Control 4 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Lunes 21 de Octubre, 2013

Tiempo : 15 **minutos .**

Nombre:

Elija sólo un problema.

1. Resolver la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{1}{4x^2 + 12x + 10}\, dx$$

Solución:

Dado que en la expresión cuadrática $4x^2+12x+10$ su discriminante es $-16 < 0$, esta no es factorizable en $\mathbb{R}$ y por tanto, haremos completacin de cuadrados de la siguiente forma: $4x^2+12x+10 = 1+(2x+3)^2$,

$\boxed{\text{1 punto.}}$

luego la integral dada se expresa:

$I = \int \frac{1}{4x^2+12x+10}\, dx = \int \frac{1}{1+(2x+3)^2}\, dx.$

$\boxed{\text{1 punto.}}$

En esta última haremos un cambio de variable mediante sustitución simple: $u = 2x+3 \;\Rightarrow\; du = 2dx$,

$\boxed{\text{1 punto.}}$

así,

$I = \int \frac{1}{1+(2x+3)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}arctg(u) = \frac{1}{2}arctg(2x+3) + C.$

$\boxed{\text{3 puntos.}}$

2. Resolver la siguiente integral indefinida:

$$\int \sqrt{1-9x^2}\,dx$$

Solución:

$I = \int \sqrt{1-9x^2}\,dx = \int \sqrt{1-(3x)^2}\,dx$

Sea $u = 3x \;\Rightarrow\; du = 3dx$, así, $I = \frac{1}{3}\int \sqrt{1-(u)^2}\,du$.

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Por otra parte, aplicaremos una sustitución trigonométrica para resolver esta última.

Sea $\alpha = arcsen(u), \;\Rightarrow\; du = cos(\alpha)d\alpha$,

luego nuestra integral queda:

$I = \frac{1}{3}\int cos^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{3}\int \frac{1+cos(2\alpha)}{2}\,d\alpha = \frac{1}{6}\left\{\alpha + \frac{sen(2\alpha)}{2}\right\}.$

$\boxed{\text{2 puntos.}}$

Además, si $\alpha = arcsen(u), \;\Rightarrow\; sen(\alpha) = u$ y $cos(\alpha) = \sqrt{1-u^2}$, luego $sen(2\alpha) = 2\,sen(\alpha)\,cos(\alpha) = 2\,u\sqrt{1-u^2}$.

$\boxed{\text{1 punto.}}$

Por lo tanto, la integral inicial resulta:

$I = \frac{1}{6}\left\{arcsen(3x) + 3x\sqrt{1-9x^2}\right\} + C$

$\boxed{\text{1 punto.}}$