N = a(1 - e^{-kt})$

    Suponga que hay 200000 personas que escuchan finalmente el rumor. Si el 10 % de ellos lo escucharon el primer día, hallar a y k, suponiendo que t se mide en días.

13. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial. Indique el dominio de la solución.

    a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \;\; y(1) = -2.$

    b) $\frac{dy}{dx} = 1 - xe^{-2x}, \;\; y(0) = 1.$

    c) $\frac{dy}{dx} = ln(x), \;\; y(1) = 0.$

    d) $\frac{dy}{dx} = ke^{ax}, \;\; y(1) = \frac{k}{2}.$

    e) $\frac{dy}{dx} = Ae^{kx} + B, \;\; y(0) = 100.$

Polinomios

14. ¿Existe una función polinomial que cuya gráfica pase por los puntos $(1,1), (0,1)$ y $(2,2)$?.

15. Considere una función polinomial de grado 3, ¿es siempre estrictamente creciente?.

16. ¿Es cierto que si un polinomio no tiene raíces en $\mathbb{R}$ no se puede descomponer como producto de polinomios?.

17. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios de grado n y m respectivamente. ¿Es cierto que al componer las funciones polinomiales asociadas a esos polinomios resulta una función polinomial de grado nm?.

18. ¿Es cierto que el polinomio $x^4 + 1$ no se puede descomponer como un produnto de dos polinomios de grado menor que 4?.

19. Muestre que c es una raíz de $f(x)$ y factorice por $(x - c)$.

    (a) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 12, \quad c = -3$
    (c) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 3, \quad c = 1/2$
    (d) $f(x) = 27x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 6x + 1, \quad c = -1/3$

20. Determine las raíces racionales del polinomio:

    (a) $p(x) = x^6 + x^5 + x^4 - 2x^2 - 1.$
    (b) $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{6}x^2 - \frac{1}{9}x.$

21. Encuentre un polinomio de primer grado que dividido por $x-1$ y $x+3$ da de resto 6 y 2, respectivamente.

22. Encuentre el valor m para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$ tenga resto 12 al dividirlo por $x + 2$.

23. Encuentre los números reales k para los cuales $f(x)$ es factorizable por $q(x)$.

    (a) $f(x) = kx^3 + x^2 - 3k^2 + 11, \quad q(x) = x + 2$
    (b) $f(x) = x^3 - 4kx + 3, \quad q(x) = x - 1.$

24. Determine el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + 4$ sabiendo que es divisible por $x + 2$ y que los restos obtenidos al dividirlo por $x + 1$ y $x + 3$ son iguales.

25. Descomponga el polinomio $p(x) = x^5 - x$ en la forma más reducida posible.

26. Pruebe que un polinomio de grado n en $\mathbb{R}[x]$ tiene a lo más n raíces.

27. Calcula las siguientes integrales:

    a) $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$
    b) $\int \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx$
    c) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$
    d) $\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1} dx$
    e) $\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1} dx$
    f) $\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1} dx$
    g) $\int \frac{1}{x^4-1} dx$
    h) $\int \frac{2x+1}{x^3+5x^2+6x} dx$
    i) $\int \frac{x^3+x}{x^2-1} dx$
    j) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$