

PARTE AYUDANTIA 6: función exponencial y logarítmica

P11

a) $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

$$\log[(x+2)(x-1)] = \log(10)$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x-3)(x+4) = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -4$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3}$$

evaluando

$x = -4$ no puede ser solución

b) $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

$$\log_2(x^2 - x - 2) = \log_2(4)$$

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -2$$

evaluando ambas son solución

c) $\ln(\sqrt{x}) = \sqrt{\ln(x)}$ (*)

$$\frac{1}{2} \ln(x) = \sqrt{\ln(x)}$$

$$\frac{1}{4} \ln^2(x) = |\ln(x)|$$

$$\frac{1}{4} \ln^2(x) = \ln(x)$$

$$\vee \frac{1}{4} \ln^2(x) = -\ln(x)$$

$$\ln(1 - 4\ln(x)) = 0$$

$$\ln(1 + 4\ln(x)) = 0$$

$$\vee \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$1 - 4\ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^{1/4}$$

$$\vee 1 + 4\ln(x) = 0$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = e^{-1/4}$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = e^{-1/4}$$

ambas pueden ser sol

reemplazando en (*) la $\sqrt{-1/4}$ no es solución

$$d) e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

usamos el cambio de variable

$$u = e^x$$

$$\Rightarrow u^2 - u - 6 = 0$$

$$(u-3)(u+2) = 0$$

$$u = 3$$

$$u = -2$$

$$\Rightarrow e^{x_1} = 3 \Rightarrow x_1 = \ln(3)$$

$$\Rightarrow e^{x_2} = -2 \Rightarrow x_2 = \ln(-2)$$

NO EXISTE

solución $x_1 = \ln(3)$

P2)
i) $f(x) = e^{e^x}$

Recordan regla de la cadena

$$\frac{d[f(g(x))]}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

en este caso $f(x) = \exp(x)$ y $g(x) = \exp(\exp(x))$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{d \exp(\exp(x))}{dx} \cdot \frac{d \exp(\exp(x))}{d \exp(x)} \cdot \frac{d \exp(x)}{dx}$$

$$= \frac{d e^{e^x}}{dx} \cdot \frac{d e^{e^x}}{d e^x} \cdot \frac{d e^x}{dx} = e^{e^x} \cdot e^{e^x} \cdot e^x \frac{dx}{dx}$$

$$= e^{e^x + e^x + x}$$

ii) $f(x) = (\ln(x))^{\ln(x)} = e^{\ln(x) \cdot \ln(\ln(x))}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d e^{\ln(x) \cdot \ln(\ln(x))}}{dx} \cdot \frac{d [\ln(x) \cdot \ln(\ln(x))]}{dx}$$

$$= e^{\ln(x) \cdot \ln(\ln(x))} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(\ln(x)) + \ln(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \right]$$

$$= e^{\ln(x) \cdot \ln(\ln(x))} \left[\frac{1}{x} \ln(\ln(x)) + \frac{1}{x} \right] = (\ln(x))^{\ln(x)} \frac{1}{x} [\ln(\ln(x)) + 1]$$

$$\text{iii) } f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{x \ln(x)} &= e^{x \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx} (x \ln(x)) \\ &= e^{x \ln(x)} \left[\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right] \\ &= x^x [\ln(x) + 1] \end{aligned}$$

$$\text{iv) } f(x) = x \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{sea } y = x \sqrt{x^2 - 1} / \ln()$$

$$\ln(y) = \ln(x \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{2(x^2 - 1)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} \Rightarrow y' = \frac{d}{dx} f(x) = y \cdot \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(x \cdot \sqrt{x^2 - 1}) \cdot (2x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)}$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{(2x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}}{(x^2 - 1)}$$

v)

$$5) f(x) = (1+x)(1+e^{x^2})$$

$$\text{Sea } y = (1+x)(1+e^{x^2}) \quad / \ln()$$

$$\ln(y) = \ln[(1+x)(1+e^{x^2})]$$

$$\ln(y) = \ln(1+x) + \ln(1+e^{x^2}) \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+e^{x^2})} e^{x^2} \cdot 2x$$

$$y' = \frac{df(x)}{dx} = y \cdot \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})} \right] = (1+x)(1+e^{x^2}) \left[\frac{1}{1+x} + \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} \right]$$

$$\frac{df(x)}{dx} = e^{x^2}(2x^2 + 2x + 1) + 1$$

$$P3) \int_0^{x^2} f(t) dt = 1 - e^{2x^2} \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\text{por TFC} \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t) dt = f(x^2) \cdot 2x - 0$$

$$\forall \frac{d}{dx}(1 - e^{2x^2}) = -\frac{d}{dx}(e^{2x^2}) = -e^{2x^2} \cdot 4x$$

$$\text{por lo tanto } f(x^2) \cdot 2x = -e^{2x^2} \cdot 4x, \text{ si } x \neq 0$$

$$f(x^2) = -2e^{2x^2}$$

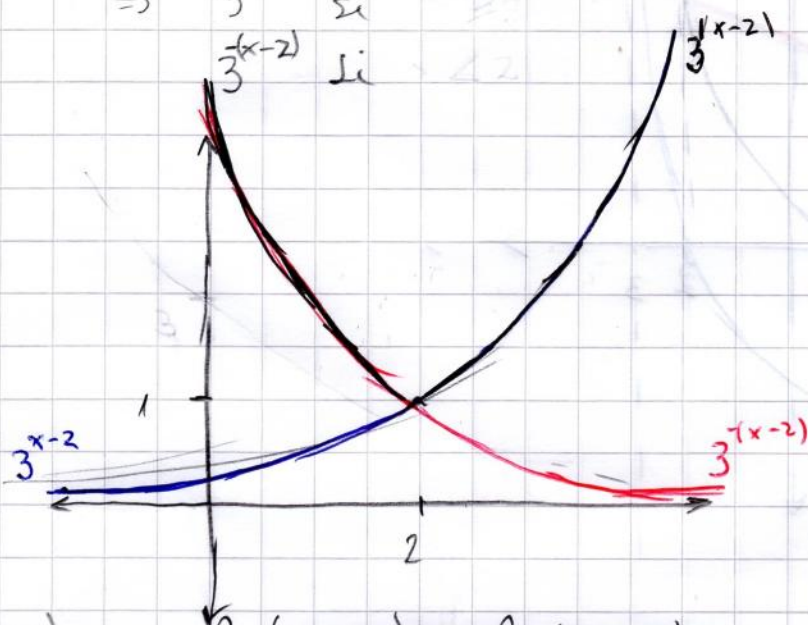
$$\text{si } u = x^2 \Rightarrow f(u) = -2e^{2u}$$

como la variable u es muda, podemos decir

$$\text{que } \underline{f(x) = -2e^{2x}}$$

p4) Si quieren revisarlas pueden hacerlo en (for plot.com)

a) $3^{|x-2|} \Rightarrow 3^{x-2}$ si ≥ 2
 $3^{-(x-2)}$ si < 2



b) $\ln\left(\frac{x+5}{3-x}\right) = \ln(x+5) - \ln(3-x)$

buscamos puntos donde corte a x $\ln(x+5) - \ln(3-x) = 0$

$$\ln(x+5) = \ln(3-x)$$

$$x+5 = 3-x$$

$$x = -1$$

y la intersección con $\ln(x+5)$ y $\ln(3-x)$

$$\ln(x+5) - \ln(3-x) = \ln(x+5)$$

$$\Rightarrow 3-x = 1$$

$$|x = 2|$$

$$\ln(x+5) - \ln(3-x) = \ln(3-x)$$

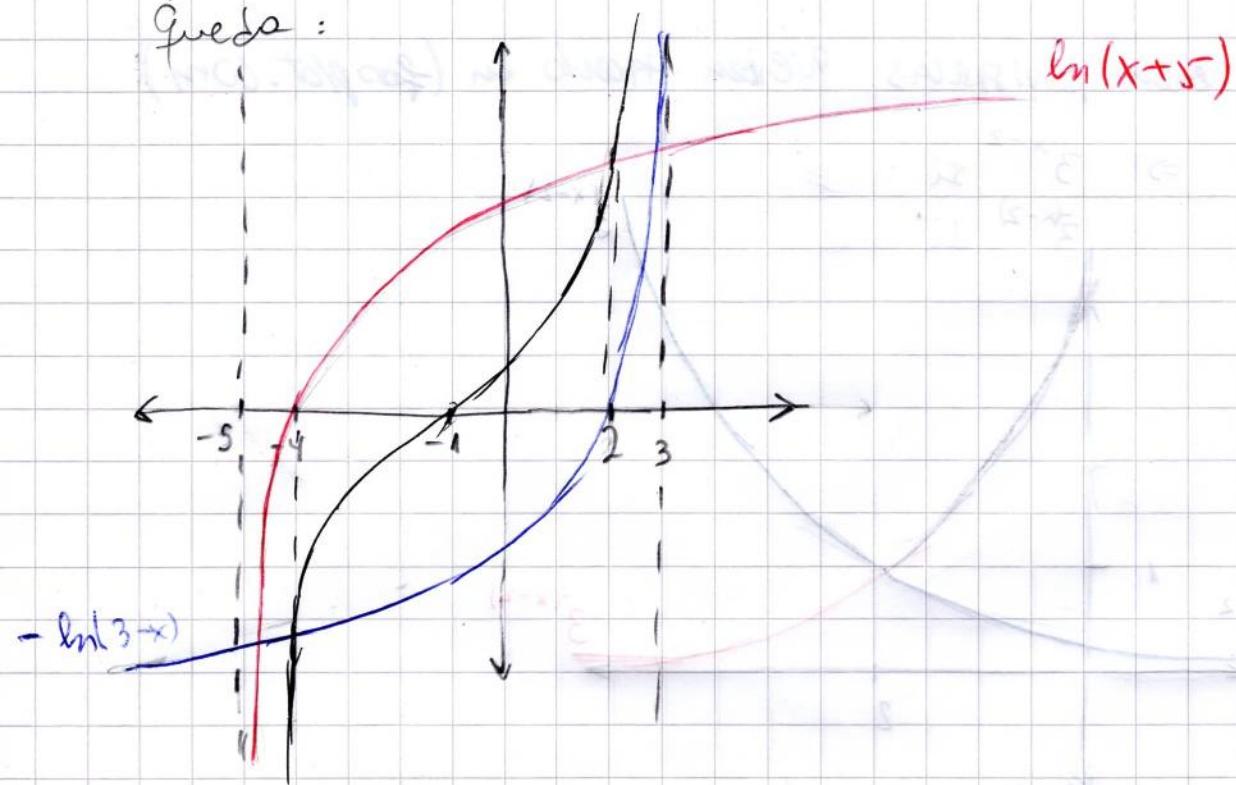
$$\ln(x+5) = 1$$

$$x+5 = e$$

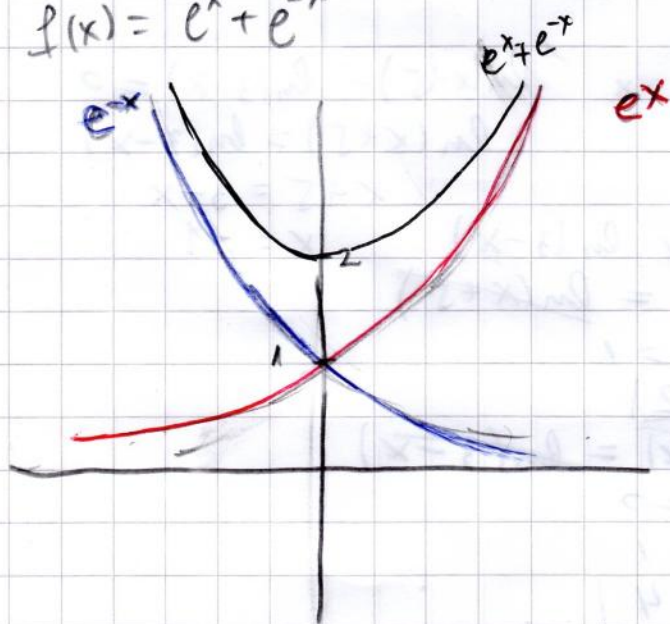
$$x = -4$$

Ahora podemos hacernos una idea de como es.

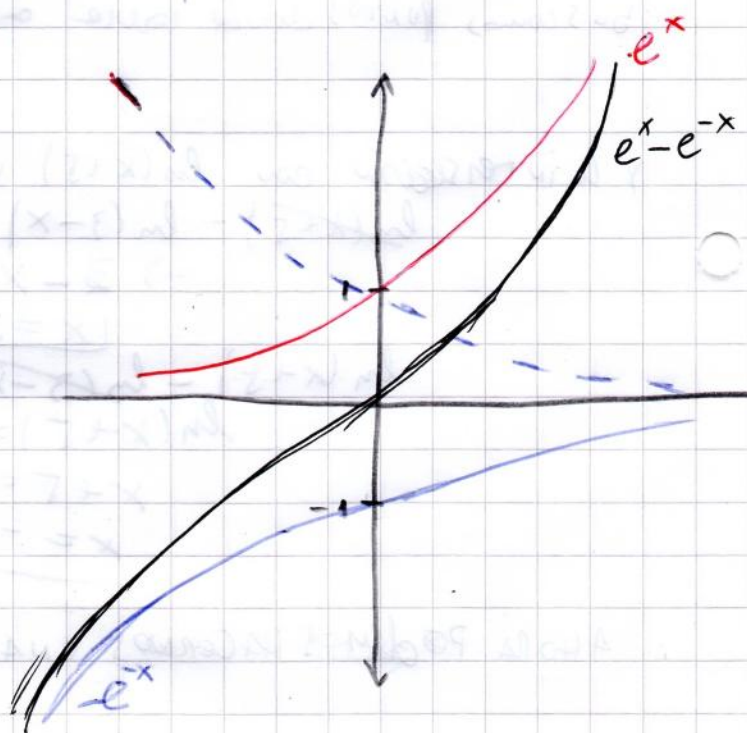
Questão:



c) $f(x) = e^x + e^{-x}$



d) $f(x) = e^x - e^{-x}$



P5) HECHO EN CLASES pero igual

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, es posible ya que e^x nunca es cero.
 $e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{e^x f'(x) - f(x) e^x}{(e^x)^2}$$

y como $f'(x) = f(x)$ por enunciado.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{e^x f(x) - f(x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = Cte$$

por lo tanto existe un $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{f(x)}{e^x} = C \Rightarrow \underline{f(x) = C \cdot e^x \quad \forall x}$$

P6) $\int_a^x f(t) dt = f(x) + \int_a^1 f(x) dx \quad (1)$

notar que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es diferenciable y

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

y que $\int_a^1 f(x) dx = a$ de $\forall x \in \mathbb{R}$, por ser una integral definida.

ahora derivando (1) queda

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} a$$

$$f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

y por el problema 5 sabemos que existe $C \in \mathbb{R}$ t.q.

$$f(x) = C e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ahora se conocemos la forma de $f(x)$, nos falta buscar el valor de C , para esto reemplazamos en (1)

$$\int_0^x C e^t dt = C e^x + \int_0^1 K e^x dx$$

$$\int_0^x C e^t dt = C e^x + C(e^1 - e^0) = C e^x + C(e - 1)$$

para conocer el valor de C debemos evaluar x en algún valor, por ejemplo $x=0$

$$\int_0^0 C e^t dt = 0 = C e^0 + C(e - 1)$$

$$0 = C + C e - C$$

$$0 = C e \quad \text{y como } e \neq 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

por lo tanto $f(x) = 0 \cdot e^x = 0$ $f(x)$ es la función nula

P7) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\ln(x) = x$?

Primero $x \notin]-\infty, 0[$ pues $\ln(x)$ no está definido en $]-\infty, 0[$

Si existe tampoco está entre $]0, 1[$, ya que en ese intervalo $x > 0$ pero $\ln(x) < 0$, por lo tanto, si existe esto solo podría ocurrir en $x \in [1, \infty[$

Entonces, para probar que existe nos definimos $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) = x - \ln(x)$, notar que $f(1) = 1$

probamos monotonía, $\frac{df(x)}{dx} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 1$

por lo tanto $f(x)$ es creciente, por lo tanto, si $x \geq 1$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 1 \Rightarrow x - \ln(x) \geq 1$$

y como $x - \ln(x) \neq 0 \quad \forall x \in [1, \infty[\Rightarrow$ no existe x tal que $x = \ln(x)$
para $x \in [1, \infty[$

por lo tanto, no existe $x \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\underline{X = \ln(X)}$$

P8 | sea $y(x)$ función que satisface $\frac{y'(x)}{2-3y(x)} = -kx$
con $k \in \mathbb{R}$.
INTEGRAMOS

$$\int \frac{y'(x)}{2-3y(x)} dx = \int -kx dx$$

$$\text{Si } z = y(x) \Rightarrow dz = y'(x) \cdot dx$$

HACEMOS ESTO para tener el diferencial igual a la variable a
INTEGRAR, y NO una función de x .

$$\int \frac{dz}{2-3z} = -\int kx dx$$

$$\begin{aligned} \text{Sea } u &= 2-3z \\ du &= -3dz \\ dz &= -\frac{du}{3} \end{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3} \ln|2-3z| + C_1$$

$$\text{por el otro lado } \int -kx dx = -\frac{kx^2}{2} + C_2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \ln|2-3z| = -\frac{kx^2}{2} + \underbrace{(C_2 - C_1)}_C$$

$$\ln|2-3y(x)| = \frac{3kx^2}{2} + 3C \quad / e^{\quad}$$

$$|2-3y(x)| = e^{\frac{3kx^2}{2} + 3C} = e^{\frac{3kx^2}{2}} \cdot \underbrace{e^{3C}}_A$$

que da

$$2-3y(x) = Ae^{\frac{3kx^2}{2}} \quad \vee \quad 2-3y(x) = -Ae^{\frac{3kx^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2-Ae^{\frac{3kx^2}{2}}}{3} \quad \vee \quad y(x) = \frac{2+ Ae^{\frac{3kx^2}{2}}}{3}$$