Guia 2 de Matemáticas 2

Programa de Bachillerato. Universidad de Chile.

Septiembre, 2013

1. Evalue la suma de Riemann para $f(x) = 2 - x^2,\ \ 0 \leq x \leq 2,$ con cuatro subintervalos; tome los extremos de la derecha como los puntos t_i^*. Haga un dibujo y vea que representa esta suma.

2. Evalue la suma de Riemann para $f(x) = \sqrt{x},\ \ 0 \leq x \leq 2,$ con cinco subintervalos; tome los puntos medios como los puntos t_i^*. Haga un dibujo y vea que representa esta suma.

3. Para la función $f(x) = \frac{1}{x}$, calcule la suma de Riemann en el intervalo que se indica:

   a) En [1,5], usando 5 subintervalos y $t_i^* = t_{i-1}$

   b) En [1,3], usando 6 subintervalos y $t_i^* = \frac{1}{2}(t_i + t_{i-1})$

   En cada caso represente gráficamente.

4. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y P una partición de $[a,b]$. ¿Qué relación hay entre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ y $S(f,P)$ y entre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ y $s(f,P)$?.

5. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Encuentre n en $\mathbb{N}$ tal que $S(f,P_n) - s(f,P_n) < 10^{-3}$, donde

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

6. Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables, ¿Es cierto que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)?$$

7. Si f es par y $\displaystyle\int_0^a f(t)dt = A$. Calcule $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$, en términos de A.

8. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a,b]$. Demuestre que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

9. Sea f continua y no negativa en $[a,b]$ tal que existe ξ en $[a,b]$ con $f(\xi) > 0$, entonces pruebe que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

10. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada tal que para cualquier partición P se tiene que $S(f, P) = s(f, P)$. ¿Es f una función constante?.

11. Considera n en $\mathbb{N}$ y define $I_n = \displaystyle\int_0^n [x]dx$. Encuentre el valor de I_n en términos de n.

12. Para cada x en $\mathbb{R}$ define $I(x) = \displaystyle\int_0^x [t]dt$. Grafica I.

13. Si f es continua en $[a, b]$ y si $\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces pruebe que existe ξ en $[a, b]$ tal que $f(\xi) = 0$.

14. Evalue cada integral, interpretándola en términos de áreas:

    a) $\int_1^3 (1 + 2x)\, dx$

    b) $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

    c) $\int_0^3 |3x - 5|\, dx$

    d) $\int_{-2}^2 (1 - |x|)\, dx$

15. Usando T.F.C, obtenga las derivadas de las siguientes funciones:

    a) $g(x) = \int_1^x t^2\, dt$

    b) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + 2t}\, dt$

    c) $g(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1 + t^2}\, dt$

    d) $g(x) = \int_0^{x^2} \sqrt[3]{t^4 + 1}\, dt$

16. Sea f una función tal que $f(x) = \int_0^x (x - t)^2 f(t)\, dt$. Demuestre que $f'''(x) = 2f(x)$.

17. Demuestre que si $g(x) = \int_0^x f(t)sen(x)\, dt$ entonces se cumple la igualdad: $g''(x) + g(x) = 2f(x)cos(x) + f'(x)sen(x)$.

18. Sean $f(x) = x^4 - 2x^2$ y $g(x) = 2x^2$. Dibuje la región limitada por los gráficos de f y g. Además calcule el área de dicha región.

19. Encuentre una función tal que su derivada sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(2x)$. (Ayuda: La respuesta no es la función real definida para cada x por $G(x) = \sin(2x)$)

20. Sea n en $\mathbb{Z}$. ¿Cuál es el valor de la integral $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|dx$?

21. El teorema fundamental del calculo dice que cualquier función continua tiene una función primitiva. Encuentre la primitiva F de $f(x) = |x|$, tal que $F(0) = 0$.

22. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua entonces sabemos que la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una función diferenciable en (a, b). ¿Qué puede decir de $G(x) = \int_x^b f(t)dt$?

23. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} \cos(t)dt$. Demuestre que F es diferenciable y encuentre $F'(x)$. (Ayuda: F es la composición de dos funciones, las cuales son fáciles de derivar.)